М Е Х А Н І К А

УДК 539.3II

Д.В.Грилицький, д-р техн.наук, В.К.Опанасович,канд.фіз.-мат.наук

СТИСК КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З ФІЗИЧНОЮ ЩІЛИНОЮ НА ЛІНІЇ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Розглянемо безмежну пластинку, що складається з двох ізотропних,спаяних між собою,півплощин. Нехай на лінії розділу матеріалів є фізична щілина довжиною $2a$ та сталої ширини h, що співрозмірна з пружними переміщеннями. Береги тріщини паралельні лінії спаю. На нескінченності пластинка стискається рівномірно розподіленим навантаженням q, перпендикулярним до лінії розділу матеріалів, і розтягується рівномірно розподіленими напруженнями p_1 і p_2, паралельними лінії щілини відповідно в верхній і нижній півплощині. Вважаємо, що під дією заданого напруженого стану береги тріщини на деякій частині вступають у гладкий контакт.

Визначимо напружений стан пластинки. Зокрема довжину контакту між берегами щілини і характер розподілу на ній тиску.

Початок декартової системи координат розмістимо в центрі щілини, направивши вісь Ox по лінії спаю. Всі характеристики, що належать до верхньої півплощини,будемо позначачи індексом "I", а до нижньої - індексом "2". Лінію спаю позначимо через L'', вільні краї щілини - через L', лінію контакту - через L.

З фізичних міркувань ясно, що площадка контакту буде симетричною відносно осі Oy і її довжину позначимо через 2λ /рис.I/.

Згідно з умовами задачі на лінії розділу матеріалів будемо мати

$$\left(Y_y - iX_y\right)^+ = \left(Y_y - iX_y\right)^-, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- \qquad \text{на } L'',$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = X_y^+ = X_y^- = 0 \qquad \text{на } L', \quad /I/$$

$$X_y^+ = X_y^- = 0\,, \quad Y_y^+ - Y_y^-, \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- = 0 \qquad \text{на } L\,.$$

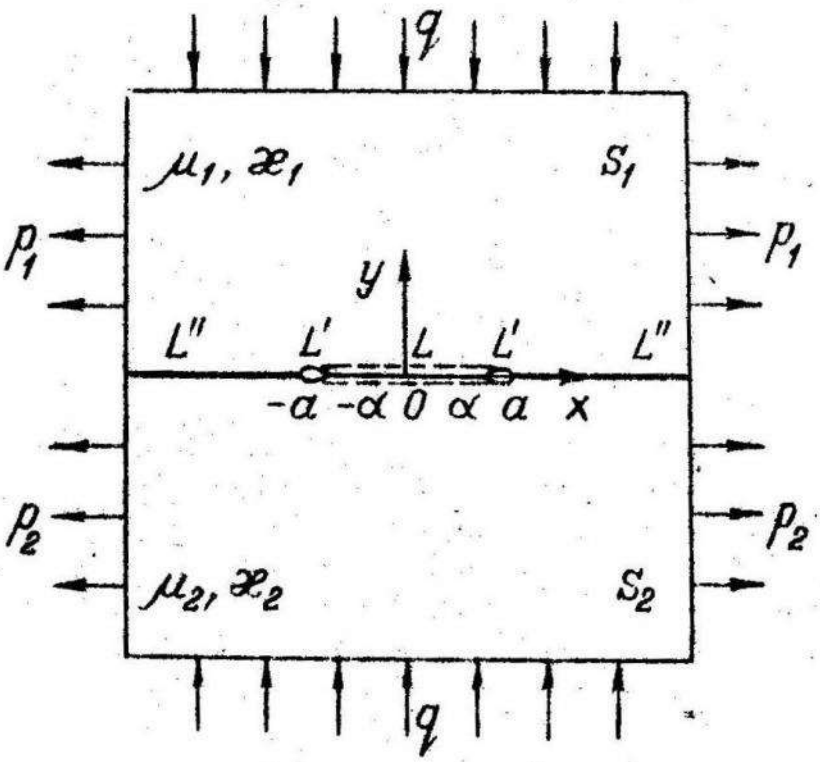

Рис.I

Тут індексами "+" і "-" позначено граничне значення функцій на дійсній осі відповідно зверху, тобто із S_1, і знизу, тобто із S_2.

Зауважимо, що в подальших викладках індекс j набуває лише двох значень I і 2.

