

нятком першої кривої, для якої $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 3$. Крім того, для першої кривої $\rho = \mu_1/\mu_2 = 0$, для другої - $\rho = 1$, для третьої - $\rho = 0,5$, для четвертої - $\rho = 0,1$.

Зауважимо, що детальне дослідження даної задачі для випадку дії зосереджених сил проведено в роботі [1], минаючи етап сингулярного інтегрального рівняння.

Список літератури: 1. Г р и л и ц к и й Д.В., О п а н а с о в и ч В.К. Распределение напряжений в кусочнооднородной плоскости со щелью при сжатии. - "Известия АН Арм.ССР. "Механика", 1974, т.27, № 2. 2. Г р и л и ц к и й Д.В., О п а н а с о в и ч В.К. О замкнутом решении одного сингулярного интегрального уравнения. - "Математическая физика", 1973, вып.14. 3. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966. 4. С и х, Р а й с. Изгиб неоднородных пластин с трещинами. - "Прикладная механика", 1964, т.31, Е, № 3.

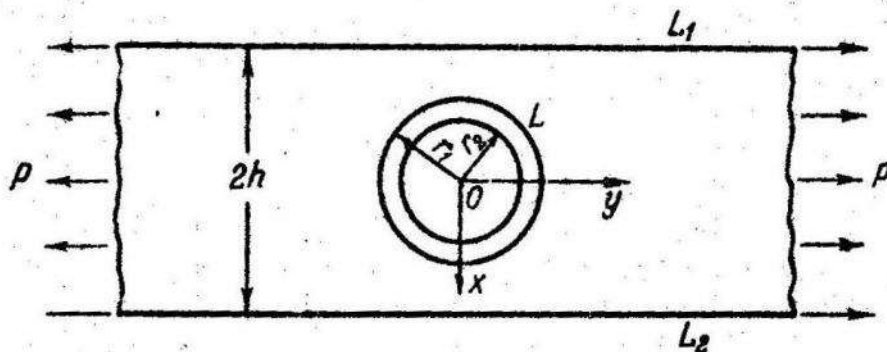
УДК 539.3

Т.Л.Мартинович, д-р фіз.-мат.наук, М.К.Зварич, канд.фіз.-мат.наук,
В.С.Шукін

ПРУЖНА РІВНОВАГА СМУГИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНО ЗАМКНУТИЙ СТЕРЖЕНЬ

Проблема визначення концентрації напружень в смугі з одним отвором або нескінченною кількістю кругових отворів розглядалася в [1,2], [4-7]. У цій роботі, виходячи з граничних умов в інтегральній формі, що містять довільну голоморфну функцію, розв'язана задача про напружений стан смуги, в круговий отвір якої впресовано пружне кільце. Напружено-деформований стан кільця описується теорією криволінійних стержнів.

Розглянемо ізотропну смугу шириною $2h$ з круговим отвором радіуса r_1 , в який впресовано пружне кільце /стержень/, поперечний переріз якого може бути довільної форми, симетричної відносно серединної площини смуги. Тертям на лінії контакту між пластинкою і кільцем нехтуємо. До внутрішнього контуру кільця $r = r_2$ прикладено рівномірно розподілене навантаження N , а сторони смуги L_1 і L_2 вільні від завантаження. На нескінченності смуга розтягається зусиллями інтенсивності p . При цьому припускається, що контакт між тілами здійснюється вздовж всього контура L .



Після того, як в отвір смуги впресовано кільце, граничні умови задачі згідно з [3] мають вигляд

$$\int_L F_i'(t) \operatorname{Re} U dt = 2\mu \int_L F_i'(t) [u_{in} + \epsilon^*] dt, \quad /1/$$

$$\int_L \overline{F_i'(t)} V d\bar{t} = - \int_L N^{(j)} \overline{F_i(t)} dt; \quad \int_L F_i'(t) V dt = - \int_L N^{(j)} F_i(t) dt.$$

$$dV=0, \quad t \in L_j, \quad (j=1,2), \quad /2/$$

$$U = i\bar{t} [x\varphi_i(t) - t\overline{\varphi_i'(t)} - \overline{\psi_i(t)}], \quad V = \varphi_i(t) + t\overline{\varphi_i'(t)} + \overline{\psi_i(t)}.$$

$\varphi_i(z), \psi_i(z)$ - комплексні потенціали, які визначають напружений стан смуги; $F_i(z)$ - довільна функція, голоморфна в області, зай-

нятій смугою; u_{in} - нормальна складова переміщення контурних точок кільця; $N^{(i)}$ - нормальна складова контактного напруження; ϵ^* - величина порядку пружних переміщень; t - афікс точки контура.

