

Список літератури: І. Калосров С.А., Космодаміанський О.С. Наближений метод визначення напруженого стану полоси з круговим отвором. - ДАН УРСР, 1972, № 1. 2. Калосров С.А. Концентрація напружень в полосі з круговим отвором. - "Механіка твердого тела", 1974, № 6. 3. Мартинович Т.Л., Зварич М.К. Упруге равновесие пластинки с двумя круговыми отверстиями, в которые впрысsovаны замкнутые стержни. - В об.: Математические методы и физико-механические поля. К., "Наукова думка", 1975, вып. I. 4. Мироненко Н.И. О равновесии бесконечной полосы с круговым отверстием. - "Прикладная механика", 1972, т. 8, № 1. 5. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. К., "Наукова думка", 1968. 6. Żelisko T. Stresses Induced by Central Bending in a Long Beam Containing a Circular Annular Inclusion. - "Bull. Polon. Sci. sér. sci. techn.", 1969, т. 17, № 8. 7. Żelisko T. Transvers Flexure of the Strip Containing an Infinite Double Row of Circular Holes. - "Bull. Polon. Sci. sér. techn.", 1969, т. 17, № 9.

УДК 539.370

В.С. Щукін

ЗГИН КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ З ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНО ПРУЖНЕ КІЛЬЦЕ

Нехай пружна анізотропна балка-пластинка шириною $2h_0$, товщиною $2h$ та довжиною l , нерухомо затиснута одним кінцем і згинається в своїй площині нормальним навантаженням q , розподі-
леним за лінійним законом. У пластинці на відстані a від затисну-
того кінця є круговий отвір радіуса r_0 , в який впредсовано кільце
постійного поперечного перерізу, симетричного відносно серединної
площини пластинки /рис. 1-4/. При цьому припускається, що контакт
між кільцем і пластинкою здійснюється вздовж усього контуру до
і після деформації. Тертям на лінії контакту нехтуємо.

Визначення напруженого стану в контактуючих тілах зводиться
до знаходження компонентів деформації e_0 , θ_0 та функцій $\Phi_j(z_j)$
/ $j = 1, 2$ / комплексних змінних $z_j = x + \mu_j y$, які задовольняють
граничні умови в інтегральній формі [2]

$$\int_{L_1} F_1(t) \operatorname{Re} dU = \int_{L_1} F_1(t) d[u_m + \varepsilon^*(t)] ;$$

/1/

$$\int_{L_1} \overline{F_1(t)} dV = \int_{L_1} N_1^{(1)} \overline{F_1(t)} dt; \quad \int_{L_1} F_1(t) dV = \int_{L_1} F_1(t) N_1^{(1)} dt;$$

$$U = i \int_{L_1} \sum_{j=1}^n [(\rho_j + i q_j) \Phi_j(z_j) + (\bar{\rho}_j + i \bar{q}_j) \overline{\Phi_j(z_j)}];$$

/2/

$$V = \sum_{j=1}^n [(1 + i \mu_j) \Phi_j(z_j) + (1 + i \bar{\mu}_j) \overline{\Phi_j(z_j)}],$$

де μ_j , ρ_j , q_j - постійні величини, що залежать від пружних властивостей матеріалу пластинки [1]; t - афікс точки контура отвору L_1 ; $t = dt/ds$; $F_1(z)$ - довільна функція змінної $z = x + iy$, голоморфна в області пластинки.