Введемо функції напружень Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ /3/ для областей S_j. Аналітично продовжимо функцію $\Phi_j(z)$ із півплощини S_j у півплощину S_{3-j} за формулою

$$\Phi_j(z) = -\bar{\Phi}_j(z) - z\bar{\Phi}_j'(z) - \bar{\Psi}_j(z),$$

тоді напружено-деформований стан у пластинці можемо визначити за співвідношеннями

$$X_x + Y_y = 2\left[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}\right],$$

$$Y_y - iX_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi_j'(z)}\ , \qquad /2/$$

$$2\mu_j\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa_j\Phi_j(z) + \Phi_j(\bar z) - (z-\bar z)\overline{\Phi_j'(z)}\ .$$

Зауважимо, що при великих $|z|$ функцію $\Phi_j(z)$ можемо записати у вигляді

$$\Phi_j(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) + \begin{cases} \frac{1}{4}(P_j - q) & z \in S_j\ , \\ \frac{1}{4}(P_j + 3q) & z \in S_{3-j}\ , \end{cases}$$

Крім того, для розв"язуваності задачі між напруженнями на нескінченності і пружними сталими пластинки повинна виконуватись залежність

$$\mu_1(1+\varkappa_2)P_2 - \mu_2(1+\varkappa_1)P_1 = \left[3(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1\varkappa_2 - \mu_2\varkappa_1\right]q$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_0(z) = D_j\Phi_j(z) - R_{3-j}\Phi_{3-j}(z) \qquad z \in S_j\ , \qquad /3/$$

то для потенціалів $\Phi_j(z)$ є залежність

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} A_j^{-1}\left(R_{3-j}B + \Phi_0(z)\right) & z \in S_j\ , \\ A_{3-j}^{-1}\left(D_{3-j}B - \Phi_0(z)\right) & z \in S_{3-j}\ , \end{cases} \qquad /4/$$

де

$$D_j = c_j g^{2-j}, \quad R_j = -c_j g^{j-1}, \quad c_j \frac{(-1)^j \mu_{3-j}(1+\varkappa_j)}{1-g}\ ,$$

$$B = \frac{1}{4}(P_1 + P_2 + 2q)\ , \qquad A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\varkappa_j\ , \quad g = -A_1/A_2\ . \qquad /4'/$$

Із /3/ випливає, що для функції $\Phi_0(z)$ при великих $|z|$ наявний розклад

$$\Phi_0(z) = -\frac{A_1}{1-g}q + O\left(\frac{1}{z}\right)\ . \qquad /5/$$

Прийнявши до уваги /I/, /2/, /4/, невідому функцію $\Phi_0(z)$ знайдемо з задачі лінійного спряження

$$\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = A_1 Y_y \qquad x \in L + L', \tag{6}$$
$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = 0 \qquad x \in L'',$$

тут Y_y – шукані контактні напруження.

Розв"язавши /6/, одержимо

$$\Phi_0(z) = \frac{A_1 X_0(z)}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{Y_y\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} + (C_0 + C_1 z)X_0(z) \quad , \tag{7}$$

де C_0 і C_1 – невідомі постійні, які знаходимо з умови однозначності переміщень і співвідношення /5/

$$C_1 = -\frac{A_1}{1-g}q, \qquad C_0 = -2i\beta a C_1 ,$$
$$X_0(z) = (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \qquad \beta = \frac{1}{2\pi}\ln|g| .$$

Остання гранична умова /I/, через функцію $\Phi_0(z)$ виразиться так:

$$\Phi_0^+(x) - \overline{\Phi_0^+(x)} - \Phi_0^-(x) + \overline{\Phi_0^-(x)} = 0 \qquad x \in L ,$$

або, використовуючи /7/, дістаємо

$$\mathrm{Im}\left[\frac{X_0^+(x)}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{Y_y\,dt}{X_0^+(t)(t-x)} - \frac{q}{1-g}(x - 2i\beta a)X_0^+(x)\right] = 0 \quad x \in L . \tag{8}$$

Співвідношення /8/ є сингулярне інтегральне рівняння для знаходження невідомих контактних напружень Y_y .

Якщо ввести функцію

$$W(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{Y_y\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{q}{1-g}(z - 2i\beta a)X_0(z) , \tag{9}$$

то, як випливає з /8/, вона задовольняє таку крайову задачу

$$W^+(x) - gW^-(x) = 0 \qquad x \in L',$$
$$W^+(x) - \overline{W^+(x)} = 0 \qquad x \in L , \tag{10}$$
$$W^-(x) - \overline{W^-(x)} = 0 \qquad x \in L ,$$

загальний розв"язок якої наведено в роботі [2].