Вважаючи, що отвір розміщений на однаковій відстані від отворів смуги, яка розтягається зусиллями, паралельними осі Oy /див. рисунок/, функції напруження $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ виберемо у вигляді [1]

$$\varphi(z) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} a_k r_1^k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r_1^k [(2h+z)^{-k} - (2h-z)^{-k}] + c_1 z,$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_k r_1^k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k r_1^k [(2h+z)^{-k} - (2h-z)^{-k}] + d_1 z.$$

Величини u_{in} , $N^{(i)}$ і довільну функцію $F_1(z)$ на контурі кругового отвору γ / $t = r_1 \sigma$ / згідно з [3] подамо у вигляді

$$u_{in} = f_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} f_k (\sigma^k + \sigma^{-k}), \quad F_1(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \sigma^{-n},$$

$$N^{(i)} = \frac{g}{2hr_1 r_0} \left\{ f_0 + \frac{1}{1 + \frac{r_0}{r_1}} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} (1-k^2) f_k (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right\} + \frac{h^* r_2}{h r_1} N. \quad /4/$$

Внесемо розклади /3/ і /4/ у граничні умови /1/ і виконаємо інтегрування вздовж контура γ , приймаючи при цьому всі E_j , крім E_n , рівними нулю. Одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} g_{kn}^{(1)} f_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_{kn}^{(1)} a_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{kn}^{(1)} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(1)} \alpha_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn} \beta_k = \epsilon_n + p_n^{(1)},$$

$$\sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} g_{kn}^{(2)} f_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_{kn}^{(2)} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)} \alpha_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn} \beta_k = p_n^{(2)},$$

$$\sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} g_{kn}^{(3)} f_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_{kn}^{(3)} a_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{kn}^{(3)} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(3)} \alpha_k = p_n^{(3)}, \quad n=1,3,5,\dots,$$

де

$$g_{kn}^{(1)} = -4\mu \delta_{kn}; \quad \epsilon_n = 4\mu \epsilon^* \delta_{-n}; \quad p_n^{(1)} = \frac{p}{2} r_1 [(1-\kappa) \delta_{-n} + \delta_{-n+2}];$$

$$a_{kn}^{(1)} = (\kappa + k) \delta_{k-n+1}; \quad b_{kn}^{(1)} = -\delta_{k-n-1} - \delta_{k-n+1};$$

$$c_{kn}^{(1)} = (\kappa - n) A_{kn} (1 + \delta_{-n}); \quad d_{kn}^{(1)} = -A_{k,n-2} \delta_{n-2}^*;$$

$$a_{kn}^{(2)} = \delta_{n-k-1}; \quad c_{kn}^{(2)} = (n+2) A_{k,n+2}; \quad d_{kn}^{(2)} = A_{k,n};$$

/6/

$$g_{kn}^{(2)} = \frac{q}{2hr_0} \frac{(1-\kappa^2)^2}{1+\frac{r_0}{r_c}} \frac{1}{n} \delta_{n-k}; \quad p_n^{(2)} = -\frac{p}{2} r_1 \delta_{-n}; \quad g_{0,n}^{(3)} = -\frac{q}{2hr_0} \delta_{-n};$$

$$g_{kn}^{(3)} = -\frac{q}{2hr_0} \frac{(1-\kappa^2)^2}{1+\frac{r_0}{r_c}} \frac{1}{n} \delta_{k-n}; \quad a_{kn}^{(3)} = -\kappa \delta_{k-n+1};$$

$$b_{kn}^{(3)} = \delta_{k-n-1}; \quad c_{kn}^{(3)} = A_{kn} (1 + \delta_{-n}); \quad p_n^{(3)} = (N - \frac{p}{2}) r_1 \delta_{-n};$$

$$A_{k,m} = -2C_{k+m-1}^m \varepsilon^{\kappa+m}; \quad \varepsilon_1 = \frac{r_1}{2h};$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j = -1; \\ 0, & j \neq -1; \end{cases} \quad \delta_j^* = \begin{cases} 1, & j \geq 0; \\ 0, & j < 0; \end{cases}$$

