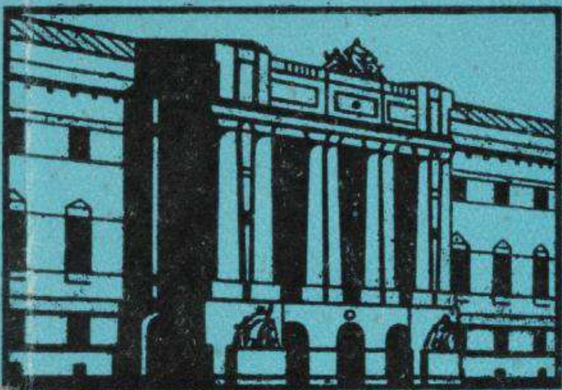
ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 13



ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1978

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Випуск 13

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1978

517.2
Л 89

УДК 513

Теоретические и прикладные вопросы математического анализа, вып. 13, Вестн. Львов. ун-та, Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 132 /на украинском языке/.

В Вестнике помещены статьи по функциональному анализу, алгебре, теории вероятностей, дифференциальным и интегральным уравнениям, теории упругости и вычислительной математике.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Списки лит. в конце статей.

Відповідальний за випуск доц. Є.М.П а р а с ю к

Адреса редакційної колегії: 290000, м.Львів, вул.Університетська,1, кафедра механіки.

Редакція науково-технічної та природничої літератури

В $\frac{20200-001}{М225/04/-78}$

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.913

К.С. Костенко, канд. фіз.-мат. наук

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)} + p_1(x)y'' + (p_2(x) + r(x))y' + p_3(x)y = 0 \qquad /1/$$

доведена така теорема:

Теорема. Нехай у рівнянні /1/ $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x) = \lambda z^{-3}(x) \neq 0$ неперервно диференційовані функції відповідно один, два і три рази на інтервалі $x_0 \leq x < \infty$, а також

$$A(x) = z^{-2}(x)\left(\mu - 5z''(x)z(x) + \tfrac{5}{2}z'^2(x)\right), \quad B(x) = \lambda z^{-3}(x) + A'(x),$$

$$C(x) = \left(\nu - \tfrac{3}{2}\lambda z'(x)\right)z^{-4}(x) + 0{,}3A''(x) + (0{,}3A(x))^2,$$

$\pm\beta_1$ – дійсні корені рівняння $\beta^6 + 2\mu\beta^4 + (\mu^2 - 4\nu)\beta^2 - \lambda^2 = 0$, де μ, λ, ν – дійсні сталі, причому $a_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2} + \mu + \frac{\lambda}{\beta_1}\right) = 0$, $-a_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2} + \mu - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) < 0$. Тоді за умов

$$z(x) > 0, \ \lim_{x\to\infty} \varphi(x, x_0) = \infty, \ \int_{x_0}^{\infty} b_1(x)\,dx < \infty, \ \lim_{x\to\infty} \mathcal{P}_i(x) z^2(x) = 0 \quad (i = 3, 4),$$

або

$$z(x) < 0, \ \lim_{x\to\infty} \varphi(x, x_0) = -\infty, \ \int_{x_0}^{\infty} b_2(x)\,dx < \infty, \ \lim_{x\to\infty} \mathcal{P}_i(x) z^2(x) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

де

$$\mathcal{P}_1(x) = a_2\Big[\left(6\beta_1 z''(x)z(x) + 3\beta_1 z'^2(x) - 4a_2^2 z'(x) + \beta_1(2a_2^2 - \beta_1^2)\right)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ 4z(x)(3\beta_1 z'(x) - a_2^2)\left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\right) + 4\beta_1 z^2(x)\left(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_2(x) = a_2(a_2^2 - \beta_1^2)\Big[\left(3z''(x)z(x) + \tfrac{3}{2}z'^2(x) - 2\beta_1 z'(x) + \tfrac{1}{2}\beta_1^2\right)(A(x) - p_1(x)) + 2z(x)(3z'(x) -$$

$$- \beta_1)\left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\right) + 2z^2(x)\left(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_3(x) = (a_2 + \beta_1)^2\Big[\left(\tfrac{3}{2}z''(x)z(x) + \tfrac{3}{4}z'^2(x) + (\beta_1 - 2a_2)z'(x) + \left(\tfrac{\beta_1}{2} - a_2\right)^2\right)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+\mathfrak{z}(x)\left(3\mathfrak{z}'(x)+\beta_1-2a_2\right)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\right)+\mathfrak{z}^2(x)\left(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_4(x)=(a_2-\beta_1)^2\Big[\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}''(x)\mathfrak{z}(x)+\frac{3}{4}\mathfrak{z}'^2(x)+(\beta_1+2a_2)\mathfrak{z}'(x)+\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)^2\right)\left(A(x)-p_1(x)\right)+$$

$$+\mathfrak{z}(x)\left(3\mathfrak{z}'(x)+\beta_1+2a_2\right)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2}-p_1'(x)\right)+\mathfrak{z}^2(x)\left(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$b_1(x)=4\mathfrak{z}(x)\max_x\left[|\mathcal{P}_1(x)|,|\mathcal{P}_2(x)\varphi(x,x_0)|,|\mathcal{P}_3(x)|,|\mathcal{P}_4(x)|\right];$$

$$b_2(x)=4|\mathfrak{z}(x)|\max_x\left[|\mathcal{P}_1(x)|,|\mathcal{P}_2(x)|,|\mathcal{P}_3(x)|,|\mathcal{P}_4(x)|\right];$$

$$W=-2a_2(\beta_1^2-a_2^2)^2;\quad \varphi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\mathfrak{z}^{-1}(t)\,dt,$$

рівняння /I/ має фундаментальну систему розв"язків, асимптотичне зображення яких за $x\to\infty$ дають формули:

$$y_1(x,x_0)=\mathfrak{z}^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\frac{\beta_1}{2}\varphi(x,x_0)\right](1+o(1)),\qquad x\to\infty; \qquad /2/$$

$$y_2(x,x_0)=\mathfrak{z}^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\frac{\beta_1}{2}\varphi(x,x_0)\right]\varphi(x,x_0)(1+o(1)),\quad x\to\infty; \qquad /3/$$

$$y_3(x,x_0)=\mathfrak{z}^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right](1+o(1)),\quad x\to\infty; \qquad /4/$$

$$y_4(x,x_0)=\mathfrak{z}^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right](1+o(1)),\quad x\to\infty. \qquad /5/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв"язків одержуємо формальними диференціюваннями головних частин формул /2/ - /5/.

Те ж саме наявне для похідних другого і третього порядку цих розв"язків за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty}\left(A(x)-p_1(x)\right)\mathfrak{z}^2(x)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(p_1'(x)-r(x)\right)\mathfrak{z}^3(x)=0.$$

Список літератури: I. К о с т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. - "Дифференциальные уравнения", 1974, т. 10, № 10. 2. П а в л ю к I. A. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

УДК 517.946

М.С.Волошина, канд.фіз.-мат.наук, Г.С.Гупало, канд.фіз.-мат.наук,
Г.П.Лопушанська, канд.фіз.-мат.наук

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИЛЬНО ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ БАГАТОЗВ"ЯЗНОЇ ОБЛАСТІ

У роботі В.Д.Купрадзе /4/ для тривимірного рівняння Лапласа і в роботі М.С.Волошиної /1/ для сильно еліптичної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами у багатозв"язній області побудовано розв"язок задачі Діріхле у вигляді комбінованого потенціалу /мікст-потенціалу/ подвійного і простого шарів з невідомою густиною. Важливо, що для визначення густини отримують інтегральне рівняння /систему інтегральних рівнянь у /1//, яке розв"язується за першою теоремою Фредгольма.

У цій статті для самоспряженої системи рівнянь Ейлера

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \qquad /1/$$

що відповідає основній варіаційній задачі для додатно визначеного функціоналу

$$\int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} A_{kl} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\, dx \geqslant \gamma^2 \int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\, dx ,$$

де $A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ /'– транспонування/ – постійні квадратні матриці порядку p ; V – деяка область в R^n , $n \geqslant 3$; γ – дійсне число, розглядається задача Діріхле, коли на границі області задана узагальнена вектор-функція. Для рівняння Лапласа задача в такій постановці розглядалась у роботі [2].

Нехай Ω - область в R^n, $n \geqslant 3$, обмежена замкненими $n-1$ - вимірними поверхнями $S_0, S_1, \ldots, S_m$ класу C^∞, які не перетинають одна одну, причому S_0 містить в собі всі інші поверхні / S_0 може бути відсутньою/. Позначимо через $S=\bigcup_{i=0}^{m} S_i$ повну границю області Ω. Вважатимемо, що існує таке додатне число ε_1, коли поверхня S_ε / $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ /, яка знаходиться на відстані ε по внутрішній нормалі в кожній точці від поверхні S, не має самоперетинів. Через $[D(S)]^p$ позначимо простір нескінченно диференційованих /основних/ вектор-функцій $\varphi(y)=(\varphi_1(y),\ldots,\varphi_p(y))$ на S, через $[D'(S)]^p$ - простір лінійних неперервних функціоналів над $[D(S)]^p$ /узагальнених вектор-функцій $F=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_p\end{pmatrix}$ /, через $<\varphi,F>$ - дію $F\in[D'(S)]^p$ на $\varphi\in[D(S)]^p$. Згідно з роботою [3],

$$<\varphi,F>=\sum_{i=1}^{p}<\varphi_i,F_i>,\ \varphi_i\in D(S),\quad F_i\in D'(S).$$

<u>Постановка задачі</u>. Нехай $F\in[D'(S)]^p$. В області Ω знайти розв"язок $u(x)$ системи /I/, який на границі S набуває узагальнених граничних значень F, тобто

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)u(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=<\varphi,F> \qquad /2/$$

для кожної $\varphi\in[D(S)]^p$, і якщо S_0 відсутня, то задовольняє на безмежності умову $u(x)=O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$.

Тут $\varphi(x_\varepsilon)=\varphi(y)$, якщо $x_\varepsilon=y+\varepsilon\nu(y)$, $y\in S$, $\nu(y)$ - орт внутрішньої нормалі до поверхні S в точці y.

Нехай $K(x,y)=G_0(x,y)+\omega_0(x,y)$ ядро аналога змішаного потенціалу подвійного і простого шарів /мікст-потенціалу/

$$v(x)=\int_S\mu(y)\,K(x,y)\,dS,$$

де $\omega_o(x,y)$ – фундаментальна матриця системи /I/; $G_o(x,y)$ – ядро інтеграла типу потенціала задачі Діріхле для системи /I/. Використовуючи результати робіт [1,2], можна довести такі леми:

Лема I. Для кожної $\varphi\in[D(S)]^p$ рівномірно відносно $y\in S$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)K(x_\varepsilon,y)dS_\varepsilon=\varphi(y)+\int_S\varphi(x)K(x,y)dS.$$

Лема 2. Оператор $(B\varphi)(y)\equiv\int_S\varphi(x)K(x,y)dS$ діє в $[D(S)]^p$

Лема 3. Нехай $\varphi\in[D(S)]^p$, $F\in[D'(S)]^p$, $f(x_\varepsilon,y)$ – матриця з елементами із $\overset{\infty}{C}(S_\varepsilon\times S)$, тоді

$$\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)<f(x_\varepsilon,y),F>dS_\varepsilon=<\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)f(x_\varepsilon,y)dS_\varepsilon,F>$$

Лема 4. Перетворення

$$<g,T>=<\varphi_g,F>, \qquad /3/$$

де $g\in[D(S)]^p$, φ_g – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi(y)+\int_S\varphi(x)K(x,y)dS=g(y), \qquad /4/$$

визначає ізоморфізм простору $[D'(S)]^p$ на себе. Обернене перетворення визначається так:

$$<\varphi,F>=<\varphi(y)+\int_S\varphi(x)K(x,y)dS,T>$$

для кожної $\varphi\in[D(S)]^p$.

Твердження леми 4 випливає із леми 2 і єдиності розв"язку системи інтегральних рівнянь /4/ [1].

Теорема. Нехай $F\in[D'(S)]^p$ — узагальнена вектор-функція T, визначена згідно з /3/ і /4/, тоді вектор-функція

$$u(x)=<K(x,y),T>, \quad x\in\Omega,\ y\in S,$$

є розв"язком розглядуваної узагальненої задачі Діріхле.

Доведення випливає із лем I,3,4.

Все сказане вище переноситься на випадок однорідної системи другого порядку зі змінними коефіцієнтами при умові існування для неї фундаментальної матриці в усьому нескінченному дійсному просторі R^n

Список літератури: I. В о л о ш и н а М.С. Про задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичної системи рівнянь в багатозв"язній області. - "Доп. АН УРСР", сер. А, 1972, № II. 2. В о л о ш и н а М.С., Г у п а л о Г.-В.С. Розв"язок узагальненої задачі Діріхле для багатозв"язної області. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1975, вип. IO. 3. Г е л ь ф а н д И.М., Ш и л о в Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958. 4. К у п р а д з е В.Д. К решению задачи Дирихле для многосвязной области. - "Сообщения Грузинского филиала АН СССР", 1940, № I.

УДК 539. 3; 534.I

В.Г.Костенко, канд.фіз.-мат.наук

ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ КУСКОВО-ГЛАДКОЇ ПРУЖНОЇ ОБОЛОНКИ З АКУСТИЧНИМИ СЕРЕДОВИЩАМИ

За допомогою основної теореми енергії теорії пружності для пружної оболонки та спеціальних інтегралів по областях, заповнених акустичними середовищами, у роботі [1] доведено єдиність розв"язку задачі про взаємодію гладкої ізотропної пружної оболонки з акустичними середовищами.

У кутових точках і на ребрах взаємодіючої з акустичними середовищами кусково-гладкої пружної оболонки напруження, а також похідні зміщень точок акустичних середовищ можуть мати свої особливості. Тому необхідно визначити умови, за яких основна теорема енергії теорії пружності та спеціальні інтеграли в акустичних середовищах зберігають такий же вигляд, як і для гладкого випадку.