Розв"язуючи /10/, знаходимо

$$W(z) = -\frac{q}{1-g}\left(1-\frac{2i\beta a K_0}{\sqrt{z^2-d^2}}\right)R(z), \qquad /11/$$

де

$$R(z)=\sqrt{\frac{z^2-d^2}{z^2-a^2}}\left(\frac{\sqrt{z^2-d^2}+aK_0}{\sqrt{z^2-d^2}-aK_0}\right)^{i\beta}, \quad K_0=\sqrt{1-\frac{d^2}{a^2}}.$$

З /9/ випливає, що

$$W^+(x)-gW^-(x)=\sigma_y \qquad x\in L.$$

Підставляючи у цю рівність формулу /11/, одержуємо вираз для невідомих контактних напружень

$$\sigma_y=-\frac{2q\,e^{\pi\beta}}{1-g}\left\{\sqrt{\frac{d^2-x^2}{a^2-x^2}}\,ch\left[2\beta\gamma_1(x)\right]+\right. \qquad /12/$$

$$\left.+\frac{2\beta a K_0}{\sqrt{a^2-x^2}}\,sh\left[2\beta\gamma_1(x)\right]\right\} \qquad x\in L,$$

де

$$\gamma_1(x)=arctg\frac{\sqrt{d^2-x^2}}{aK_0}.$$

Зауважимо, що для визначення функції $\Phi_0(z)$ у цьому випадку вигідно не підставляти /12/ у /7/, а порівняти /7/ і /9/, і, виходячи з /11/, написати відразу вираз для $\Phi_0(z)$

$$\Phi_0(z)=-\frac{A_1 q}{1-g}\left(1-\frac{2i\beta a K_0}{\sqrt{z^2-d^2}}\right)R(z). \qquad /13/$$

Для повного розв"язку задачі необхідно визначити область контакту, яку знаходимо з умови

$$\int_{-a}^{-d}(v^+-v^-)'\,dx=-h,$$

і, опускаючи викладки, можемо записати так:

$$n=\int_d^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\left\{\sqrt{x^2-d^2}\cos\left[\beta\gamma_3(x)\right]+2\beta a K_0\sin\left[\beta\gamma_3(x)\right]\right\}dx, \qquad /14/$$

де

$$n=\frac{q^*}{q}, \quad q^*=\frac{2\mu_1\mu_2 h e^{\pi\beta}}{aA_1}, \quad \gamma_3(x)=ln\frac{aK_0+\sqrt{x^2-d^2}}{aK_0-\sqrt{x^2-d^2}},$$

q^* – те значення q, при якому починає зарсджуватись контакт.

Обчислення показали, що для всіх фізично можливих пружних характеристик матеріалу площадку контакту з точністю до 1,5% можна шукати за формулою

$$n = E\left(\frac{\pi}{2}, K_0\right) - \lambda^2 F\left(\frac{\pi}{2}, K_0\right), \qquad /15/$$

яка одержується з /14/, прийнявши $\beta = 0$, тобто для однорідної пластинки.

У формулі /15/ E і F – символи повних еліптичних інтегралів відповідно першого і другого роду.

Подібно до [4] коефіцієнти інтенсивності напружень введемо за формулою

$$\tilde{\Phi}(z_m) = (-1)^{m+1} 0{,}5 A_1 \sqrt{a}\, e^{-\pi\beta} (K_{1m} - iK_{2m}),$$

де

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi_0(z)\sqrt{z^2 - a^2}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{i\beta}, \qquad z_m = (-1)^{m+1} a,$$

$m=1$ для кінця a і $m=2$ для кінця $-a$; K_{1m}, K_{2m} – коефіцієнти інтенсивності напружень.

Провівши відповідні перетворення, знаходимо, що в нашому випадку

$$K_{11} = K_{12} = \Gamma(\cos\delta + 2\beta\sin\delta),$$

$$K_{21} = -K_{22} = \Gamma(2\beta\cos\delta - \sin\delta),$$

де

$$\delta = 2\beta \ln K_0, \qquad \Gamma = -\frac{q\sqrt{a}\, K_0}{ch\,\pi\beta}.$$

На рис.2 графічно зображено залежність правої частини /15/ від відношення величини області контакту до довжини тріщини. Зміну коефіцієнтів інтенсивності напружень від того ж відношення показано на рис.3,4. При цьому всі криві обчислені для $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 2$ за ви-

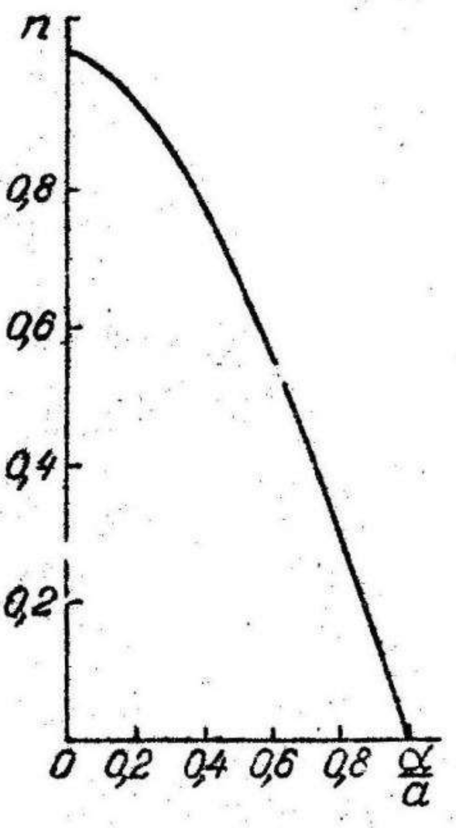

Рис.2.