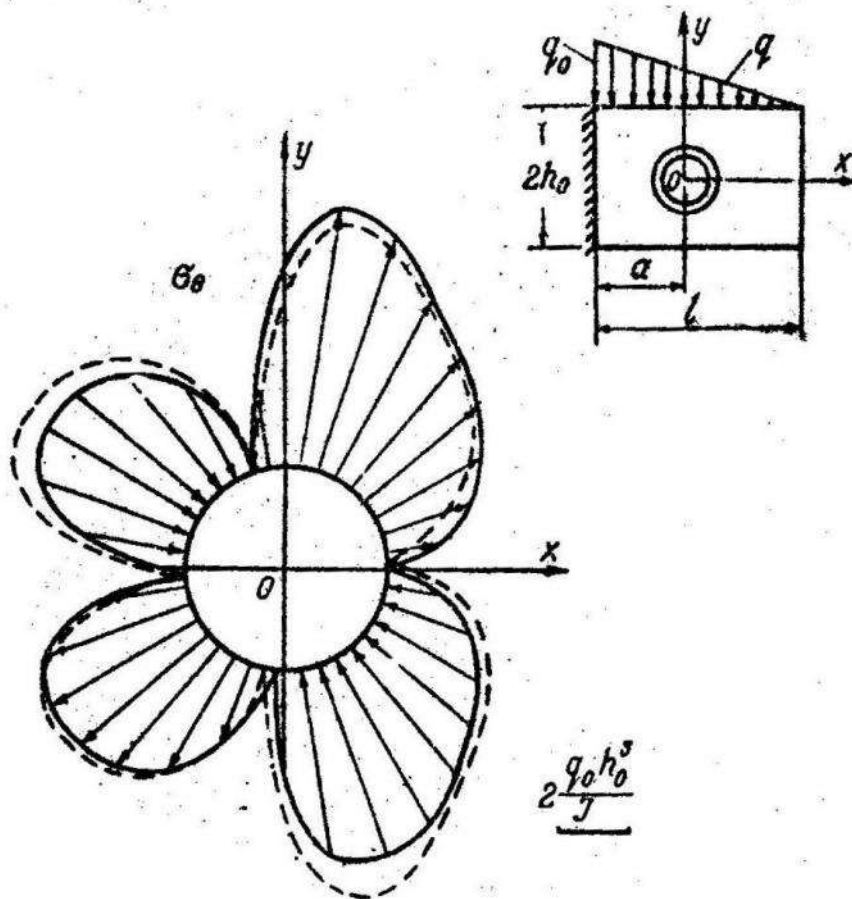


Рис. I.

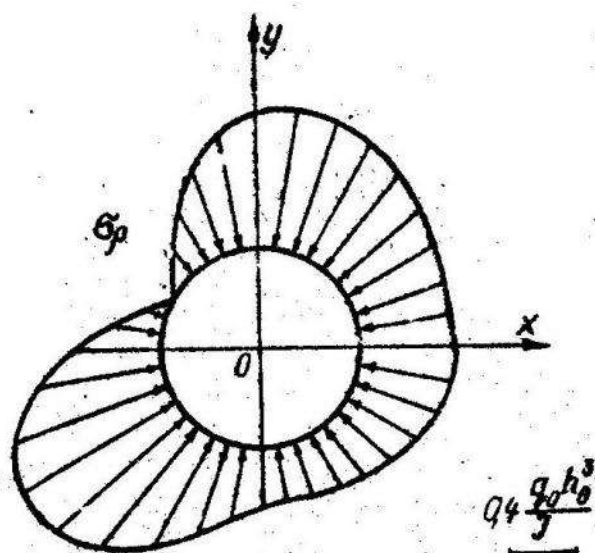


Рис. 2.