Не зменшуючи загальності, припустимо, для простоти /тут всюди приймаються позначення роботи [1] /, що на частині $S_к$ межі $S=S_1 \cup S_2$ оболонки V знаходиться лише ребро $l_к$ та кутова точка $O_к$ /к = 1,2/. Нехай d – мінімум відстаней між точками S_1 та S_2. Розглянемо тоді циліндр $Ц_к$ з поверхнею $П_к$, криволінійною віссю $l_к$ і радіусом ортогонального до $l_к$ перерізу $r_к < \frac{d}{4}$, а також кулю $Ш_к$ з поверхнею $C_к$, центром $O_к$ і радіусом $\rho_к < \frac{d}{2}$ /к = 1,2 /. Припускаючи, що початок системи координат знаходиться в акустичному середовищі K, опишемо сферу S_R достатньо великого радіуса R з центром у початку координат і розглянемо області $\Omega_R^* = \Omega_R \setminus Ц_1 \cup Ш_1$, $V^* = V \setminus Ц_1 \cup Ш_1 \cup Ц_2 \cup Ш_2$, $K^* = K \setminus Ц_2 \cup Ш_2$. Об"єднання всюди теоретико-множинні. У замкнутій області V^* напруження σ_{ij} та $W_i = \frac{\partial U_i}{\partial t}$ не мають особливостей. У зв"язку з цим основна теорема енергії теорії пружності [2] для V^* набере того ж вигляду, що й для гладких оболонок, бо в обох випадках використовується формула Остроградського, тобто

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V^*}\left\{ \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{3} W_i^2 + \mu\sum_{ij=1}^{3}\varepsilon_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}\right)^2\right\} dV^* = \tag{1}$$

$$= \iint\limits_{S_1^*}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\, dS_1^* - \iint\limits_{S_2^*}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\, dS_2^* + \iiint\limits_{V^*}\sum_{i=1}^{3} F_i W_i\, dV^*,$$

де $\mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ji}\cos(n, x_j)$, F_i – компоненти сил внутрішніх збудників коливань оболонки; n – зовнішня до S_1^* і внутрішня до S_2^* нормаль межі області V^*. При цьому $S_к^* \to S_к$, $V^* \to V$, якщо $r_к \to 0$, $\rho_к \to 0$.

Очевидно, для того щоб

$$\lim_{\substack{r_к \to 0 \\ \rho_к \to 0}} \iint\limits_{S_1^* \cup S_2^*}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\, dS^* = \iint\limits_{S_1 \cup S_2}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\, dS$$

достатньо встановити, що

$$\lim_{\substack{r_к \to 0 \\ \rho_к \to 0}} \iint\limits_{S_к^* \cap П_к \cup C_к}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\, dS^* = 0 \qquad (к = 1,2).$$

Розглянемо циліндричну систему координат з віссю l_κ та сферичну систему координат з початком в O_κ. Тоді

$$\Big|\iint\limits_{S_\kappa^*\cap\Pi_\kappa\cup C_\kappa}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\,dS^*\Big| \le \iint\limits_{S_\kappa^*\cap\Pi_\kappa}\sum_{i=1}^{3}|\mathcal{P}_i W_i|\,dS^* + \iint\limits_{S_\kappa^*\cap C_\kappa}\sum_{i=1}^{3}|\mathcal{P}_i W_i|\,dS^* =$$

$$= \int\limits_{l_\kappa^*} dl_\kappa\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sum_{i=1}^{3}\Big|\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ji}\cos(n,x_j)\Big||W_i|\,r_\kappa\,d\varphi + \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\int\limits_{\varphi_3}^{\varphi_4}\sum_{i=1}^{3}\Big|\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ji}\cos(n,x_j)\Big||W_i|\,\rho_\kappa^2\,d\varphi \xrightarrow[r_\kappa,\rho_\kappa\to 0]{} 0,$$

якщо у довільно малій околиці точок ребра $l_\kappa / l_\kappa^* \subset l_\kappa$, $r_\kappa > 0$, $0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi$ /

$$\lim_{r_\kappa\to 0}\sigma_{ji}\,r_\kappa = 0, \quad |W_i| \le c \qquad /2/$$

та в околиці кутової точки O_κ $/0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi, 0 \le \varphi_3, \varphi_4 \le 2\pi, \rho_\kappa > 0$ /

$$\lim_{\rho_\kappa\to 0}\sigma_{ji}\,\rho_\kappa^2 = 0, \quad |W_i| \le c \qquad /3/$$

/$\kappa = 1,2$; $i,j = 1,2,3$ /. Нехай умови /2/, /3/ виконуються і вектор функція $\vec F(F_1,F_2,F_3)$ інтегрована по області V. Переходячи тоді в /I/ до границі при $r_\kappa \to 0$ і $\rho_\kappa \to 0$, одержуємо основну теорему енергії кусково-гладкої пружної ізотропної оболонки в тому ж вигляді, що й для гладких оболонок

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\Big\{\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{3}W_i^2 + \mu\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}\Big)^2\Big\}dV = \iint\limits_{S_1}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\,dS_1 - \qquad /4/$$

$$- \iint\limits_{S_2}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{P}_i W_i\,dS_2 + \iiint\limits_V\sum_{i=1}^{3}F_i W_i\,dV.$$

Аналогічно доведено, що для функції $\psi(x,y,z,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ в Ω_κ, де φ – потенціал зміщень точок акустичного середовища Ω, наявна формула

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega_\kappa}\Big[\frac{1}{B^2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)^2 + \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)^2\Big]d\Omega = 2\iint\limits_{S_\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial r}dS_\kappa - 2\iint\limits_{S_1}\frac{\partial\psi}{\partial t}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\,dS_1, \qquad /5/$$

якщо в околиці точок ребра l_1

$$\lim_{r_1\to 0} r_1\frac{\partial\psi}{\partial r_1} = 0, \quad \Big|\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big| \le C \qquad /6/$$

та в околиці кутової точки O_1

$$\lim_{\rho_1\to 0}\rho_1^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1} = 0, \quad \Big|\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big| \le C. \qquad /7/$$

Те ж саме для функції $\chi(x,y,z,t)=\frac{\partial \mu}{\partial t}$ в K, де μ - потенціал змішень точок акустичного середовища K

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_K\Big[\frac{1}{\beta_2^2}\Big(\frac{\partial \chi}{\partial t}\Big)^2+\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\Big)^2\Big]dK=2\iint\limits_{S_2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\,dS_2\,, \qquad /8/$$

якщо

$$\lim_{r_2\to 0} r_2\frac{\partial \chi}{\partial r_2}=0, \qquad \Big|\frac{\partial \chi}{\partial t}\Big|\le C \qquad /9/$$

в околиці точок ребра l_2 та

$$\lim_{\rho_2\to 0} \rho_2^2\frac{\partial \chi}{\partial \rho_2}=0, \qquad \Big|\frac{\partial \chi}{\partial t}\Big|\le C \qquad /10/$$

в околиці кутової точки O_2.

Отже, для кусково-гладких оболонок і акустичних середовищ з умовами /2/, /3/, /6/, /7/, /9/, /10/ єдність розв"язку задачі про їх взаємодію випливає з формул /4/, /5/, /8/ так само, як і в роботі [1].

Список літератури: 1. К о с т е н к о В.Г. Единственность решения задачи о взаимодействии упругой оболочки с акустическими средами. - "Математические методы и физико-механические поля", 1977, вып. 6 . 2. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. М., "Мир", 1975.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, канд.физ.-мат.наук,
О.О.Веселовська

ЗАГАЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ІЗ ЗАДАНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ

Розглянемо загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$Lu=A(x,y)r+2B(x,y)s+C(x,y)t+K(x,y)p+E(x,y)q+Q(x,y)u=0 \quad /1/$$

/p, q, r, s, t – позначення Монжа частинних похідних I-ї 2-го порядків від функції $U(x,y)$ /і виділимо з нього ті рівняння, які залишаються інваріантними відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf = -y^3 \frac{\partial f}{\partial x} + x^3 \frac{\partial f}{\partial y} . \qquad /2/$$

Траєкторії цієї групи є криві $x^4 + y^4 = a^4$.

Прирівнюючи в тотожності [2,5]

$$\begin{aligned} U''Lu = -y^3\Big\{ -\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\left[2Bs + Ct + Kp + Eq + Qu\right] + 2\frac{\partial B}{\partial x}s + \\ + \frac{\partial C}{\partial x}t + \frac{\partial K}{\partial x}p + \frac{\partial E}{\partial x}q + \frac{\partial Q}{\partial x}u\Big\} + x^3\Big\{ -\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\left[2Bs + \right. \\ \left. + Ct + Kp + Eq + Qu\right] + 2\frac{\partial B}{\partial y}s + \frac{\partial C}{\partial y}t + \frac{\partial K}{\partial y}p + \\ + \frac{\partial E}{\partial y}q + \frac{\partial Q}{\partial y}u\Big\} - 3x^2Kq + 3y^2Ep - 6x^2As - 6xAq + 2B\Big\{-3x^2t - \\ - \frac{1}{A}3y^2\left[2Bs + Ct + Kp + Eq + Qu\right]\Big\} + C\left[6yp + 6y^2s\right] \equiv 0 \end{aligned} \qquad /3/$$

до нуля коефіцієнти при різних степенях похідних, одержуємо

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right) - 6y^2\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 3y^2\frac{C}{A} - 3x^2 = 0, \qquad /4/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{A}\right) - 6y^2\frac{C}{A}\cdot\frac{B}{A} - 6x^2\frac{B}{A} = 0, \qquad /5/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{A}\right) - 6y^2\frac{K}{A}\cdot\frac{B}{A} + 3y^2\frac{E}{A} + 6y\frac{C}{A} = 0, \qquad /6/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E}{A}\right) - 6y^2\frac{E}{A}\cdot\frac{B}{A} - 3x^2\frac{K}{A} - 6x = 0, \qquad /7/$$

$$-y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{A}\right) + x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Q}{A}\right) - 6y^2\frac{Q}{A}\cdot\frac{B}{A} = 0. \qquad /8/$$

Інтегрування цієї системи зводиться до знаходження розв"язків кількох лінійних рівнянь 2-го порядку параболічного типу та кількох лінійних рівнянь I-го порядку з однією невідомою функцією [1,4].

Наприклад, виключаючи $\frac{C}{A}$ з рівнянь /4/, /5/ для $\frac{B}{A} = Z$, записуємо параболічне рівняння 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами

$$-\frac{1}{3}y^4\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{2}{3}x^3 y\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{3}\frac{x^6}{y^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{3}x^3 - 6y^3 Z\right)\frac{\partial Z}{\partial x} +$$
$$+\left(x^2 y + \frac{2}{3}\frac{x^6}{y^3} + 6x^3 Z\right)\frac{\partial Z}{\partial y} - 12xy - 2\frac{x^5}{y^3} - 12y^2 Z^3 - 12x^2 Z = 0, \qquad /9/$$

яке має канонічну форму

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - \frac{2(1-\eta^4) + 18\eta^3 Z}{\eta(1+\eta^4)}\frac{\partial Z}{\partial \eta} + \frac{6}{(1+\eta^4)\eta} + \frac{36\eta^2 Z}{(1+\eta^4)^2}\left(1+\eta^2 Z^2\right) = 0. \qquad /10/$$

Розглядаючи /10/ як звичайне рівняння 2-го порядку з параметром ξ і розв"язуючи його груповим методом /3,4/, знаходимо

$$Z = \frac{B}{A} = \frac{[12\mathcal{J}_1 + 2\psi_2]\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{y}{x}\right)^3\left[\frac{12}{\psi_1} + 12\psi_2\mathcal{J}_1 + 36\mathcal{J}_1^2 + \psi_2^2\right]}{-\left(\frac{y}{x}\right)^6\left[\frac{12}{\psi_1} + 12\psi_2\mathcal{J}_1 + 36\mathcal{J}_1^2 + \psi_2^2\right]},$$

де

$$\mathcal{J}_1 = \int\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\left(\frac{y}{x}\right)^4}\,d\left(\frac{y}{x}\right); \quad \psi_1 = \psi_1(x^4+y^4); \quad \psi_2 = \psi_2(x^4+y^4).$$

Подібними міркуваннями /3,4/ знаходимо загальний розв"язок системи /4/ - /8/, який визначає першу сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку /1/.

$$A(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^6 f_1; \quad B(x,y) = [12\mathcal{J}_1 + 2\psi_2]\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{y}{x}\right)^3\cdot f_1;$$

$$C(x,y) = -2\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}}[12\mathcal{J}_1 + 2\psi_2] - 4\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot f_1;$$

$$E(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot f_1\Big\{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}[\psi_3\mathcal{J}_2 + \psi_4] + \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot\mathcal{J}_2\cdot\Big[\psi_5 -$$
$$-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\Big] + \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{4}\Big[\psi_6 - \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\cdot\int\mathcal{J}_2 f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\Big]\Big\};$$

$$K(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^6 f_1\Big\{-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^7\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{-4}\right]^{-\frac{5}{4}}\cdot f_3 - \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot f_4 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^4\Big[1+$$
$$+\left(\frac{y}{x}\right)^4\Big]^{-\frac{5}{4}}\cdot f_3 + \frac{x}{3}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot f_4\Big\};$$

$$Q(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^6 f_1\cdot e^{2\int\frac{B(x,y)\,d\left(\frac{y}{x}\right)}{A(x,y)\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]}}$$

$$\mathcal{J}_2=\int\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}\,d\left(\frac{y}{x}\right);\quad \psi_3=\psi_3(x^4+y^4),\ \dots,\ \psi_6=\psi_6(x^4+y^4);$$

$$f_1=f_1\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=-\left\{\frac{12}{\psi_1}+12\psi_2\cdot\mathcal{J}_1+36\mathcal{J}_1^2+\psi_2^2\right\};$$

$$f_2=f_2\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^6 f_1}\left\{36\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}\left[12\mathcal{J}_1+2\psi_2\right]\cdot\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}\right]-\right.$$
$$\left.-72\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]-6\,\frac{6\left(\frac{y}{x}\right)^4+\left(\frac{y}{x}\right)^8-3}{\left(\frac{y}{x}\right)^5\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^2}\right\};$$

$$f_3=f_3\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=\psi_3\mathcal{J}_2+\psi_4+\mathcal{J}_2\left[\psi_5-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right]+\psi_6-\qquad /11/$$
$$-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int\left[\mathcal{J}_2\cdot f_2\right]d\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$f_4=f_4\left(\frac{y}{x},x^4+y^4\right)=-\frac{y}{x^2}\cdot\psi_3\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}-\frac{y}{x^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}\left[\psi_5-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right]-$$
$$-\mathcal{J}_2\left[\frac{y}{x^2\sqrt[4]{x^4+y^4}}f_2+x^3(x^4+y^4)^{-\frac{5}{4}}\int f_2\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right]+\frac{y}{x^2\sqrt[4]{x^4+y^4}}f_2\cdot\mathcal{J}_2+$$
$$+x^3(x^4+y^4)^{-\frac{5}{4}}\int\left[\mathcal{J}_2\cdot f_2\right]d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Серед рівнянь /1/, інваріантних відносно групи перетворень з оператором /2/, можуть бути і такі, ліві частини яких є її диференціальними інваріантами другого порядку [2,5]. Тоді коефіцієнти рівняння знаходимо з такої системи рівнянь:

$$-y^3\frac{\partial A}{\partial x}+x^3\frac{\partial A}{\partial y}+6y^2B=0;$$
$$-y^3\frac{\partial B}{\partial x}+x^3\frac{\partial B}{\partial y}-3x^2A+3y^2C=0;$$
$$-y^3\frac{\partial C}{\partial x}+x^3\frac{\partial C}{\partial y}-6x^2B=0;\qquad /12/$$
$$-y^3\frac{\partial K}{\partial x}+x^3\frac{\partial K}{\partial y}+3y^2E+6yC=0;$$
$$-y^3\frac{\partial E}{\partial x}+x^3\frac{\partial E}{\partial y}-3x^2K-6xA=0;$$
$$-y^3\frac{\partial Q}{\partial x}+x^3\frac{\partial Q}{\partial y}=0.$$