Внаслідок геометричної і силової симетрії задачі граничним умовам /2/ достатньо задовольнити лише на контурі L_1 /на контурі L_2 вони задовольняються автоматично/. Підставляючи розклади /3/ в умову /2/, враховуючи, що на L_1 $t = -h + iy$, одержуємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (2\varepsilon_1)^k a_k \left[\frac{\kappa(1-2i\varepsilon_1 \eta)}{(1+2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa+1}} - \frac{1}{(1-2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa}} \right] - \frac{(2\varepsilon_1)^k b_k}{(1+2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa}} \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (2\varepsilon_1)^k d_k \left[\frac{1}{(1+2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa}} + \frac{\kappa}{(1-2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa}} - \frac{1}{(3-2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa}} + \right. \\ & \left. + \frac{\kappa(1-2i\varepsilon_1 \eta)}{(3+2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa+1}} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (2\varepsilon_1)^k \beta_k \left[\frac{1}{(1-2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa}} - \frac{1}{(3+2i\varepsilon_1 \eta)^{\kappa}} \right] = c_1^*, \end{aligned}$$

/7/

Таблица I

Значения напряжений σ_θ/ρ

ϵ_1	δ	θ°							
		0	15	30	45	60	75	90	
0,35	0,25	5,898	5,002	2,973	0,996	-0,379	-1,146	-1,392	
	0,15	6,622	5,263	2,491	0,259	-1,009	-1,630	-1,820	
	0,02	6,952	5,283	2,134	-0,125	-1,303	-1,866	-2,040	
	G_θ^*/p	6,984	5,269	2,115	-0,133	-1,309	-1,868	-2,038	
0,25	0,25	4,116	3,621	2,392	0,952	-0,284	-1,094	-1,375	
	0,15	4,295	3,722	2,340	0,793	-0,478	-1,287	-1,564	
	0,02	4,347	3,746	2,315	0,743	-0,531	-1,338	-1,613	
	G_θ^*/p	4,347	3,747	2,314	0,743	-0,531	-1,337	-1,613	
0,1	0,25	3,125	2,848	2,094	1,069	0,051	-0,691	-0,962	
	0,15	3,139	2,853	2,073	1,018	-0,028	-0,787	-1,064	
	0,02	3,152	2,862	2,072	1,001	-0,062	-0,835	-1,117	
	G_θ^*/p	3,134	2,846	2,061	0,995	-0,063	-0,833	-1,113	

Таблица 2

Значения напряжений σ_θ/N

ϵ_1	δ	θ°							
		0	15	30	45	60	75	90	
0,35	0,25	0,725	0,818	1,000	1,101	1,079	1,010	0,976	
	0,15	0,729	0,991	1,421	1,594	1,512	1,370	1,308	
	0,02	1,000	1,567	2,402	2,674	2,498	2,243	2,135	
	G_θ^*/N	1,107	1,717	2,634	2,937	2,743	2,463	2,343	
0,25	0,25	0,589	0,634	0,732	0,816	0,854	0,860	0,858	
	0,15	0,713	0,784	0,934	1,052	1,098	1,098	1,092	
	0,02	1,011	1,121	1,348	1,523	1,586	1,582	1,572	
	G_θ^*/N	1,079	1,195	1,438	1,624	1,691	1,687	1,676	

де C_1^* - стала, яка не впливає на напружений стан смуги; $\eta = y/r_1$ - безрозмірна величина.