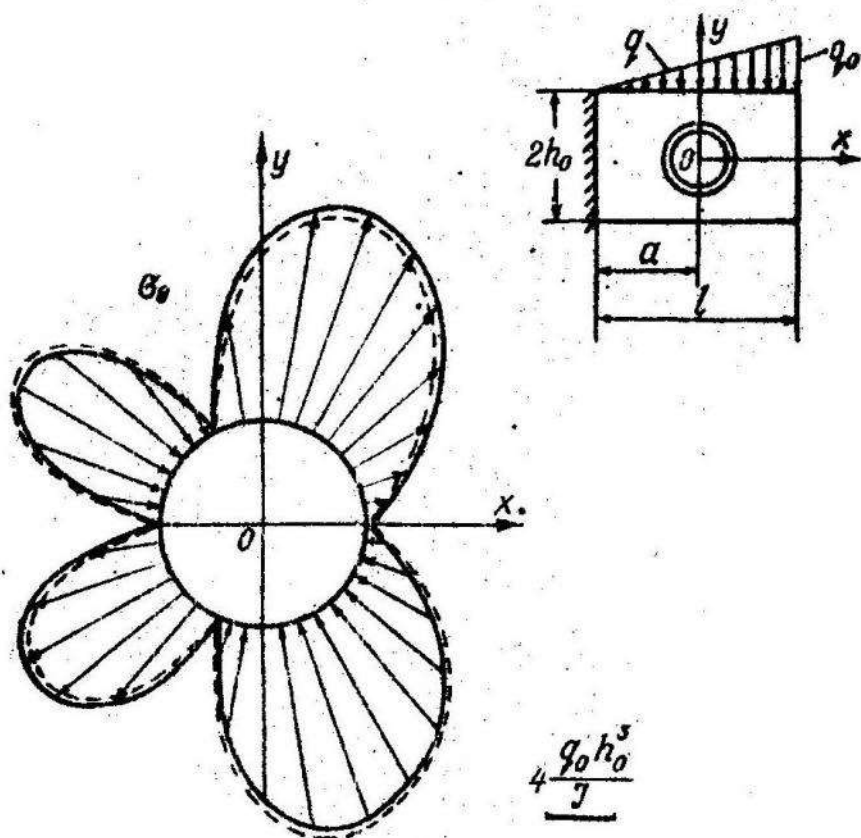


Рис. 3.

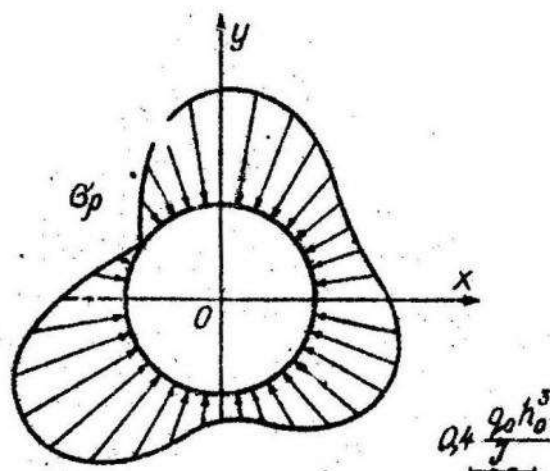


Рис. 4

Нормальна складова переміщення u_{in} контурних точок стержня виражається через відносне подовження e_0 нульової /для чистого згину/ лінії L_0 і кут повороту θ_0 нормального перерізу стержня формулою

$$u_{in} = \operatorname{Re} \left\{ i \bar{t} \int_{t_0}^t \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + t(r_1 - r_0) \frac{d\theta}{dt} + i\theta_0 \right] dt + c \bar{t} \right\}, \quad /3/$$

де c - стала інтегрування.

Внутрішні зусилля та нормальне напруження у перерізі стержня визначаються за формулами / 2 /.

Прийmemo

$$z = \omega(\zeta) = r_1 \zeta; \quad t = r_1 G; \quad G = e^{i\theta}, \quad /4/$$

тоді функції

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = \frac{r_1}{2} \left[(1 - i\mu_j) \zeta_j + (1 + i\mu_j) \frac{1}{\zeta_j} \right], \quad (j=1,2), \quad /5/$$

будуть конформно переводити відповідні області зміни z_1 і z_2 на зовнішність одиничного круга γ , причому для контурних точок γ змінні ζ , ζ_1 і ζ_2 набувають одного і того самого значення $G = e^{i\theta}$.

Компоненти деформації стержня e_o і θ_o на J подамо у формі комплексних рядів Фур'є

$$e_o = d_o + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sigma^k; \quad \theta_o = \beta_o + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k. \quad /6/$$

Нормальне напруження $N_i^{(i)}$ на J згідно з [2], враховуючи /6/, визначається за формулою

$$N_i^{(i)} = \frac{g}{2hr_i} \left[d_o + \sum_{k=2}^{\infty} (1-k^2) (d_k \sigma^k + \bar{d}_k \sigma^{-k}) \right]. \quad /7/$$

Довільну функцію та комплексні потенціали виберемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_1(\zeta_1) &= \sum_{p=1}^5 a_p \zeta_1^p + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta_1^{-k}; \\ \Phi_2(\zeta_2) &= \sum_{p=1}^5 b_p \zeta_2^p + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta_2^{-k}; \\ F_1(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \zeta^{-n}. \end{aligned} \quad /8/$$

Коефіцієнти a_p і b_p залежать від виду навантаження пластинки.