При цьому

$$A(x,y)=\frac{1}{4\psi_2}\left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\left[\psi_2^2(\psi_3-\mathcal{I}_1)^2-144\psi_1\right]+$$

$$+\frac{\psi_2}{6}\left(\frac{y}{x}\right)^3(\psi_3-\mathcal{I}_1)+\frac{\psi_2}{36}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}};$$

$$B(x,y)=\frac{1}{4\psi_2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)^4\left[\psi_2^2(\psi_3-\mathcal{I}_1)^2-144\psi_1\right]-$$

$$-\frac{\psi_2}{12}(\psi_3-\mathcal{I}_1);$$

$$C(x,y)=\frac{1}{4\psi_2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\left[\psi_2^2(\psi_3-\mathcal{I}_1)^2-144\psi_1\right];$$

$$E(x,y)=\psi_4\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}+\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\int\mathcal{I}_1 f\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)+\psi_5\left[1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\mathcal{I}_1+\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\mathcal{I}_1\cdot\int f\,d\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$K(x,y)=-\psi_4\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\int\mathcal{I}_1 f\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)-$$

$$-\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\mathcal{I}_1 f-\psi_5\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot\mathcal{I}_1+\frac{1}{3}\left[1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y}{x}\right)^{-4}\right]^{\frac{3}{4}}\cdot\int f\,d\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{1}{4}}\cdot\mathcal{I}_1\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{3}\psi_5\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{1}{4}}-$$

$$-\frac{2}{x}\left\{\frac{1}{4\psi_2}\left(\frac{y}{x}\right)^6\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\left[\psi_2^2(\psi_3-\mathcal{I}_1)^2-144\psi_1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_2}{6}\left(\frac{y}{x}\right)^3(\psi_6-\mathcal{I}_1)+\frac{\psi_2}{36}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}}\right\}-\left(\frac{y}{x}\right)^3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\int f\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$Q(x,y)=\psi_6\,(x^4+y^4);$$

$$f=f\left(\frac{y}{x},\,x^4+y^4\right)=\frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^9+6\left(\frac{y}{x}\right)^5-3\,\frac{y}{x}}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\cdot\frac{1}{\psi_2}\left[1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-3}\cdot\left[\psi_2^2\cdot(\psi_3-\mathcal{I}_1)^2-144\psi_1\right]+$$

$$+\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^6}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}\cdot\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot(\psi_3-\gamma_1)+$$

$$+\frac{\psi_2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3}{6\sqrt[4]{x^4+y^4}}.$$

Для виділених рівнянь виду /I/, інваріантних відносно групи перетворень /2/, в областях, обмежених траєкторіями цієї групи, можна знаходити розв"язки крайових задач груповим методом.

Список літератури: I. Г ю н т е р Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М., Гостехиздат, 1934. 2. О в с я н н и к о в Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962. 3. К о с т е н к о В.Г., В е с е л о в с ь к а О.О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - "Вісник Львів. ун-ту сер. мех.-мат.", 1972, вип.7. 4. К о с т е н к о К.С. Умови інтегрування у квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1972, вип.7. 5. Lie S. Vorlesungen über Differential-gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.917

С.П.Лавренюк, канд.фіз.-мат.наук

СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ ОДНІЄЇ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається система

$$\begin{cases}\dot{x}=-p_1(t)a(x)+p_2(t)b(y),\\ \dot{y}=p_3(t)c(x)-p_4(t)d(y),\end{cases}\qquad /I/$$

де функції $p_i(t)$, $(i=1,2,3,4)$ визначені і неперервні при $q<t<\infty$, а функції $a(x), c(x), b(y), d(y)$ визначені при $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$ і задовольняють умови існування та єдиності розв"язку системи /I/.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1/ $a(0)=b(0)=c(0)=d(0)=0$;

2/ $0<l_i\le p_i(t)\le L_i$, $i=1,2,3,4$;

3/ $0<a_1\le\frac{a(x)}{x}\le A_1$, $x\ne0$; $0<b_1\le\frac{b(y)}{y}\le B_1$, $y\ne0$;

$0<c_1\le\frac{c(x)}{x}\le C_1$, $x\ne0$; $0<d_1\le\frac{d(y)}{y}\le D_1$, $y\ne0$;

4/ $a_1d_1l_1l_4>B_1C_1L_2L_3$.

Тоді нульовий розв"язок системи /I/ асимптотично стійкий в цілому.

Доведення. Розглянемо системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}=-Ax+By,\\ \dot{y}=Cx-Dy,\end{cases} \qquad /2/$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-ax+by,\\ \dot{y}=cx-dy,\end{cases} \qquad /3/$$

де

$$A=\begin{cases}a_1l_1, & x>0,\\ A_1L_1, & x<0,\end{cases} \qquad B=\begin{cases}B_1L_2, & y>0,\\ b_1l_2, & y<0,\end{cases}$$

$$C=\begin{cases} C_1L_3\ , & x>0,\\ c_1l_3\ , & x<0,\end{cases}\qquad D=\begin{cases} d_1l_4\ , & y>0,\\ D_1L_4\ , & y<0,\end{cases}$$

$$a=\begin{cases} A_1L_1\ , & x>0,\\ a_1l_1\ , & x<0,\end{cases}\qquad b=\begin{cases} b_1l_2\ ; & y>0,\\ B_1L_2\ , & y<0,\end{cases}$$

$$c=\begin{cases} c_1l_3\ , & x>0,\\ C_1L_3\ , & x<0,\end{cases}\qquad d=\begin{cases} D_1L_4\ , & y>0,\\ d_1l_4\ , & y<0,\end{cases}$$

і функції

$$\Phi(x,y)=(AD-BC+D^2)x^2-2BDxy+B^2y^2,$$

$$\varphi(x,y)=(ad-bc+d^2)x^2-2bdxy+b^2y^2.$$

Легко зауважити, що похідні функцій $\Phi(x,y)$ і $\varphi(x,y)$, беручи до уваги відповідно системи /2/ і /3/, мають вигляд

$$\dot{\Phi}(x,y)=-(A+D)(AD-BC)x^2,$$

$$\dot{\varphi}(x,y)=-(a+d)(ad-bc)x^2$$

Очевидно, множини $\dot{\Phi}=0$ і $\dot{\varphi}=0$ не містять цілих траєкторій відповідних систем /2/ і /3/, крім початку координат. Розглянемо спочатку систему /2/ і функцію $\Phi(x,y)$. Траєкторії системи /2/, які потрапляють у I і III чверті при деякому t, не можуть звідти вийти, а траєкторії, що починаються в II і IV чвертях при $t=t_0$ $(t_0>0)$ або там залишаються, або переходять в I і III чверті. Функція $\Phi(x,y)$ має розрив першого роду при $y=0$ і $\dot{\Phi}(x,y)<0$ при $xy\neq 0$.

Доведемо, що нульовий розв"язок системи /2/ стійкий в цілому. Нехай задано деяке $\varepsilon > 0$. З огляду на умови теореми за заданим ε можемо вибрати $\delta_1 > 0$ таке, що всі траєкторії, які починаються на множині

$$M_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \delta_1,\ xy > 0\},$$

не виходять за межі множини

$$M_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \varepsilon,\quad xy > 0\}.$$

За вказаним δ_1 можемо тепер вибрати $\delta > 0$ таке, що траєкторії, які починаються на множині

$$M_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \delta,\quad xy < 0\},$$

або не виходять за межі множини

$$M_4 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \delta_1,\quad xy < 0\},$$

або потрапляють у множину M_1. Отже всі траєкторії системи /2/, що починаються в крузі $x^2 + y^2 < \delta$ при деякому $t = t_0$ $(t_0 > q)$, не виходять за межі круга $x^2 + y^2 < \varepsilon$.

Тим самим доведено стійкість за Ляпуновим нульового розв"язку системи /2/. Використовуючи метод доведення Барбашина - Красовського [2], легко довести, що всі траєкторії системи /2/ прямують до нуля при $t \to \infty$. Аналогічно доводиться стійкість в цілому нульового розв"язку системи /3/.

Легко зауважити, що в силу умов теореми будь-який розв"язок системи /I/ можна помістити у вилку розв"язків систем /2/ і /3/ [3]. Отже, нульовий розв"язок системи /I/ також стійкий в цілому.

Список літератури: I. А б р а м о в Р.Т., Е г о р о в И.Г. Об устойчивости в целом нулевого решения одной системы двух дифференциальных уравнений. -"Дифференциальные уравнения", I975, т.XI, № 9. 2. Б а р б а ш и н Е.А. Функция Ляпунова. М., "Наука", I970. 3. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., "Мир", 1970.

УДК 517.917

Б.В.Ковальчук, канд.фіз.-мат.наук, Л.М.Лісевич, канд.фіз.-мат.наук

ПРО МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad (T_x),$$

де $y=[y_1,\dots,y_n]$ – $(n\times1)$ – вектор евклідового простору R^n_y ; $x \in \mathcal{I}_x = \{-\infty, \infty\}$ і $f(x,y)=[f_1(x,y),\dots,f_n(x,y)]$ – $(n\times1)$ – матриця /вектор-функція/ яка задана на множині $\mathcal{I}_x \times A_y$ $(A_y \subset R^n_y)$.

Допустимо, що: 1/ матриця* $f(x,y)$ рівномірно неперервна по y на кожній замкнутій підмножині $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$, де $\bar{B}_y \subset A_y$ – компакт, тобто обмежена замкнута множина; 2/ $f(x,y)$ – S^p – майже періодична матриця по x рівномірно відносно $y \in \bar{B}_y$.

За таких умов систему (T_x) називатимемо S^p-майже періодичною системою. Можна показати, що S^p-майже періодична система (T_x) в деякому компакті $\bar{B}_y$ має розв"язок /не обов"язково єдиний/ і матриця $f(x,y)$ є обмеженою на множині $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$.

Ми вивчаємо, які додаткові умови потрібно накласти на S^p - майже періодичну систему (T_x) , щоб її розв"язок був S^p-майже періодичним.

У випадку рівномірної майже періодичної системи (T_x) такі умови знайдені [2].

Для довільної послідовності дійсних чисел $\{h_\nu\}$ побудуємо послідовність матриць $\{f(x+h_\nu, y)\}_{\nu=1,2,\dots}$ яка рівномірно збігається на будь-якій замкнутій множині $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$. Тоді гранична матриця $g(x,y) = \lim_{\nu\to\infty} f(x+h_\nu, y)$ є рівномірно неперервна по y на $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$ і S^p- майже періодична по x рівномірно відносно y на цій множині [4].

---

* Тут і надалі ми розглядаємо матриці в S^p-метриці. Поняття S^p-норми матриці дається в роботі [4]

Отже, матриця $f(x,y)$ неперервна на $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$ по сукупності змінних x і y. Розглянемо тепер послідовність систем

$$\frac{dy}{dx} = f(x+h_\nu, y),$$

яка при $\nu \to \infty$ рівномірно збігається до системи

$$\frac{dy}{dx} = g(x,y) \qquad (T_{x+h})$$

на замкнутій множині $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$.

Системи (T_{x+h}) називатимемо уподібненими до системи (T_x). Очевидно, кожна уподібнена система (T_{x+h}) задовольняє ті самі умови, що й система (T_x). Вибираючи різні послідовності чисел $\{h_\nu\}$, для яких існують граничні матриці $g(x,y)$, побудуємо цілу сім"ю уподібнених систем (T_{x+h}), яку позначимо $H(T_x)=\{T_{x+h}\}$ і будемо називати H -класом S^ρ -майже періодичної системи (T_x).

Легко зауважити, якщо S^ρ-майже періодична система (T_x) має обмежений розв"язок $Z_{(x)} \in \bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{I}_x$, то будь-яка уподібнена система (T_{x+h}) також має обмежений розв"язок у $\bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{I}_x$.

Обмежений розв"язок $Z_{(x)} \in \bar{B}_y$ $(x \in \mathcal{I}_x)$ S^ρ- майже періодичної системи (T_x) називається відокремленим в області $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$, якщо існує таке число $\rho > 0$, яке залежить тільки від $Z(x)$, що для будь-якого іншого обмеженого розв"язку $z(x) \in \bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{I}_x$ виконується нерівність

$$\inf_x \|Z(x) - z(x)\| > \rho > 0 .$$

Наступна теорема дає достатні умови, які забезпечують S^ρ-майже періодичність розв"язку S^ρ-майже періодичної системи (T_x).

<u>Теорема I</u>. Обмежений розв"язок $Z(x)$ S^ρ-майже періодичної системи (T_x) є S^ρ-майже періодичним у деякому компакті $\bar{B}_y$ при $x \in \mathcal{I}_x$, якщо обмежені розв"язки із $\bar{B}_y$ всіх уподібнених систем (T_{x+h}) відокремлені в області $\mathcal{I}_x \times \bar{B}_y$.

Тому що S^ρ - нормальність матриці є необхідною та достатньою умовою її S^ρ-майже періодичності [3], то при доведенні теореми досить показати, що розв"язок $Z(x)$ є S^{ρ}-нормальна матриця. Для доведення цього ми використовуємо метод, застосований у роботі /2/ при вивченні аналогічного питання у випадку рівномірної майже періодичної системи (T_x).

Зауваження I. Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x) \qquad (Z_x),$$

де $A(x)$ - S^{ρ}-майже періодична матриця виміру $n \times n$; $f(x)$ - S^{ρ}-майже періодична матриця /вектор-функція/.

Запишемо відповідну їй однорідну систему

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \qquad (\tilde{Z}_x)$$

і побудуємо для неї сім"ю уподібнених систем / H -клас/.

$$\frac{dy}{dx} = B(x)y \qquad (\tilde{Z}_{x+h}),$$

де $B(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} A(x + h_{\nu})$.

Відповідно H-клас системи (Z_x) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = B(x)y + g(x) \qquad (Z_{x+h}),$$

де $g(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} f(x + h_{\nu})$.

Наявна теорема,* яка дає достатні умови S^{ρ}-майже періодичності розв"язку лінійної неоднорідної системи (Z_x) .

Теорема 2. Обмежений розв"язок системи (Z_x) є S^{ρ}-майже періодичним, якщо кожна уподібнена система $(\tilde{Z}_{x+h})$ не має обмежених розв"язків /крім тривіального/.

Справді, легко показати, що кожна система (Z_{x+h}) має єдиний обмежений розв"язок. Тоді із теореми I одержуємо, що обмежений розв"язок системи (Z_x) є S^{ρ}-майже періодичним.

Зауваження 2. Розглянемо квазілінійну систему

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x) + \mu\varphi(x, y) \qquad (Q_x)$$

* Для випадку рівномірної майже періодичної системи див. роботу /2/.

де A - стала матриця; μ - малий скалярний параметр і матриця $\varphi(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|\varphi(x,y')-\varphi(x,y'')\|\leq N\|y'-y''\|.$$

У роботі [1] знайдені достатні умови майже періодичності розв"язку для рівномірної майже періодичної системи (Q_x).

Аналогічна теорема справедлива і для S^ρ-майже періодичної системи (Q_x).