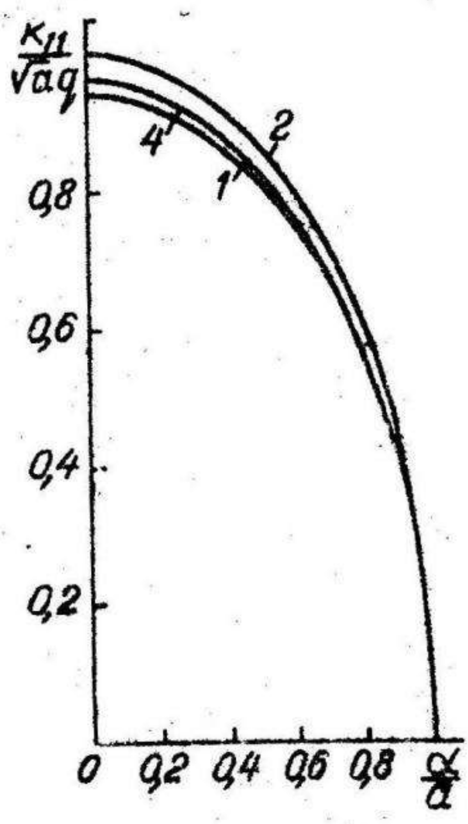

Рис.3.

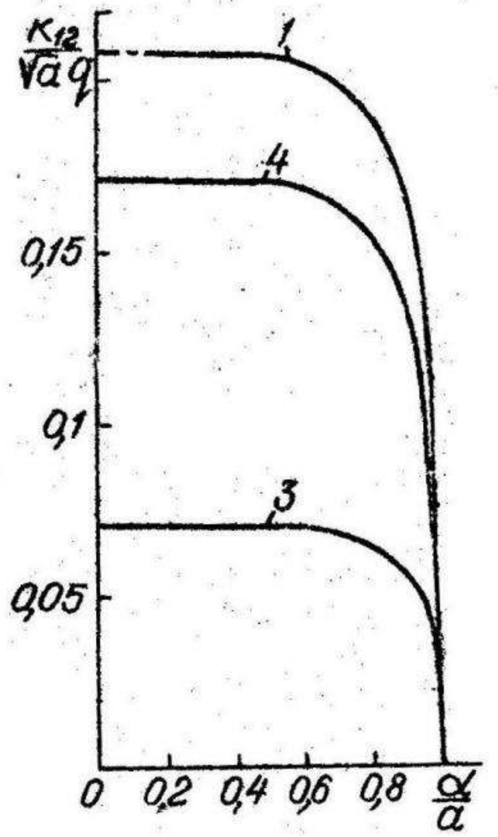

Рис.4.

нятком першої кривої, для якої $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_2 = 3$. Крім того, для першої кривої $\rho = \mu_1/\mu_2 = 0$, для другої - $\rho = 1$, для третьої - $\rho = 0{,}5$, для четвертої - $\rho = 0{,}1$.

Зауважимо, що детальне дослідження даної задачі для випадку дії зосереджених сил проведено в роботі [1], минаючи етап сингулярного інтегрального рівняння.

Список літератури: 1. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К. Распределение напряжений в кусочнооднородной плоскости со щелью при сжатии. - "Известия АН Арм.ССР. "Механика", 1974, т.27, № 2. 2. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К. О замкнутом решении одного сингулярного интегрального уравнения. - "Математическая физика", 1973, вып.14. 3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966. 4. Сих, Райс. Изгиб неоднородных пластин с трещинами. - "Прикладная механика", 1964, т.31, Е, № 3.

УДК 539.3

Т.Л.Мартинович, д-р фіз.-мат.наук, М.К.Зварич, канд.фіз.-мат.наук, В.С.Щукін

ПРУЖНА РІВНОВАГА СМУГИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНО ЗАМКНУТИЙ СТЕРЖЕНЬ

Проблема визначення концентрації напружень в смузі з одним отвором або нескінченною кількістю кругових отворів розглядалася в [1,2], [4-7]. У цій роботі, виходячи з граничних умов в інтегральній формі, що містять довільну голоморфну функцію, розв"язана задача про напружений стан смуги, в круговий отвір якої впресовано пружне кільце. Напружено-деформований стан кільця описується теорією криволінійних стержнів.