Вносимо розклади /6/-/8/ в граничні умови /I/ з врахуванням /2/-/5/ і виконаємо інтегрування вздовж контура J , враховуючи при цьому, що всі E_i , крім E_n , дорівнюють нулю. У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів A_k , B_k , d_k і β_k .

Для ортотропної пластинки, коли осі вибраної системи координат /рис. I-4/ паралельні головним напрямкам пружності, система має вигляд $\mu_1 = i\beta_1^*$; $\mu_2 = i\beta_2^*$ /:

$$r_o d_o - (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) A'_1 - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) B'_1 = (p_1 + iq_1) a'_1 + (p_2 + iq_2) b'_1 - \epsilon^*;$$

$$-(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{A}_2 - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{B}_2 = (p_1 + iq_1) a_2 + (p_2 + iq_2) b_2;$$

$$\frac{2r_o}{1-(n-1)^2} \left(1 + \frac{r_2}{r_o} \right) d_{n-1} - (p_1 + iq_1) \bar{A}_{n-2} - (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{A}_n -$$

$$-(\rho_2 + i q_2) \bar{B}_{n-2} - (\bar{\rho}_2 + i \bar{q}_2) \bar{B}_n = (\rho_1 + i q_1) a_n \delta_{n,5} + (\bar{\rho}_1 + i \bar{q}_1) a_{n-2} \delta_{n-2,5}^+ \quad /9/$$

$$+ (\rho_2 + i q_2) b_n \delta_{n,5} + (\bar{\rho}_2 + i \bar{q}_2) b_{n-2} \delta_{n-2,5} ;$$

$$\frac{g}{2h} n \alpha_{n-1} - (1 - \beta_1^*) \bar{A}_{n-2} - (1 - \beta_2^*) \bar{B}_{n-2} = (1 + \beta_1^*) a_{n-2} \delta_{n-2,5} + (1 + \beta_2^*) b_{n-2} \delta_{n-2,5} ;$$

$$\frac{g}{2h} \alpha_0 - (1 + \beta_1^*) \bar{A}_1 - (1 + \beta_2^*) \bar{B}_1 = (1 - \beta_1^*) a_1 + (1 - \beta_2^*) b_1 ;$$

$$-(1 + \beta_1^*) \bar{A}_2 - (1 + \beta_2^*) \bar{B}_2 = (1 - \beta_1^*) a_2 + (1 - \beta_2^*) b_2 ;$$

$$\frac{g}{2h} (2-n) \alpha_{n-1} - (1 + \beta_1^*) \bar{A}_n - (1 + \beta_2^*) \bar{B}_n = (1 - \beta_1^*) a_n \delta_{n,5} + (1 - \beta_2^*) b_n \delta_{n,5} ;$$

$$r_0 \alpha_{n-2} = -i \eta_c (n-2) \beta_{n-2} , \quad (n=3, 4, 5, \dots) ,$$

де $\delta_{n,m}$ - символ Кронекера; $q = E^* F$.

Якщо навантаження розподілене за лінійним законом

$q = (q_0/l)[(l-a)-x]$, то коефіцієнти a_p мають такий вигляд:

$$a'_1 = \frac{4}{3} \frac{K}{L} \beta_2^{*2} Q ; \quad a'_2 = -\frac{1}{3} \frac{K}{L} \beta_1^* \beta_2^{*2} Q ;$$

$$a''_1 = - \left\{ \frac{1}{32} L \left[\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{l}{h_0}\right)^2 - \frac{\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2}}{30} \right] + \frac{K(1 + \beta_1^*)(1 - \beta_1^*)^2}{48} \left(\frac{l}{h_0}\right)^4 \right\} \quad /10/$$