Теорема 3. Якщо: 1/ матриця A не має чисто уявних характеристичних чисел; 2/ $f(x)$ - S^ρ-майже періодична матриця по $x\in J_x$; 3/ $\varphi(x,y)$ - S^ρ-майже періодична матриця по x рівномірно відносно y на компакті $\bar{Q}_y$, то при $|\mu|<\mu_0$, де μ_0 - достатньо мале додатне число, система (Q_x) має S^ρ-майже періодичний розв"язок.

Список літератури: 1. Б и р ю к Г.И. Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - "Докл. АН СССР", 1954, т.96, № 1. 2. Д е м и д о в и ч Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., "Наука", 1967. 3. К о в а л ь ч у к Б.В., Л і с е в и ч Л.М. Компактність і нормальність S^ρ-майже періодичних матриць. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", вип.12, Теоретична та прикладна математика, 1977. 4. Л і с е в и ч Л.М., К о в а л ь ч у к Б.В. S^ρ-майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^ρ-майже періодичною правою частиною. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1973, вип.8.

УДК 517.9

Л.М.Лісевич, канд.фіз.-мат.наук,
Ж.С.Свірчевська

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

У роботі /1/ сформульована теорема існування майже періодичного по часу t розв"язку граничної задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad /2/$$

в смузі $(0 < x < \pi,\ 0 \le t < +\infty)$, де $f(x,t)$ – майже періодична по t функція, рівномірно відносно x. Ми доводимо існування майже періодичного розв"язку задачі

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t), \qquad /3/$$

$$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0, \qquad /4/$$

де $f(x,y,t)$ – майже періодична функція по часу t, рівномірно відносно x, y $/0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/$.

Нехай C^∞ – простір неперервних нескінченно диференційованих функцій дійсних аргументів x, y, t, а C_0^∞ – підпростір із C^∞ майже періодичних по t функцій в $G(0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$. Розглянемо дві функції $\varphi(x,y,t)$ та $\psi(x,y,t)$ із G і визначимо скалярний добуток

$$(\varphi,\psi) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Big[\iint_G \varphi(x,y,t)\,\psi(x,y,t)\,dx\,dy\Big]dt, \qquad /5/$$

де G є квадрат $/0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi/$. Відповідно введемо норму

$$\|\varphi(x,y,t)\| = \left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Big[\iint_G |\varphi(x,y,t)|^2\,dx\,dy\Big]dt\right\}^{1/2}. \qquad /6/$$

Позначимо через H_0 доповнення в C^∞ відносно норми /6/, а доповнення в C_0^∞ відносно цієї норми – через $\overset{\circ}{H}_0$.

Введемо ще таку норму:

$$\|\varphi\|_m = \left\{ \sum_{\sigma=0}^{m} \|D^\sigma \varphi\|^2 \right\}^{1/2}, \qquad /7/$$

породжену скалярним добутком

$$(\varphi, \psi) = \sum_{|\sigma|=0}^{m} (D^\sigma \varphi, D^\sigma \psi), \qquad /8/$$

де

$$D^\sigma = \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}}{\partial x^{\sigma_1} \partial y^{\sigma_2} \partial t^{\sigma_3}}, \ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 .$$

Позначимо доповнення в C^∞ і C_0^∞ відповідно через H_m і $\overset{\circ}{H}_m$ відносно норми /7/. Зрозуміло, що простори $H_0, \overset{\circ}{H}_0, H_m$ і $\overset{\circ}{H}_m$ є гільбертовими.

Функції $f(x,y,t)$ і $g(x,y,t)$ будемо називати ортогональними в G, якщо

$$(f,g) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iint_G f(x,y,t)\, g(x,y,t)\, dx\,dy \right] dt = 0 .$$

У просторі $\overset{\circ}{H}_0$ розглянемо множину N таких функцій:

$$N = \begin{cases} \varphi(x,y,t) \in \overset{\circ}{H}_0, \\ \varphi(x,y,t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} a_{kl} \sin kx \sin ly\, e^{i\sqrt{k^2+l^2}\,t} \\ \sum\limits_{l,k} |a_{kl}|^2 < \infty \end{cases}$$

Ортогональне доповнення до N позначимо $N^\perp$.

Теорема I. Нехай для функції $f(x,y,t)$ в рівнянні /3/ виконуються умови: I/ $f(x,y,t)$ є майже періодична по t, рівномірно відносно x, y, причому

$$f(x,y,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{kln} \sin kx \sin ly\, e^{i\lambda_n t}; \qquad /9/$$

2/ показники λ_n мають єдину граничну точку в нулі

$$(\lambda_{n+1} < \lambda_n,\ \lambda_{-n} = \lambda_n,\ |\lambda_n| < 1),$$

3/ $f(x,y,t) \in H_k \cap N_1^1$

Тоді існує єдиний майже періодичний по t розв"язок $u(x,y,t)$ задачі /3/, /4/ такий, що

$$u(x,y,t) \in \overset{\circ}{H}_{k+1} \cap N^1,$$

$$\|u(x,y,t)\|_{k+1} \le C_k \|f\|_k \qquad (C_k = const).$$

Доведення. Шукаємо розв"язок задачі /3/, /4/ у вигляді

$$u(x,y,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{kln} \sin kx \sin ly\, e^{i\lambda_n t}. \qquad /10/$$

Підставляючи /9/ і /10/ в рівняння /3/, одержуємо

$$u_{kln} = \frac{f_{kln}}{k^2 + l^2 - \lambda_n^2}. \qquad /11/$$

Із рівняння /11/ випливає, що коли ряд /9/ абсолютно збіжний, а спектр $\{\lambda_n\}$ має єдину граничну точку в нулі, то ряд /10/ також абсолютно збіжний, причому $\|u\|^2 \le \|f\|^2$. Легко показати, що $\|u\|^2 \le c\|f\|^2$, де $c = const$. Це означає, що $u = u(x,y,t)$ слабкий розв"язок задачі /3/, /4/. Покажемо тепер, що цей розв"язок є сильним розв"язком, тобто

$$u(x,y,t) \in \overset{\circ}{H}_{k+1} \cap N^1.$$

Маємо $u \in \overset{\circ}{H}_1 \cap N^1$ і для всіх $\varphi \in C_0^\infty$, $(\Box\varphi, u) = (\varphi, f)$. Заміняючи в правій частині /3/ $f(x,y,t)$ на $f_t^h = \dfrac{f(x,y,t+h) - f(x,y,t)}{h}$, покажемо, що $u_t^h = \dfrac{u(x,y,t+h) - u(x,y,t)}{h}$ є слабким розв"язком рівняння $\Box u_t^h = f_t^h$, тобто $(\Box\varphi_t^{-h}, u) = -(\Box\varphi, u_t^h) = (\varphi_t^{-h}, f) = -(\varphi, f_t^h)$.

На основі сказаного вище

$$\|u_t^h\|_1 \le const \|f_t^h\|.$$

Переходячи до границі, коли $h \to 0$, одержуємо $u_t \subset \overset{\circ}{H}_1 \cap N^1$ і

$$\|u_{t^2}\|_1 \le const\,\|f_{t^2}\|.$$

Аналогічно дістаємо

$$\|u_{t^k}\| \le const\,\|f_{t^k}\|.$$

Залишилось показати диференційованість по x і y. Розглянемо фінітну функцію $\zeta(x) \subset C^\infty$, $supp(\zeta(x)) \subset (0,\pi)$, $supp(\zeta(x+h)) \subset (0,\pi)$.

Приймемо $\varphi_x^h = \dfrac{\varphi(x+h,y,t) - \varphi(x,y,t)}{h}$.

Легко перевірити, що

$$(\Box\varphi,(\zeta u)_x^h) = (-\Box\varphi_x^{-h}\,\zeta u) = -(\zeta\,\Box\varphi_x^{-h}, u)$$

Прийнявши $\zeta = 1$ і прямуючи h до нуля, одержуємо, що u_{x^2} існує і належить H_0 на довільному компакті A. Розглядаючи фінітну функцію

$$\zeta = \zeta(y) \subset C_1^\infty\ supp\ \zeta(y) \subset (0,\pi),\ supp\ \zeta(y+h) \subset (0,\pi),$$

приймемо

$$\varphi_y^h = \frac{\varphi(x,y+h,t) - \varphi(x,y,t)}{h}.$$

Зовсім аналогічно показуємо, що u_{y^2} і u_{xy} існують і належать H_0

Повертаючись тепер до рівняння

$$(\Box\varphi, u) = (\varphi, f).$$

дістаємо

$$(\Box\varphi, u) = (\varphi, \Box u) = (\varphi, f),$$

тобто $\Box u = f$ для всіх $\varphi \in N, u(x,y,t)$ – сильний розв"язок рівняння /3/ і

$$\|u_{tt}\| + \|f\| < +\infty.$$

Звідси випливає, що $u_{xx} + u_{yy} \in H_0$; $u \in H_2$ відносно x,y.

Так само можна показати, що $u \in H_{k+1}$, $\|u\|_{k+1} \le C_k \|f\|_k$, що й доводить нашу теорему.

Доведена теорема для рівняння мембрани розповсюджується і для рівняння газу.

Список літератури: І.Л і с е в и ч Л.М., С в і р ч е в с ь к а Ж.С. Існування майже періодичного розв"язку однієї задачі для гіперболічного рівняння другого порядку. - "Доп. АН УРСР, сер. А", 1973, №7.
2. Rabinowitz P.H. Periodic solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. - "Com. Pure and Appl. Math.", 1967, 20, №1, 145.

УДК 517.43

Г. І. Чуйко

ПРО ПРЕДСТАВЛЕННЯ АБЕЛЕВОЇ ГРУПИ ОПЕРАТОРІВ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Дж. Уермер довів, що для довільної обмеженої абелевої групи G операторів у гільбертовому просторі H існує обмежений самоспряжений оператор B з обмеженим всюди визначеним оберненим B^{-1}, таким, що оператор BTB^{-1} унітарний для всіх $T \in G$.

Наша мета - довести аналог леми Уермера, відкинувши вимогу обмеженості групи G.

Теорема. Нехай H - сепарабельний гільбертів простір, а $G \subset B(H)$ - абелева група і виконуються такі умови:

1/ в H існує сепарабельна узагальнена спектральна міра P, така, що для будь-яких $\Delta \in D(P)$ і $T \in G$

$$P(\Delta)T = TP(\Delta);$$

2/ для будь-якого $\Delta \in D(P)$ $\sup\limits_{T\in G} \| P(\Delta)T \| < \infty$.

Тоді існує скалярний добуток $(\cdot\,,\cdot)_0$ на лінійному многовиді $\widetilde{H} = \bigcup\limits_{\Delta\in D(P)} P(\Delta)H$, еквівалентний на $P(\Delta)H$, $\Delta \in D(P)$ скалярному добутку $(\cdot\,,\cdot)$ простору H, та існує $(\cdot\,,\cdot)_0$-самоспряжений оператор B з оберненим B^{-1}, таким, що оператор BTB^{-1} в істотному $(\cdot\,,\cdot)_0$-унітарний для кожного $T \in G$

Зауваження. Умови I, 2 природні в тому сенсі, що для обмеженої абелевої групи G завжди існує звичайна спектральна міра, яка задовольняє ці умови. Дійсно, коли така спектральна міра існує, то умова 2 виконується тривіально /оскільки спектральна міра обмежена/. Легко переконатися /за допомогою теореми фон Неймана [1]/, що для кожної абелевої групи $G \subset B(H)$ існує спектральна міра, яка комутує з операторами групи G.

Доведення. З умов I, 2 випливає, що множина $G_\Delta = \{T_\Delta = TP(\Delta), T \in G\}$ є обмеженою абелевою групою операторів в $H^\Delta = P(\Delta)H$. Тому за лемою Уермера [2] існує оператор $B_\Delta \in B(H^\Delta)$ з потрібними властивостями. У роботі [3] доведено існування скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_0$, який заданий на лінійному многовиді $\tilde{H} = \bigcup_{\Delta \in D(P)} H^\Delta$ і еквівалентний вихідному скалярному добутку на кожному H^Δ, і такий, що всі оператори $P(\Delta)$, $\Delta \in D(P)$ $(\cdot,\cdot)_0$ - симетричні на многовиді $\tilde{H}$. Оскільки узагальнена спектральна міра сепарабельна, то можна побудувати послідовність множин $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Delta_n \in D(P)$, які попарно не перетинаються, і такі, що множина $\Delta \in D(P)$ покривається скінченним числом множин Δ_n.

Простори $H^{\Delta_n} (\cdot,\cdot)_0$ - ортогональні, і їх об"єднання $\tilde{H}$ щільне в H. Користуючись лемою Уермера, побудуємо на кожному H^{Δ_n} оператори B_{Δ_n}, $B_{\Delta_n}^{-1}$, самоспряжені відносно скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_0$, і такі, що $B_{\Delta_n} T_{\Delta_n} B_{\Delta_n}^{-1}$ - унітарний оператор в H^{Δ_n}. Тоді [4] в H існує єдиний самоспряжений /відносно $(\cdot,\cdot)_0$/ оператор B /відповідно B^{-1}/, що збігається з B_{Δ_n} /відповідно з $B_{\Delta_n}^{-1}$/, на кожному H^{Δ_n}

$$D(B) = \{x \mid x \in H : \sum_n \| B_{\Delta_n} P(\Delta_n) x \|_0^2 < \infty\},$$

$$Bx = \sum_n B_{\Delta_n} P(\Delta_n) x .$$

Очевидно, що оператор B - шуканий.

Робота виконана під керівництвом В.Е.Лянце.

Список літератури: 1. А х и е з е р Н.И., Г л а з м а н И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., "Наука", 1966. 2. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж. Линейные операторы. Т.3. М., "Мир", 1974. 3. Л я н ц е В.Э. Об одном обобщении понятия спектральной меры. "Математический сборник", 1963, т.61, вып.1. 4. Р и с с Ф., С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.

УДК 517.944:947

Марія Мартиненко, канд.фіз.-мат.наук

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ"ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

Ріманів простір введений А.Зоммерфельдом [3] як просторовий аналог ріманової поверхні. Якщо розглядувана функція у звичайному просторі n - значна, то візьмемо n екземплярів звичайного тривимірного простору та позначимо у них лінії розгалуження цієї функції /легко видно, що багатозначні функції у просторі мають лінії розгалуження, а не точки, як у плоскому випадку/. Натягнемо на лінії розгалуження поверхні певного вигляду та розріжемо кожний просторовий екземпляр вздовж цих поверхонь. Одержані при цьому верхні та нижні сторони розрізуваних поверхонь склеємо одну з одною так, як це робиться у теорії ріманових поверхонь, і одержимо n -листковий ріманів простір.

Фундаментальною матрицею системи рівнянь з частинними похідними еліптичного типу в n -листковому рімановому просторі назвемо матричну функцію двох точок x та y з такими властивостями:

1/ вона неперервна та обмежена всюди в рімановому просторі, за винятком точки $x = y$, у якій має характерну особливість класичного фундаментального розв"язку розглядуваної системи;

2/ є розв"язком розглядуваної системи рівнянь як функція точки x всюди у рімановому просторі, за винятком точки $x=y$ та лінії розгалуження;

3/ в безмежно далекій точці кожного просторового екземпляра вона поводить себе як класична фундаментальна матриця розглядуваної системи.