Шукані коефіцієнти γ_k , α_k , b_k , d_k , β_k , крім системи /5/, повинні задовольняти співвідношення /7/ в усіх точках границі. Аналогічно [2] будемо задовольняти його лише в деяких точках контура L_1 , в яких виявляється найбільший вплив отвору на величину напружень.

Знайшовши невідомі сталі, напруження у смугі визначаються за відомими співвідношеннями Колосова-Мусхелішвілі, а нормальні напруження у поперечному перерізі кільця обчислюються за формулою

$$\sigma = E^* \left[\frac{1}{r} \gamma_0 + 2 \frac{r_0 - r + r_c}{r(r_0 + r_c)} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} (1 - k^2) \gamma_k \cos k\theta \right]. \quad /8/$$

Для числового прикладу взято мідну пластинку і сталіє кільце прямокутного поперечного перерізу $2h^* \times b$ з такими пружними і геометричними характеристиками [3]:

$$\mu = 4,34 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \quad E^* = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2; \quad \delta = b/r_1; \\ \gamma = h^*/h_1 = 1; \quad \nu = 0,3; \quad \chi = 2,08.$$

Числові значення кільцевих напружень σ_θ , що діють у смугі поблизу лінії контакту з кільцем на площинах, перпендикулярних до контура L , наведені в таблицях. У табл.1 наведені значення напружень σ_θ , коли смуга розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності p , у табл.2 - коли кільце знаходиться під дією зусиль N , прикладених на контурі $r = r_2$ / $p = 0$ /. Через σ_θ^* позначені напруження у смугі без кільця [4,2]. Розрахунки проведені на ЕОМ "Минск-32".

Список літератури: І. К а л о с р о в С. А., К о с м о д а - м і а н с ь к и й О. С. Наближений метод визначення напруженого стану полоси з круговим отвором. - ДАН УРСР, 1972, № 1. 2. К а л о с р о в С. А. Концентрація напружень в полосе з круговим отвором. - "Механіка твердого тела", 1974, № 6. 3. М а р т и н о в и ч Т. Л., З в а р и ч М. К. Упруге равновесие пластинки с двумя круговыми отверстиями, в которые впрысsovаны замкнутые стержни. - В об.: Математические методы и физико-механические поля. К., "Наукова думка", 1975, вып. I. 4. М и р о н е н к о Н. И. О равновесии бесконечной полоси с круговым отверстием. - "Прикладная механика", 1972, т. 8, № 1. 5. С а в и н Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. К., "Наукова думка", 1968. 6. Żelisko T. Stresses Induced by Central Bending in a Long Beam Containing a Circular Annular Inclusion. - "Bull. Polon. Sci. sér. sci. techn.", 1969, т. 17, № 8. 7. Żelisko T. Transvers Flexure of the Strip Containing an Infinite Double Row of Circular Holes. - "Bull. Polon. Sci. sér. techn.", 1969, т. 17, № 9.

УДК 539.370

В. С. Щукін

ЗГІН КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ З ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНО ПРУЖНЕ КІЛЬЦЕ

Нехай пружна анізотропна балка-пластинка шириною $2h_0$, товщиною $2h$ та довжиною l , нерухомо затиснута одним кінцем і згинається в своїй площині нормальним навантаженням q , розподіленим за лінійним законом. У пластинці на відстані a від затиснутого кінця є круговий отвір радіуса r_0 , в який впредсовано кільце постійного поперечного перерізу, симетричного відносно серединної площини пластинки /рис. 1-4/. При цьому припускається, що контакт між кільцем і пластинкою здійснюється вздовж усього контуру до і після деформації. Тертям на лінії контакту нехтуємо.

Визначення напруженого стану в контактуючих тілах зводиться до знаходження компонентів деформації e_0 , θ_0 та функцій $\Phi_j(z_j)$ / $j = 1, 2$ / комплексних змінних $z_j = x + \mu_j y$, які задовольняють граничні умови в інтегральній формі [2]

$$\int_{L_1} F_1(t) \operatorname{Re} dU = \int_{L_1} F_1(t) d[u_m + \varepsilon^*(t)] ;$$

/1/