$$+ \frac{K(1 - \beta_1^*)}{4} \left(\frac{l}{h_0}\right)^2 \left[\left(\frac{l}{h_0}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + \frac{\beta_1^{*2} - 4\beta_2^{*2}}{5} \right] \frac{h_0}{l} Q ;$$

$$a''_2 = K \left(1 - \frac{a}{l}\right) \frac{l}{h_0} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{l}{h_0}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + \frac{\beta_1^{*2} - 4\beta_2^{*2}}{10} + \frac{1 - \beta_1^{*2}}{12} \left(\frac{l}{h_0}\right)^2 \right] Q ;$$

$$a_3' = -\frac{K(1+\beta_1^*)}{12} \frac{r_1^2}{h_0^2} \left[\left(\frac{l}{h_0} \right)^2 \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 + \frac{\beta_1^{*2} - 4\beta_2^{*2}}{5} + \frac{1 - \beta_1^{*2}}{8} \left(\frac{r_1}{h_0} \right)^2 \right] Q;$$

$$a_4' = \frac{K(1+\beta_1^*)^2}{48} \left(\frac{r_1}{h_0} \right)^3 \left(1 - \frac{a}{l} \right) Q; \quad a_5' = -\frac{K(1+\beta_1^*)^3}{480} \frac{r_1^4}{h_0^3 l} Q;$$

$$a_3' = a_4' = a_5' = 0; \quad a_p = a_p' + i a_p''; \quad b_p = b_p' + i b_p'',$$

де

$$K = \frac{(1+\beta_1^*)^2}{16\beta_1^*(\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2})}; \quad L = \frac{1+\beta_1^*}{\beta_1^*}; \quad Q = r_1 \frac{q_0 h_0^3}{J};$$

J - момент інерції перерізу пластинки; q_0 - найбільше значення навантаження q . Коефіцієнти b_p визначаються з коефіцієнтів /Ю/ заміною β_1^* на β_2^* .

Для числового прикладу за ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КАСТ-В /ГОСТ 10292-62/ [3] та кільце прямокутного поперечного перерізу $2h^* \times b$ з дюралюмінію при таких значеннях пружних сталих матеріалів та геометричних параметрів: $E_1 = 2 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_1 = 0,158$;

$$\nu_2 = 0,098; \quad G = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad E^* = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad h^*/h = 1; \quad b/r_1 = 0,2; \quad l/a = 4;$$

$$l/h_0 = 10; \quad r_1/h_0 = 0,25.$$

На рис. 1-2 побудовані графіки розподілу кільцевих σ_θ та радіальних σ_r напружень вздовж контура отвору в ортотропній консольній балці при згині її навантаженням, розподіленням за лінійним законом $q = (q_0/l)[(l-a)-x]$. Мінімальна величина посадки кільця знаходилася з умови $N_1^{(i)} \leq 0$ на L_1 .

Розв'язана також задача про пресову посадку кільця в круговий отвір ізотропної консольної балки, але через громіздкість формули тут не наводимо. Для числового прикладу взята мідна пластинка та сталеве кільце з такими пружними сталими: $\mu = 4 \cdot 10^{10}$ Па; $E^* = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,28$. Геометричні розміри зберігалися попередні.

На рис.3-4 показані графіки розподілу напружень σ_θ і σ_ρ вздовж контура отвору. Балка згинається у своїй площині навантаженням, яке розподілене за лінійним законом $q = q_0[(a+x)/l]$. Відхід кільця від пластинки відбувається в обох випадках при $\theta^\circ = 150^\circ$. Штриховою лінією зображені графіки розподілу напружень σ_θ при відсутності кільця.

Список літератури: 1. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. М, ГТИ, 1957. 2. М а р т и н о в и ч Т.Л., З в а р и ч М.К., Щ у к и н В.С. О напряженном состоянии анизотропной пластинки, в криволинейное отверстие которой впрессован замкнутый стержень. - "Механика полимеров", 1976, № 2, с.304-309. 3. Физические и механические свойства стеклопластиков. Справочник. Рига, "Зинатне", 1969, 266 с.