Розглянемо таку еліптичну систему рівнянь другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0, \qquad /1/$$

де $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - однорідний оператор другого порядку; $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - оператор, що містить всі інші похідні; $x=(x_1,x_2,x_3)$. Припускаємо, що коефіцієнти оператора $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j $(j=0;1)$ в операторі $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовані j раз в E_3, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та їх похідні до другого порядку зростають не швидше, ніж $F(x)$ при $|x|\to\infty$, де $F(x)$ - така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint_{\infty}\frac{dx}{Fx}<\infty \text{ та } \frac{|\det(A_0(x,2\pi i\alpha)-\lambda^2 I)|}{[F(x)]^p|\alpha|^{2p}+\lambda^{2p}}>\mu>0$$

для кожної точки $x\in E_3$ та для кожної дійсної точки $(\lambda,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq 0$ / λ - достатньо велике додатне число/.

При зроблених припущеннях існує єдина фундаментальна матриця системи (1) в рімановому просторі з простою гладкою замкненою лінією розгалуження. Позначимо через $K(x,y)$ фундаментальну матрицю системи (1) в рімановому просторі з гладкою лінією розгалуження. Доведемо таку формулу:

$$K'(y,x)=K(x,y) \qquad /2/.$$

/штрих означає транспонування/, з якої випливає, що матриця, транспонована до побудованої фундаментальної матриці системи (1) в рімановому просторі з гладкою лінією розгалуження, по другому аргументу є розв"язком цієї системи при $x \neq y$ та зовні лінії галуження. Оскільки $K(x,y)=K'(y,x)$, то, застосовуючи оператор $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$, одержуємо $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y)=A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K'(y,x)$. Тому що $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y)=0$ при $x\neq y$ та зовні лінії розгалуження, то при цих же умовах $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K'(y,x)=0$.

Для доведення формули (2) застосовуємо другу формулу Гріна до функцій $u(x)=K(x,y_1)$ та $v(x)=K(x,y_2)$ в області D_ε ріманового простору, границя якої складається зі сфер S_{ε,y_1} і S_{ε,y_2} радіуса ε з центром відповідно у точках y_1 та y_2, та трубчастої поверхні T_ε радіуса ε, що охоплює лінію $\mathcal{G}$,

$$2\iiint_{D_\varepsilon}\left\{K'(x,y_1)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y_2)-\left[A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y_1)\right]'K(x,y_2)\right\}dx= \qquad /3/$$
$$=-\iint_{S_{\varepsilon,y_1}+S_{\varepsilon,y_2}+T_\varepsilon}\left\{K'(x,y_1)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)K(x,y_2)-\left[B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)K(x,y_1)\right]'K(x,y_2)\right\}d_xS.$$

Тому що $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x,y)=0$ при $x\neq y$ та $x\,\bar{\in}\,\mathcal{G}$, то об"ємний інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по поверхні T_ε прямує до нуля, коли до нього прямує ε.

Через те що $K(x,y)$ має при $x=y$ характеристичну особливість класичної фундаментальної матриці, то при $\varepsilon\to 0$ інтеграли по поверхнях S_{ε,y_1} та S_{ε,y_2} в формулі (3) прямують до $-K(y_1,y_2)$ та $K'(y_2,y_1)$. Отже, з формули (3) в границі при $\varepsilon\to 0$ одержуємо $-K(y_1,y_2)+K'(y_2,y_1)=0$, або $K(y_1,y_2)=K'(y_2,y_1)$, що і стверджувалось.

У роботі [2] введено таке /відмінне від наведеного вище/ поняття m -розгалуженого фундаментального розв"язку еліптичного оператора з постійними коефіцієнтами: m – розгалуженим фундаментальним розв"язком $G_m(x,\xi)$ еліптичного оператора

$$L = \sum_{|\beta|\leq 2k} a^{\beta} D_{\beta}, \qquad \beta = (\beta_1, \beta_2)$$

називається такий розв"язок рівняння $L[u] = \delta_Q$ / δ_Q – дельта – функція Дірака, зосереджена в точці Q ріманового простору/, який на m – листковій рімановій поверхні R_m з довільною точкою розгалуження однозначно визначений скрізь, за винятком точки розгалуження, і має такі властивості:

1/ $G_m(x,\xi)$ має в R_m одну характеристичну особливість в точці $x=\xi$, яка знаходиться на першому листку рімановоі поверхні;

2/ $G_m(x,\xi)$ безмежно диференційована скрізь, за винятком точки ξ і точки розгалуження. У точці розгалуження G_m скінченна разом зі своїми похідними до $(2k-2)$ -го порядку включно, а $(2k-1)$ – ша похідна безмежна, але так, що

$$\lim_{r\to 0} r \frac{\partial^{2k-1} G_m}{\partial r^{2k-1}} = 0,$$

де r – означає відстань до точки розгалуження;

3) $\sum_{i=1}^{m} G_m(x,\xi_i) = G(x,\xi)$,

де $\xi_1 = \xi$, а ξ_i / $i \geq 2$ / – точки, які лежать в тому ж місці, що й ξ, але на інших листках рімановоі поверхні R_m, $G(x,\xi)$ – звичайний /нерозгалужений/ фундаментальний розв"язок розглядуваного рівняння.

Існування такого розв"язку у роботі [2] не доведено, однак вказано його застосування до розв"язування деяких крайових задач для одиничних еліптичних рівнянь методом відображення і побудовані такі розв"язки для деяких частинних випадків.

Визначення А.Ф.Шестопала відрізняється від наведеного у цій роботі визначення фундаментальної матриці еліптичної системи у рімановому просторі третьою умовою.

Доведемо, що для еліптичних систем розглядуваного в цій роботі типу ця третя умова є властивістю, яка випливає з визначення фундаментальної матриці у рімановому просторі.

Оскільки класична фундаментальна матриця $\omega(x,y)$ однозначна у звичайному евклідовому просторі, то в n - листковому рімановому просторі вона n - значна, бо всі її значення /"вітки"/ на n листках ріманового простору рівні між собою. Тому вона має у рімановому просторі n полюсів у точках $y_i \in \mathcal{R}_i \ (i=\overline{1,n})$, які знаходиться на тому ж місці, що й y , але на різних листках ріманового простору $\mathcal{R} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$. Звідси випливає, що різниця

$$u(x) = \omega(x,y) - \sum_{i=1}^{n} K(x,y_i)$$

буде представляти розв"язок системи (1) скрізь у рімановому просторі, за винятком лінії розгалуження, де він залишається обмеженим, регулярний у безмежно віддаленій точці кожного листка $\mathcal{R}$. З теореми Ліувілля випливає, що такий розв"язок тотожній нуль, тому

$$\omega(x,y) - \sum_{i=1}^{n} K(x,y_i) , \qquad /4/$$

де y_i має вказаний вище зміст.

Рівність /4/ виражає згадану властивість фундаментальної матриці системи /I/ у рімановому просторі.

Список літератури: I. Мельник Д.П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. - "Доповіді АН УРСР", 1958, № 6. 2. Шестопал А.Ф. Разложение по фундаментальным решениям эллиптических операторов. Киев, "Наукова думка", 1968. 3. Sommerfeld A. - Proc. London Math. Soc.", 1897, 28, 395.

УДК 512.4

О.Л.Горбачук, канд.фіз.-мат.наук, М.Я.Комарницький

ПРО РОЗЩЕПЛЮВАНІСТЬ ЗЧИСЛЕННО-ПОРОДЖЕНИХ КРУЧЕНЬ

У цій статті розглядається розщеплювальність нерадикально-напівпростого кручення зі зчисленною базою, яка володіє деякими додатковими властивостями.

Всі розглядувані кільця вважатимемо асоціативними з одиницею, а всі модулі правими й унітарними. Користуватимемось термінологією з робіт [3,4].

Кручення σ в категорії правих модулів над кільцем A назвемо зчисленно-породженим, якщо його радикальний фільтр правих ідеалів має зчисленну базу. Нехай σ зчисленно-породжене кручення і $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ база радикального фільтра $\mathcal{E}_\sigma$. Коли $\{P_i P_n\}_{n=1}^{\infty}$ знову є базою фільтра $\mathcal{E}_\sigma$, то будемо говорити, що σ зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою.

<u>Лема 1.</u> Нехай радикальний фільтр $\mathcal{E}$ кільця A має зчисленну базу $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = 0$. Якщо $P_i a P_j \neq 0$ для кожного ненульового $a \in A$ при будь-яких $i, j = 1, 2, \dots$, то існують такі елементи $p_i \in P_i$, $i = 1, 2, \dots$, і послідовність натуральних чисел $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, що $p_k p_{k-1} \dots p_1 P_k \not\subseteq P_{s_k}$.

<u>Доведення</u>. Можна вважати, що праві ідеали P_i вкладені один в одного, тобто $P_1 \supset P_2 \supset \cdots$. У супротивному випадку можна розглянути систему $\{\bigcap_{i=1}^{n} P_i\}_{n=1}^{\infty}$ правих ідеалів, яка знову є базою і володіє тими ж властивостями, що й $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Нехай $0 \neq p_1 \in P_1$. Тому що $P_2 p_1 \neq 0$, то існує $p_2 \in P_2$, такий, що $p_2 p_1 \neq 0$. Далі, з того, що $P_3 p_2 p_1 \neq 0$, одержуємо $p_3 \in P_3$, для якого $p_3 p_2 p_1 \neq 0$. Таким способом побудуємо послідовність елементів $p_i \in P_i$ з властивістю $p_n p_{n-1} \dots p_1 \neq 0$ для будь-якого натурального n.

Оскільки $\sigma(A)=0$, то внаслідок $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i=0$ для будь-якого натурального k існує таке натуральне S_k, що $P_k P_{k-1} \ldots P_1 P_k \not\subseteq P_{S_k}$.
Лема доведена.

Лема 2. Нехай σ зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$. Якщо $\sigma(A)=0$ і для довільного $a \in A$, $P_n a \neq 0$ / $i=1,2,\ldots$ /, то кручення σ не розщеплюється.

Доведення. Зрозуміло, що можна вважати праві ідеали P_i вкладеними один в одного. Згідно леми I існують послідовність $p_i \in P_i$, $i=1,2,\ldots$ і послідовність натуральних чисел $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $p_k, p_{k-1} \ldots p_1 P_k \not\subseteq P_{S_k}$.

Розглянемо правий A-модуль $M=\prod_{k=1}^{\infty} P_1/P_{S_k}$ і покажемо, що M не розщеплюється.

Елемент x довільного правого модуля N назвемо елементом нескінченої висоти, якщо для будь-якого правого ідеалу P_i; $x \in x_i' P_i$, де $x_i' \in N$ / тобто $x=x_i' b_i$, $b_i \in P_i$ /. Перевіримо, що в M немає елементів нескінченої висоти. Справді, нехай $m=(m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ елемент нескінченної висоти в M. Тоді $m_i \in m_i' P_{k_i}$, де $m_i \in P_1/P_{S_i}$ для кожного $i=1,2,\ldots$. З другого боку, оскільки P_{S_i} містить деякий з ідеалів $P_1 P_{t_i}$, то кожний елемент із P_1/P_{S_i} анулюється правим ідеалом P_{t_i}. Таким чином, $m_i=0$ для кожного $i=1,2,\ldots$.

Якщо ми тепер доведемо, що модуль $M/\sigma(M)$ має ненульовий елемент нескінченої висоти, то тим самим буде доведено, що модуль M не розщеплюється.

Розглянемо елемент $b=(p_1, p_2 p_1, \ldots, p_n p_{n-1} \ldots p_1, \ldots)$ з M: при цьому $p_n p_{n-1} \ldots p_1$ природно розглядається як елемент із P_1/P_{S_n}. Для довільного натурального k приймемо

$$b_k=(0, \ldots, 0, p_k p_{k-1} \ldots p_1, p_{k+1} p_k \ldots p_1, \ldots) .$$

Якщо $\pi: M \to M/\sigma(M)$ канонічний гомоморфізм, то $\pi(b)=\pi(b_1)=\pi(b_2)=\cdots$
Оскільки $b_n=(0, \ldots, 0, 1, p_{n+1}, \ldots) p_n p_{n-1} \ldots p_1$, то елемент $\pi(b)$ з

модуля $M/\sigma(M)$ має нескінченну висоту. Залишається довести, що $\mathfrak{A}(b)\neq 0$, тобто $b\notin\sigma(M)$. Припустивши, що $b\in\sigma(M)$, ми одержали б, що b анулюється деяким правим ідеалом P_m. Отже, $P_k P_{k-1}\cdots P_1 P_m\subseteq P_{s_k}$ для будь-якого натурального k. Зокрема, $P_m P_{m-1}\cdots P_1 P_m\subseteq P_{s_m}$, що суперечить вибору P_{s_m}. Лему доведено.

Теорема I. Нехай σ зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$, причому $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i=0$. Якщо для кожного $a\in A$ із того, що $P_i a=0$, при деякому натуральному i випливає, що $a\in\sigma(A)$, то кручення σ не розщеплюється.

Доведення. Припустимо, що σ розщеплюється. Тоді $A=\sigma(A)\oplus S$. Відомо, що правий ідеал $\sigma(A)$ є двостороннім і фактор кільце $A/\sigma(A)$ ізоморфне кільцю S. Нехай $\varphi: A\to S$ канонічний гомоморфізм, тоді з леми 3 і наслідка 2 роботи [1] випливає, що кручення $\varphi(\sigma)$ розщеплюється. З другого боку, до кручення $\varphi(\sigma)$ застосована лема 2, з якої видно, що $\varphi(\sigma)$ не розщеплюється. Одержана суперечність доводить теорему.

З теореми I з урахуванням наслідка 2 з роботи [2] випливає такий наслідок.

Наслідок I. Над кільцем без дільників нуля всяке нетривіальне зчисленно-породжене кручення з інваріантною базою не розщеплюється.

Список літератури: I. Горбачук Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. - "Матем. исследования", 1972, т.7, вып.I.
2. Горбачук Е.Л. Расщепляемость кручения и предкручения в категории правых Λ -модулей. - "Матем. заметки", 1967, т.2, №6.
3. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., "Наука", 1969. 4. Stenström B. Rings of Quotients. Berlin - New-York, Springer - Verlag, 1975.

УДК 517.94

О.О.Веселовська

ЗАГАЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО ЗАДАНОЇ ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Із загального лінійного диференціального рівняння в частинних похідних 2-го порядку

$$Lu = \sum_{0 \le \alpha+\beta \le 4} a_{\alpha\beta}(x,y) \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = 0 \qquad /1/$$

виділимо ті рівняння, які інваріантні відносно групи перетворень з оператором

$$Uf = -y^3 \frac{\partial f}{\partial x} + x^3 \frac{\partial f}{\partial y} \qquad /2/$$

Прирівнюючи в тотожності [2,4]

$$U^{(IV)} Lu \equiv 0 \qquad /3/$$

до нуля коефіцієнти при різних степенях похідних, одержуємо таку систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}
& y^3 \frac{\partial a_{40}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{40}}{\partial y} - 3y^2 a_{31} = 0; \\
& y^3 \frac{\partial a_{31}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{31}}{\partial y} + 12x^2 a_{40} + 6y^2 a_{22} = 0; \\
& y^3 \frac{\partial a_{22}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 9x^2 a_{31} - 9y^2 a_{13} = 0; \\
& y^3 \frac{\partial a_{30}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{30}}{\partial y} - 3y^2 a_{21} - 6y a_{22} = 0; \\
& y^3 \frac{\partial a_{21}}{\partial x} - x^3 \frac{\partial a_{21}}{\partial y} + 9x^2 a_{30} - 6y^2 a_{12} + 36x a_{40} - \\
& - 18y a_{13} = 0;
\end{aligned} \qquad /4/$$

$$y^3\frac{\partial a_{20}}{\partial x}-x^3\frac{\partial a_{20}}{\partial y}-3y^2a_{11}-6ya_{12}-6a_{13}=0;$$

$$y^3\frac{\partial a_{11}}{\partial x}-x^3\frac{\partial a_{11}}{\partial y}+6x^2a_{20}-6y^3a_{02}+18xa_{30}-18ya_{03}+16a_{40}-$$

$$-16a_{04}=0;$$

$$y^3\frac{\partial a_{10}}{\partial x}-x^3\frac{\partial a_{10}}{\partial y}-3y^2a_{01}-6ya_{02}-6a_{03}=0;$$

$$y^3\frac{\partial a_{00}}{\partial x}-x^3\frac{\partial a_{00}}{\partial y}=0.$$

Якщо в рівняннях відносно $a_{40}, a_{31}, a_{30}, a_{21}, a_{20}, a_{10}$ поміняємо місцями індекси, x замінимо на „–"x, x^2 на „–"y^2 а в постійних коефіцієнтах рівнянь знак "–" на "+", то одержимо рівняння відповідно для визначення $a_{04}, a_{13}, a_{03}, a_{12}, a_{02}, a_{01}$

Знаходимо загальний розв"язок системи /4/ [1,4], а отже і сукупність лінійних рівнянь у частинних похідних 4-го порядку, інваріантних відносно заданої групи перетворень з траєкторіями $x^4+y^4=a^4$. Коефіцієнти рівняння /I/ набувають вигляду:

$$a_{04}=(1+\eta^4)^{-3}\Big(\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\cdot\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\cdot\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\cdot\varphi_1\int(1+\eta^4)^{1/2}d\eta+$$

$$+\varphi_2\Big)d\eta+\varphi_3\Big)d\eta+\varphi_4\Big)d\eta+\varphi_5\Big);$$

$$a_{13}=\frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{04};\qquad a_{22}=\frac{1}{6}(1+\eta^4)\cdot a'_{13}+2\eta^2\cdot a_{04};$$

$$a_{31}=\frac{1}{9}(1+\eta^4)\cdot a'_{22}+\eta^2a_{13};\quad a_{40}=\frac{1}{12}(1+\eta^4)\cdot a'_{31}+\frac{1}{2}\eta^2\cdot a_{22};$$

$$a_{03}=(1+\eta^4)^{-\frac{9}{4}}\Big(\int(1+\eta^4)^{1/2}\cdot\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\int\Big((1+\eta^4)^{1/2}\varphi_6\,d\eta+\varphi_7\Big)d\eta+$$

$$+\varphi_8\Big)d\eta+\varphi_9\Big)+a_{03};$$

$$a_{12}=\frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{03}-\frac{2}{\sqrt{\xi}}(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{22};$$

$$a_{21}=\frac{1}{6}(1+\eta^4)\cdot a'_{12}+\frac{3}{2}\eta^2\cdot a_{03}+3\xi^{-1/4}\cdot(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{31}+$$

$$+6\xi^{-3/4}\cdot \eta\,(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{04};$$

$$a_{30}=\frac{1}{9}(1+\eta^4)\cdot a'_{21}-\frac{2}{3}\eta^2 a_{12}-4\xi^{-3/4}\cdot(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{40}+$$

$$+2\xi^{-3/4}\cdot \eta\cdot(1+\eta^4)^{1/4}\cdot a_{13};$$

$$a_{02}=(1+\eta^4)^{-3/2}\left(\int(1+\eta^4)^{1/2}\cdot\left(\varphi_{10}\int(1+\eta^4)^{1/2}d\eta+\varphi_{11}\right)d\eta+\varphi_{12}\right)+\bar{a}_{02};$$

$$a_{11}=\frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{02}-2a_{21}\,\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}-2a_{31}\cdot\xi^{-1/2}(1+\eta^4)^{1/4};$$

$$a_{20}=\frac{1}{6}(1+\eta^4)\cdot a'_{11}+a_{02}\eta^2-3a_{30}\,\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}+3a_{03}\,\eta\cdot\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}-$$

$$-4a_{40}\cdot\xi^{-1/2}\cdot(1+\eta^4)^{1/2}+4a_{04}\cdot\xi^{-1/2}\cdot(1+\eta^4)^{1/2};$$

$$a_{01}=(1+\eta^4)^{-3/4}\left(\varphi_{13}\int(1+\eta^4)^{1/2}d\eta+\varphi_{14}\right)+\bar{a}_{01};$$

$$a_{10}=\frac{1}{3}(1+\eta^4)\cdot a'_{01}-2a_{20}\,\xi^{-1/4}(1+\eta^4)^{1/4}-2a_{30}\,\xi^{-1/2}(1+\eta^4)^{1/2};$$

$$a_{00}=\varphi_{15},$$

де $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{15}$ – довільні функції від x^4+y^4; $\eta=\frac{y}{x}$, $\xi=x^4+y^4$; $\bar{a}_{03},\bar{a}_{02},\bar{a}_{01}$ – часткові розв"язки звичайних неоднорідних лінійних рівнянь відповідно 4-, 3-, 2-го порядків [3], в праві частини яких входять вже знайдені коефіцієнти з попередніх рівнянь.

Але серед рівнянь /I/, згідно з Лі [6], можуть бути і такі, коли одночасно задовольняються рівняння $U^{(n)}Lu=0,\ Lu=0$. Звідси одержимо систему рівнянь, яка збігається з системою /4/, якщо $a_{\alpha\beta}$ замінити на $\frac{a_{\alpha\beta}}{a_{00}}$. Тому і значення коефіцієнтів рівняння /I/ аналогічні попереднім, крім $a_{00}=1$.

Таким чином, із рівнянь /I/ виділено дві сукупності рівнянь, кожне з яких допускає групу перетворень з інфінітезімальним оператором /2/. Цей оператор залишає інваріантними області, обмежені контуром $x^4+y^4=a^4$.

Список літератури: І. Г ю н т е р Н.М. Интегрирование уравнений I-го порядка в частных производных. М., Гостехиздат, 1943. 2. В е с е л о в с к а я А.А. Общее линейное дифференциальное уравнение с частными производными 4-го порядка на плоскости, инвариантное относительно группы вращений. - В сб.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Институт математики АН УССР. К., 1976. 3. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1967. 4. К о с т е н к о В.Г., В е с е л о в с ь к а О.О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех-мат.", 1972, вип. 7. 5. О в с я н н и к о в Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1963. 6. Lie S. Vorlesungen über Differential-gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.512.2

Я.Г.Притула, канд.фіз.-мат.наук

АБСОЛЮТНА ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР"Є І ЧАСТКОВІ МОДУЛІ ГЛАДКОСТІ

Нехай $f(x,y)$ -майже періодична функція класу S^p /S^p м.п./, спектр якої має єдину точку згущення в нулі або на нескінченності. Ряд Фур"є її можна записати у симетричному вигляді

$$f(x,y)\sim\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{jk}e^{i(\lambda_j x+\mu_k y)}$$

$$/\lambda_{-j}=-\lambda_j,\ \mu_{-k}=-\mu_k,\ \lambda_j>0 \text{ при } j>0,\ \mu_k>0 \text{ при } k>0,$$

$$\sum_k|A_{j,k}|+|A_{-j,k}|\neq 0,\ \sum_j|A_{j,k}|+|A_{-j,k}|\neq 0/.$$

Тут послідовності $\{\lambda_j\}$ і $\{\mu_k\}$ – монотонні. Якщо $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = a$ і $\lim_{k\to\infty}\mu_k = b$, то вважатимемо, що функція $f(x,y)$ належить до класу $L_{a,b}$.

Для S^p м.п. функції $f(x,y)$, яка належить до класу $L_{\infty,\infty}$, введемо поняття часткових різниць і модулів гладкості

$$\Delta^{(0)}(x,y,h;f,1) = f(x,y);$$

$$\Delta^{(m)}(x,y,h;f,1) = \Delta^{(m-1)}(x+h,y,h;f,1) - \Delta^{(m-1)}(x-h,y,h;f,1);$$

$$m = 1,2,\ldots,$$

$$\omega_p^{(m)}(\delta;f,1) = \sup_{|h|\le\delta}\left[M\{|\Delta^{(m)}(x,y,h/2;f,1)|^p\}\right]^{1/p}.$$

Аналогічно визначаємо частковий модуль гладкості $\omega_p^{(m)}(\delta;f,2)$

Нехай S^p м.п. функція $f(x,y)$ належить до класу $L_{0,0}$. Для неї визначимо $\tilde{\Delta}^{(0)}(x,y,h;f,1) = f(x,y)$,

$$\tilde{\Delta}^{(m)}(x,y,h;f,1) = h\int_0^\infty e^{-hs}\Delta^{(m-1)}(x-s,y,h;f,1)\,ds,$$

$$\tilde{\omega}_p^{(m)}(h;f,1) = \left[M\{|\tilde{\Delta}^{(m)}(x,y,h;f,1)|^p\}\right]^{1/p}.$$

Аналогічно розглядаємо величину $\tilde{\omega}_p^{(m)}(h;f,2)$

Введемо ще такі позначення:

$$K(m) = \max_{\lambda_j\le m} j \quad i \quad M(n) = \max_{\mu_k\le m} k \quad, \text{ якщо } f(x,y)\in L_{\infty,\infty},$$

$$K(m) = \max_{\lambda_j\ge m} j \quad i \quad M(n) = \max_{\mu_k\ge m} k \quad, \text{ якщо } f(x,y)\in L_{0,0}$$

Тут розглянуто умови збіжності ряду

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|A_{j,k}|^{\beta},\quad 0<\beta<q,\quad 1/p+1/q=1 \qquad /1/$$

Справедливі такі теореми.

<u>Теорема 1</u>. Якщо для S^p м.п. функції $f(x,y)$ $/1<p\le 2/$ з класу $L_{\infty,\infty}$ збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{M(2^{n+1})[K(2^{n+1})-K(2^n)]\}^{1-\beta/q}\left[\omega_p^{(m)}(2^{-n};f,1)\right]^{\beta},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{K(2^{n+1})[M(2^{n+1})-M(2^{n})]\}^{1-\beta/q}[\omega_p^m(2^{-n};f,2)]^{\beta},$$

тоді ряд /І/ збігається.

Теорема 2. Якщо для S^p м.п. функції $f(x,y)$ $/1<p\le 2/$ з класу $L_{0,0}$ збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{M(2^{-(n+1)})[K(2^{-(n+1)})-K(2^{-n})]\}^{1-\beta/q}[\tilde{\omega}_p^{(m)}(2^{-n};f,1)]^{\beta}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{K(2^{-(n+1)})[M(2^{-(n+1)})-M(2^{-n})]\}^{1-\beta/q}[\tilde{\omega}_p^{(m)}(2^{-n};f,2)]^{\beta}$$

тоді ряд /І/ збігається.

Теорема 3. Якщо для S^p м.п. функції $f(x,y)$ $/1<p\le 2/$ з класу $L_{0,0}$ збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n(1-\beta/q)}[\tilde{\omega}_p^{(m)}(\lambda_{2^n};f,1)]^{\beta},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n(1-\beta/q)}[\tilde{\omega}_p^{(m)}(\mu_{2^n};f,1)]^{\beta},$$

то ряд /І/ збігається.

Для функцій з класів $L_{\infty,0}$ і $L_{0,\infty}$ справедливі теореми аналогічні теоремам I,2.

У випадку періодичної функції $f(x,y)$ результат теореми I одержав М.Ф.Тіман*.

У доведенні теорем використовуємо рівність

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|A_{j,k}|^{\beta}=\sum_{|\lambda_j|\le 1}\sum_{|\mu_k|\le 1}|A_{j,k}|^{\beta}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in D_n}\sum_{k\in E_n}|A_{j,k}|^{\beta}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in B_n}\sum_{k\in F_n}|A_{j,k}|^{\beta},$$

де у випадку функції з класу $L_{\infty,\infty}$

$$B_n=\{j:2^n<|\lambda_j|\le 2^{n+1}\},\quad E_n=\{k:2^n<|\mu_k|\le 2^{n+1}\},$$

$$D_n=\{j:0\le|\lambda_j|<2^{n+1}\},\quad F_n=\{k:0\le|\mu_k|\le 2^n\}.$$

---

* Т и м а н Н.Ф. Частные наилучшие приближения функции, абсолютная сходимость рядов Фурье и ядерность интегральных операторов Гильберта-Шмидта. - "Математический сборник", 1968, т.75 /117/3.

Суми виду

$$\sum_{j\in D_n}\sum_{k\in E_n}|A_{j,k}|^{\beta}$$

оцінюємо, використовуючи нерівності Хаусдорфа-Юнга і Гельдера.

УДК 517.9

Л.О.Старокадомський

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШЕВА

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку з поліноміальними коефіцієнтами на проміжку $[0,1]$

$$L_n(y)=0, \qquad /1/$$

розв"язок якого задовольняє n початкові або крайові умови.

Серед численних методів наближенного розв"язку таких рівнянь помітне місце займають розв"язки, в яких $y(x)$ шукається за допомогою поліномів з невизначеними коефіцієнтами. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що залежно від структури рівняння /1/, типу його особливої точки /нехай це буде нульова точка/ вказані поліноми можуть бути введені через вирази Y вигляду

$$P_k(x);\ e^{\alpha x}P_k(x);\ x^{\mu}P_k(x);\ ln^{\nu} x\, P_k(x), \qquad /2/$$

де α, μ, ν - деякі сталі; $P_k(x)$ - поліном степення k [2]. При підстановці виразів /2/ в рівняння /1/ одержимо знову вирази вигляду /2/, де P_k заміняється поліномами $Q_N(x)$, коефіцієнти яких залежать від α або μ, або ν і від коефіцієнтів $P_k(x)$. Похибка $L_N(Y)$, з якою задовольнятиметься рівняння /1/, буде залежати, таким чином, від $Q_N(x)$

Прирівнюємо $L_n(Y)$ добуткові $e^{\lambda x}$ /або x^{μ}, або $\ln^{\nu} x$ у відповідності з виглядом Y /на $c_0 T_N^*(x) + c_1 T_{N-1}^*(x) + \dots + c_{N-K} T_K^*(x)$, де $T_N^*(x)$ так званий зміщений до проміжку $[0,1]$ поліном Чебишева I-го роду, поділений на 2^{2N-1}. Тоді

$$Q_N = c_0 T_N^* + \dots + c_{N-K} T_K. \qquad /3/$$

Це рівняння приведе до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих $c_0, c_1, \dots, c_{N-K}$ і коефіцієнтів $P_K(x)$.

Може бути три випадки:

1/ Одержана система матиме розв"язок при $Q_N = 0$ /при $c_0 = \dots = c_{N-K} = 0$/. Це відповідає випадку, коли точний розв"язок рівняння /I/ може бути знайдено у вигляді /2/, наприклад, при $N < K$ /.

2/ Вказана система матиме розв"язок при $c_1 = \dots = c_{N-K} = 0$, тобто при $Q_N = c_0 T_N^*$ /наприклад, при $N = K$ /. У цьому випадку буде забезпечено найліпше в чебишевському розумінні наближення до нуля /порядку 2^{1-2N} / похибки $L_n(Y)$ /точніше її частини Q_N /.

3/ При $N > K$ ніяким вибором коефіцієнтів полінома $P_K(x)$ не можна звести Q_N до T_N^*, таким чином, прямування $L_N(Y)$ до нуля на $[0,1]$ може бути оцінено величиною $c \cdot 2^{1-2K}$, де $c = \max\{c_0, \dots, c_{N-K}\}$. Зазначимо, що в усіх випадках можна одержати точну оцінку похибки, з якою задовольняється рівняння /I/. Знаходячи описаним вище методом наближені часткові розв"язки $Y_1, \dots, Y_n$, можна побудувати наближений загальний розв"язок $\bar{y} = c_1 Y_1 + \dots + c_n Y_n$, де $c_1, \dots, c_n$ визначається з умов точного задовільнення початкових або крайових умов.

З теорії диференціальних рівнянь випливає, що наближений розв"язок прямуватиме до точного при $K \to \infty$, бо $L_n(y) \to 0$ при $K \to \infty$ /2/. Природно і те, що наближений розв"язок $\bar{y}$, який одержується згідно з запропонованим методом виявляється, як правило, більш точним, ніж при розв"язанні /I/ іншими методами /наприклад, методом степеневих рядів/.

Зауваження. При відсутності в розв"язку Y членів з x^{μ} або $\ln^{\nu}(x)$ можна для одержання незалежних розв"язків $Y_1, \ldots, Y_n$ практикувати підбір сталих $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ у виразі $e^{\alpha x} P_\kappa(x)$, виходячи з міркувань зручності. Наприклад, можна прийняти $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ і т.п. Наведемо приклади:

I. Точний розв"язок рівняння

$$y'' - xy' - Ay = 0; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y_0' \qquad /4/$$

такий:

$$y = c_1\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A(A+2)\ldots(A+2n-2)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + c_2\left(x + \sum_{n=1}^{\infty}(A+1)\ldots(A+2n-1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Для одержання наближеного розв"язку приймаємо

$$Y = e^{\alpha x} P_3; \quad P_3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

прирівнюємо $e^{\alpha x} Q_4(x) = e^{\alpha x}[c_0 T_4^* + c_1 T_3^*]$ і, порівнюючи у цій рівності коефіцієнти при однакових степенях x, приходимо до системи

$$\begin{cases} (\alpha^2 - A)a_0 + 2\alpha a_1 + 2\alpha a_2 = -\frac{1}{32}c_1 + \frac{1}{128}c_0, \\ -\alpha a_0 + (\alpha^2 - 1 - A)a_1 + 4\alpha a_2 + 6a_3 = \frac{9}{16}c_1 - \frac{1}{4}c_0, \\ -\alpha a_1 + (\alpha^2 - 2 - A)a_2 + 3\alpha a_3 = -\frac{3}{2}c_1 + \frac{5}{4}c_0, \\ -\alpha a_2 + (\alpha^2 - 3 - A)a_3 = c_1 - 2c_0, \\ -\alpha a_3 = c_0 \end{cases}$$

Приймемо перший раз $\alpha = 0$, а другий $\alpha = -1$. У першому випадку одержимо $c_{10} = c_0 = 0$ і при $A \neq -3, -2, -1, 0$ виразимо $a_0, \ldots, a_3$ через $c_{11} = c_1$. Ці коефіцієнти визначають $Y_1 = c_{11} P_{13}$. /При $A = -3, -2, -1, 0$ буде $c_{11} = 0$ і, таким чином, визначаються коефіцієнти полінома $P_2(x)$, який є точним розв"язком рівняння /4//.

У другому випадку з /5/ через $C_{20}=C_0$ визначається $a_0,\dots,a_3$ і c_{21}, так що $Y_2=c_{20}e^{-x}P_{23}(x)$. Загальний розв"язок буде $Y=c_{11}P_{13}(x)+c_{20}e^{-x}P_{23}(x)$. Визначивши C_{11} і C_{20} з початкових умов, одержимо наближений розв"язок задачі /4/ і точну оцінку похибки, з якою задовольняється рівняння /4/

$$\Delta=\left|c_{11}T_3^*(x)+e^{-x}\left(c_{20}T_4^*(x)+c_{21}T_3^*(x)\right)\right|=\left|-\frac{1}{32}c_{11}+e^{-x}\left(\frac{1}{128}c_{20}-\frac{1}{32}c_{21}\right)\right| ,$$

де C_{11}, C_{20}, C_{21} – відомі числа. Точність наближеного розв"язку одержується, природно, вищою ніж при розв"язанні /4/, наприклад, методом степеневих рядів. При $A=1$, $y_0=1$, $y_0'=0$ відносна похибка Y не перевищує 0,8%, а методом степеневих рядів – 8%.

2. Точний розв"язок рівняння

$$16x^2y''+(4x+3)y=0$$

такий [1]

$$y=x^{1/4}\left(c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x}\right)$$

Приймаємо $Y_i=x^{\frac{2i-1}{4}}(a_i+b_ix)$, $i=1,2$. Визначивши a_i, b_i одержуємо при $y(1)=1$; $y'(1)=0$, що відносна похибка Y становить 0,3%, тоді як методом степеневих рядів 1,2%.

Список літератури: 1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., ИЛ. 1950. 2. С т е п а н о в В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., "Наука", 1966.

П Р И К Л А Д Н А М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.21

І.Д.Квіт, канд.фіз.-мат.наук

ЗВОРОТНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВІДБИТТЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу

$$F(t),\quad t>0;\qquad F(0)=0;\quad \int_0^\infty dF(t)=1 \qquad /1/$$

та відбиття

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}dF(t), \quad (z=x+iy\ ,\ i=\sqrt{-1}), \qquad /2/$$

що є аналітичною функцією принаймні в смузі

$$1-\alpha<x<1+\beta\ ,\ (\alpha>0\ ,\ \beta>0). \qquad /3/$$

Із теорії функцій [2] відомо, що коли $c>0$, то при $a>0$ головне значення інтеграла

$$\Delta(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z}dz=\begin{cases}0\ , & 0<a<1\\ \frac{1}{2}\ , & a=1\\ 1\ , & a>1\end{cases}=\frac{sgn(a-1)+1}{2}\ , \qquad /4/$$

де

$$sgn\,\gamma=\begin{cases}-1\ , & \gamma<0\ ,\\ 0\ , & \gamma=0\ ,\\ +1\ , & \gamma>0.\end{cases}$$

Відзначимо, що функція /4/ в околі неодиниці набуває єдиного значення, а в околі одиниці - три значення. Надалі значення функції /4/ при одиничній вартості аргумента не буде потрібне. Треба буде щонайвище значення справа або зліва від одиниці. Тому замість /4/ символічно писатимемо:

$$\Delta(a+0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(a+0)^z}{z}dz=\begin{cases}0, & 0<a<1\\ 1\ , & a>1\end{cases}=\frac{sgn(a+0-1)+1}{2}\ , \qquad /5/$$

або

$$\Delta(a-0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(a-0)^z}{z}dz=\begin{cases}0, & 0<a\leq 1\\ 1, & a>1\end{cases}=\frac{sgn(a-0-1)+1}{2}\ . \qquad /6/$$

Функція /5/ неперервна справа, а /6/ – зліва. Зрозуміло, що при $t>0$

$$\Delta\left(\frac{a}{t}+0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{a}{t}+0\right)^{z}}{z}dz=\begin{Bmatrix}0, & 0<a<t\\ 1, & a>t>0\end{Bmatrix}=\frac{sgn\left(\frac{a}{t}+0-1\right)+1}{2} \qquad /7/$$

та

$$\Delta\left(\frac{a}{t}-0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{a}{t}-0\right)^{z}}{z}dz=\begin{Bmatrix}0, & 0<a<t\\ 1, & a>t>0\end{Bmatrix}=\frac{sgn\left(\frac{a}{t}-0-1\right)+1}{2}. \qquad /8/$$

Означення I. Інтервальним обмежником називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $(a,b]\in(0,\infty)$ дорівнює одиниці, а зовні нього – нулю.

Наприклад, інтервальним обмежником є вираз

$$R(a,b]=\Delta\left(\frac{b}{t}+0\right)-\Delta\left(\frac{a}{t}+0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{b}{t}+0\right)^{z}-\left(\frac{a}{t}+0\right)^{z}}{z}dz= \qquad /9/$$

$$=\begin{Bmatrix}0, & 0<t\le a,\ t>b\\ 1, & a<t\le b\end{Bmatrix}=\frac{sgn\left(\frac{b}{t}+0-1\right)-sgn\left(\frac{a}{t}+0-1\right)}{2}.$$

Обмежник /9/ – функція неперервна зліва.

Означення 2. Точковим обмежником називаємо довільну функцію, яка в одному пункті $\omega\in(0,\infty)$ дорівнює одиниці, а зовні нього – нулю.

Наприклад, точковим обмежником є вираз

$$R[\omega]=\Delta\left(\frac{\omega}{t}+0\right)-\Delta\left(\frac{\omega}{t}-0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{\omega}{t}+0\right)^{z}-\left(\frac{\omega}{t}-0\right)^{z}}{z}dz= \qquad /10/$$

$$=\begin{Bmatrix}0, & 0<t<\omega,\ t>\omega\\ 1, & t=\omega\end{Bmatrix}=\frac{sgn\left(\frac{\omega}{t}+0-1\right)-sgn\left(\frac{\omega}{t}-0-1\right)}{2}.$$

Зворотна формула. Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу /1/ та відбиття /2/ в смузі /3/. Тоді приріст функції розподілу на інтервалі $(a,b]$, де $0<a<b<\infty$, дорівнює головному значенню інтеграла вздовж прямої $Re\,z=c$ $max(0,1-\lambda)<c<1$ від добутку відбиття на ядро

$$N(z;a,b)=\frac{(b+0)^{1-z}-(a+0)^{1-z}}{2\pi i(1-z)},$$

тобто

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(b+0)^{1-z}-(a+0)^{1-z}}{1-z}\varphi(z)\,dz\,. \qquad /11/$$

<u>Доведення.</u> Коли врахувати /2/, то правий бік /11/ можна записати у вигляді подвійного інтеграла

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{(b+0)^{1-z}-(a+0)^{1-z}}{2\pi i(1-z)}\int\limits_0^\infty t^{z-1}\,dF(t)\,dz\,. \qquad /12/$$

Оскільки в /12/ інтеграл відносно t абсолютно збігається для z зі смуги /3/ і, зокрема, для z на прямій $Re\,z=c$, $max(0,1-\alpha)<c<1$, а відносно z межі інтеграла скінченні, то змінимо черговість інтегрування. Одержуємо

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{b}{t}+0\right)^{1-z}-\left(\frac{a}{t}+0\right)^{1-z}}{1-z}\,dz\right\}dF(t)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1-c)-iT}^{(1-c)+iT}\frac{\left(\frac{b}{t}+0\right)^{\zeta}-\left(\frac{a}{t}+0\right)^{\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\right\}dF(t),\; 0<1-c<min(1,\alpha).$$

Границя останнього внутрішнього інтеграла існує та збігається з /9/. Отже маємо

$$\int\limits_0^\infty R(a,b]\,dF(t)=\int\limits_a^b dF(t)\;=F(b)-F(a)\;-$$

лівий бік /11/. Зворотна формула /11/ - доведена. Відзначимо, що методично вивід зворотної формули для відбиття аналогічний до відповідного виводу зворотної формули для характеристичної функції [1].

Першим безпосереднім наслідком зворотної формули /11/ є теорема єдиності. Відбиття /2/ в смузі /3/ однозначно визначає свою функцію розподілу /I/, причому

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(t+0)^{1-z}}{1-z}\varphi(z)dz,\ max(0,1-\alpha)<c<1,\ t>0. \qquad /I3/$$

Для доведення співвідношення /I3/ досить у зворотній формулі /II/ замість b прийняти t і спрямувати a до нуля.

Другим безпосереднім наслідком зворотної формули /II/ є теорема про величину стрибка функції розподілу в точці. Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу /I/ та відбиття /2/ в смузі /3/. Тоді стрибок функції розподілу в пункті $\omega\in(0,\infty)$ дорівнює

$$F(\omega+0)-F(\omega-0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(\omega+0)^{1-z}-(\omega-0)^{1-z}}{1-z}\varphi(z)dz,\ max(0,1-\alpha)<c<1. \qquad /I4/$$

Для доведення співвідношення /I4/ досить у зворотній формулі /II/ замість b прийняти $\omega+0$, замість a – $\omega-0$ і повторити доведення /II/. При цьому замість обмежника /9/ зустрінеться точковий обмежник /I0/. Правий бік /I4/ зводиться до виразу

$$\int_0^\infty R[\omega]\,dF(t)=\int_{t=\omega}dF(t)=F(\omega+0)-F(\omega-0).$$

Формальним посереднім наслідком зворотної формули /II/ є зворотна формула Мелліна [3]. Якщо додатна випадкова змінна ξ абсолютно неперервна та має густину $f(t)$, $t>0$, то співвідношення /2/ /якщо існує/ набуває вигляду

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}f(t)dt,\quad 1-\alpha<Re\,z<1+\beta, \qquad /I5/$$

і зі співвідношення /I3/ формально дістаємо

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{-z}\varphi(z)dz,\quad t>0. \qquad /I6/$$

Оскільки інтеграл /I6/ не залежить від вибору сталої c з інтервалу $(1-\alpha,1+\beta)$, то можна прийняти $c=1$. Таким чином, майже всюди

$$p(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} t^{-z}\varphi(z)\,dz\ ,\ t>0\ . \qquad /17/$$

Якщо $\varphi(z)$ – мероморфна функція, то для обчислення інтеграла /17/ при $0<t<1$ використовуємо контур лівого півкола з центром в точці $c=1$, замкнений діаметром, а при $t>1$ – контур правого півкола і теорему про залишки.

Для ілюстрації формул /13/, /14/ і /17/ розглянемо приклади.

Нехай відбиття

$$\varphi(z)=\lambda^{1-z}\,\Gamma(z),\ \ Re\,z>0\ ,\ (\lambda>0).$$

Знайти відповідну функцію розподілу ймовірностей.

Оскільки

$$\underset{z=-l}{res}\,\Gamma(z)=\frac{(-1)^l}{l!}\ ,\quad (l=0,1,2,\dots),$$

то за формулою /13/, при $t>0$ та $0<c<1$, маємо

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(\lambda t+0)^{1-z}}{1-z}\Gamma(z)\,dz=\sum_{l=0}^{\infty}\underset{z=-l}{res}\left\{\frac{(\lambda t+0)^{1-z}}{1-z}\Gamma(z)\right\}=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\lambda t+0)^{l+1}}{l+1}\cdot\frac{(-1)^l}{l!}=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\lambda t)^{l+1}}{(l+1)!}=1-e^{-\lambda t}.$$

Нехай відбиття

$$\varphi(z)=\frac{a^{z-1}+2b^{z-1}}{3}\ ,Re\,z>-\infty\,(0<a<b)\,.$$

Знайти величину стрибка відповідної функції розподілу в пункті $\omega=b$.

За формулою /14/ при $0<c<1$, використовуючи /5/ і /6/, маємо

$$F(b+0)-F(b-0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(\frac{b}{a}+0)^{1-z}-(\frac{b}{a}-0)^{1-z}}{1-z}dz+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(1+0)^{1-z}-(1-0)^{1-z}}{1-z}dz=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{sgn(\frac{b}{a}+0-1)-sgn(\frac{b}{a}-0-1)}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{sgn(+0)-sgn(-0)}{2}=\frac{2}{3}\,.$$

Нехай відбиття

$$\varphi(z)=\frac{\alpha^2}{(z+\alpha-1)(1+\alpha-z)},\ 1-\alpha<\operatorname{Re} z<1+\alpha \quad (\alpha>0).$$

Знайти відповідну густину розподілу ймовірностей.

Оскільки відбиття є мероморфною функцією, то за формулою /17/ маємо

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{\alpha^2 t^{-z}\,dz}{(z+\alpha-1)(1+\alpha-z)}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2t^{1-\alpha}}, & 0<t<1,\\[2ex] \dfrac{\alpha}{2t^{1+\alpha}}, & t>1,\ \alpha>0.\end{cases}$$

Це густина добутку двох незалежних випадкових змінних: одна з густиною $\alpha t^{\alpha-1}$, $0<t<1$, $\alpha>0$, а друга - обернена величина цієї випадкової змінної.

Список літератури: 1. К в і т І.Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. - "Вісник Львів. ун-ту, сер.мех.-мат.", 1971, вип.6. 2. Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. М.-Л., Гостехиздат, 1951. 3. Mellin Hj. Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. - "Acta Mathematica", 1902, 25.

УДК 519.21

І.Д.Квіт, канд.фіз.-мат.наук, В.М.Косарчин, канд.фіз.-мат.наук

ЕКСПОНЕНТНІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РОЗПОДІЛИ. ВІДБИТТЯ ТА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ

1. Нехай додатна випадкова змінна ξ має функцію розподілу

$$P\{\xi\le t\}=F(t),\ t>0;\quad F(0)=0. \qquad /1/$$

Тоді випадкова змінна $\eta=\ln\xi$ називається е к с п о н е н т н о ю та має функцію розподілу

$$G(\tau)=P\{\eta\le\tau\}=P\{\xi\le e^{\tau}\}=F(e^{\tau}),\ -\infty<\tau<\infty\ . \qquad /2/$$

Зокрема, якщо ξ має густину

$$f(t)=F'(t)\ ,\quad t>0\ , \qquad /3/$$

то густина відповідної експонентної випадкової змінної дорівнює

$$g(\tau)=e^{\tau}f(e^{\tau}),\ -\infty<\tau<\infty\ . \qquad /4/$$

Позначимо через Φ клас тих додатних випадкових змінних, що мають відбиття

$$\varphi(z)=E\,\xi^{z-1}=\int_0^\infty t^{z-1}dF(t),\ 1-\alpha<\mathrm{Re}\,z<1+\beta,\ (\alpha>0,\ \beta>0)\ . \qquad /5/$$

Із аналітичності відбиття /5/ випливає існування похідних усіх порядків

$$\varphi^{\kappa}(z)=\int_0^\infty t^{z-1}(\ln t)^{\kappa}dF(t),\ 1-\alpha<\mathrm{Re}\,z<1+\beta\ ,\ (\kappa=1,2,\dots) \qquad /6/$$

та розкладу в ряд Тейлора

$$\varphi(z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(\kappa)}(1)}{\kappa!}\,(z-1)^{\kappa} \qquad /7/$$

у деякому околі точки $z=1$. Радіус збіжності ряду /7/ дорівнює $\min(\alpha,\beta)$.

Натуральний початковий момент порядку κ експонентної випадкової змінної з функцією розподілу /2/ формально дорівнює

$$m_{\kappa}=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\kappa}dG(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\kappa}dF(e^{\tau})=\int_0^\infty(\ln t)^{\kappa}dF(t),\ (\kappa=1,2,\dots)\ . \qquad /8/$$

Порівнюючи вирази /8/ та /6/, бачимо, що коли в додатної випадкової змінної наявне відбиття /5/, то відповідна експонентна випадкова змінна має натуральні початкові моменти /9/ всіх порядків, причому

$$m_{\kappa}=\varphi^{(\kappa)}(1)\qquad(\kappa=1,2,\dots)\ . \qquad /9/$$

З огляду на рівномірну збіжність ряду /7/ в околі точки $z=1$ розподіл /2/ однозначно визначається своїми моментами /порівн.[2] /.

Таким чином, кожній додатній випадковій змінній ξ з функцією розподілу /1/ однозначно відповідає експонентна випадкова змінна $\eta=\ln\xi$ з функцією розподілу /2/. При цьому, якщо ξ має відбиття /5/, $\xi\in\Phi$, то $\ln\xi$ має моменти /8/ всіх порядків і для розподілу /2/ проблема моментів означена.

Приклад. Випадкова змінна Парето має функцію розподілу

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ 1-\frac{1}{t^{\lambda}}, & 1\le t \quad (\lambda>0),\end{cases}$$

і відбиття

$$\varphi(z)=\frac{\lambda}{1+\lambda-z}, \quad \operatorname{Re} z<1+\lambda .$$

Відповідна експонентна випадкова змінна має функцію розподілу

$$G(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<0,\\ 1-e^{-\lambda\tau}, & 0\le\tau, \quad (\lambda>0),\end{cases}$$

і натуральні початкові моменти

$$m_k=\frac{k!}{\lambda^k}, \quad (k=1,2,\dots).$$

Моменти m_k однозначно визначають розподіл $G(\tau)$.

2. Нехай випадкова змінна η має функцію розподілу

$$P\{\eta\le\tau\}=G(\tau), \; -\infty<\tau<\infty . \qquad /10/$$

Тоді випадкова змінна $\xi=e^{\eta}$ називається логарифмічною та має функцію розподілу

$$F(t)=0,\; t\le 0;\; F(t)=P\{\xi\le t\}=P\{\eta\le\ln t\}=G(\ln t),\; t>0 . \qquad /11/$$

Зокрема, якщо η має густину

$$g(\tau)=G'(\tau), \; -\infty<\tau<\infty, \qquad /12/$$

то густина відповідної логарифмічної випадкової змінної дорівнює

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \frac{1}{t}\,g(\ln t), & t>0.\end{cases} \qquad /13/$$

Позначимо через M клас тих випадкових змінних, для яких існують натуральні початкові моменти всіх порядків

$$m_k = E\eta^k = \int_{-\infty}^{\infty}\tau^k dG(\tau)\ ,\ (k=1,2,\ldots), \qquad /14/$$

і абсолютні моменти

$$M_k = E|\eta|^k = \int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^k dG(\tau)\ ,\ (k=1,2,\ldots), \qquad /15/$$

виконують умову

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{k}M_k^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{e\gamma} < \infty\ ,\ \gamma>0. \qquad /16/$$

З умови /16/ випливає, що функція розподілу /10/ однозначно визначається своїми моментами /14/ /порівн. [3] / і ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}(z-1)^k, \qquad /17/$$

що має радіус збіжності γ , представляє функцію аналітичну принаймні в смузі

$$1-\gamma < \mathrm{Re}\,z < 1+\gamma\ ,\ \gamma>0\ . \qquad /18/$$

Відбиття логарифмічної випадкової змінної з функцією розподілу /11/ формально дорівнює

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty}t^{z-1}dF(t) = \int_0^{\infty}t^{z-1}dG(\ln t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{(z-1)\tau}dG(\tau)\ . \qquad /19/$$

Формально упохіднюючи співвідношення /19/, одержуємо

$$\varphi^{k}(z) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{(z-1)\tau}\tau^k dG(\tau)\ ,\ \ (k=1,2,\ldots)\ . \qquad /20/$$

Порівнюючи вирази /20/ і /14/, бачимо, що

$$\varphi^{(k)}(1) = m_k, \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{21}$$

і далі з /17/ випливає, що функція /19/ аналітична принаймні в смузі /18/. Отже, упохіднювання функції /19/ в околі точки $z = 1$ обґрунтоване.

Таким чином, кожній випадковій змінній η з функцією розподілу /10/ однозначно відповідає логарифмічна випадкова змінна $\xi = e^{\eta}$ з функцією розподілу /11/. При цьому, якщо η має моменти /14/, що задовольняють умову /16/, то e^{η} має відбиття /17/, аналітичне принаймні в смузі /18/. Коротко, коли $\eta \in M$, то $e^{\eta} \in \Phi$.

<u>Приклад</u>. Нормальній випадковій змінній з густиною

$$g(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\tau-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < \tau < \infty, \ (-\infty < a < \infty, \ \sigma > 0)$$

і початковими моментами

$$m_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_k^{2j} (2\sigma^2)^j a^{k-2j} \Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right), \quad (k = 1, 2, \dots)$$

відповідає логарифмічно нормальна випадкова змінна з густиною

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 < t$$

і відбиттям

$$\varphi(z) = e^{a(z-1) + \frac{\sigma^2}{2}(z-1)^2}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z.$$

3. На основі п.1 і 2 приходимо до таких висновків:

1/ Множина всіх випадкових змінних збігається з множиною $\mathcal{E}$ експонентних випадкових змінних.

2/ Множина додатних випадкових змінних збігається з множиною $\mathcal{L}$ логарифмічних випадкових змінних.

3/ Між елементами множини $\mathcal{E}$ та $\mathcal{L}$ існує взаємнооднозначна відповідність, що встановлюється формулами /1/, /2/ і /10/, /11/ або /3/, /4/ і /12/, /13/, якщо існує густина.

4/ Клас M є властивою частиною множини $\mathcal{E}$, а клас Φ – множини $\mathcal{L}$; $M \subset \mathcal{E}$, $\Phi \subset \mathcal{L}$.

5/ Якщо випадкова змінна $\eta \in M$, то випадкова змінна $e^{\eta} \in \Phi$.

6/ Коли випадкова змінна $\eta \in M$, то за YY моментами /I4/ відновлюється розподіл /I0/. Справді, послідовність моментів /I4/, яка задовольняє умову /I6/, визначає аналітичну функцію /I7/ в смузі /I8/. Звідси, за зворотною формою для відбиття /порівн. [I] / одержуємо розподіл /I/ відповідної логарифмічної змінної. Далі, з розподілу /I/ випливає розподіл /2/, що буде потрібним розподілом /I0/.

7/ Двояке представлення моментів /8/ і /9/ може послужити для обчислення деяких інтегралів.

8/ Коли випадкова змінна не має всіх моментів, або для неї проблема моментів неозначена, то відповідна логарифмічна змінна не має відбиття.

9/ Із відповідності, якщо $\eta \in M$, то $e^{\eta} \in \Phi$, випливає, що твердження про розподіли в класі M мають дуальні аналоги в класі Φ.

<u>Приклади.</u> а/ при фіксованому $\lambda = np$ логарифмічно біномний розподіл збігається до логарифмічно пуассонівського

$$\left(pe^{z-1}+q\right)^n = \left[1+\frac{\lambda(e^{z-1}-1)}{n}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda(e^{z-1}-1)}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z;$$

б/ розподіл логарифмічно біномної випадкової змінної відповідно центрованої та нормованої збігається до стандартно логарифмічно нормального розподілу

$$e^{-(z-1)\sqrt{\frac{np}{q}}}\left(pe^{\frac{z-1}{\sqrt{npq}}}+q\right)^n = \left[1+\frac{\frac{1}{2}(z-1)^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{1}{2}(z-1)^2}, \quad -\infty < \operatorname{Re} z;$$

в/ добуток незалежних логарифмічно біномних змінних з однаковим параметром p та відповідними параметрами $n_1, n_2, \dots, n_k$, також логарифмічно біномна змінна /з параметрами p і $n = n_1+n_2+\dots+n_k$;

г/ добуток незалежних логарифмічно пуассонівських змінних з параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, також логарифмічно пуасонівська змінна /з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ /;

д/ добуток незалежних логарифмічно нормальних випадкових змінних з параметрами $(a_1, \sigma_1^2), (a_2, \sigma_2^2), \ldots, (a_k \sigma_k^2)$, також логарифмічно нормальна змінна /з параметрами $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ та $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2$ /.

Зрозуміло, що при відповідних умовах, теореми про граничні розподіли для сум незалежних випадкових змінних мають аналоги для добутків.

Список літератури: I. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. У цьому ж Віснику. 2. Ф е л л е р В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М., "Мир", 1967. 3. Shohat J. A., Tamarkin J.D. The Problem of Moments, 1943, N.Y.

УДК 519.95

М.Я.Бартіш, канд.фіз.-мат.наук, М.Г.Стащук

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Розглянемо задачу мінімізації неперервно диференційованої функції $(f(x) \in C^1(E_n))$:

$$f : E_n \longrightarrow E_1 .$$

Найбільш поширеними методами розв"язування цієї задачі є градієнтні методи і методи типу Ньютона [3]. Градієнтні методи досить прості, однак збігаються зі швидкістю геометричної прогресії, що вимагає для їх реалізації багато машинного часу. Методи типу Ньютона, навпаки, мають квадратичну збіжність, але складніші при реалізації. На практиці часто використовують модифікації методів, які локально переходять в методи типу Ньютона /сюди належить метод Ньютона з регулюванням кроку/.

Ми пропонуємо один із методів розв"язування задачі мінімізації, який за кількістю обчислень на кожній ітерації близький до градієнтного методу, а за швидкістю збіжності – до методу Ньютона.

Розглянемо метод

$$\tilde{x}_k = x_k - h_k \nabla f(x_k), \quad (\nabla f(x_k), \nabla f(\tilde{x}_k)) > 0,$$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(\tilde{x}_k), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

де $h_k = \theta \beta_k$, $0 < \theta < 1$. Параметри β_k, λ_k вибираємо з умови мінімуму функцій

$$G_k(\beta_k) = \min_{\beta > 0} G_k(\beta), \qquad /2/$$

де

$$G_k(\beta) = f(x_k - \beta \nabla f(x_k));$$

$$g_k(\lambda_k) = \min_{\lambda > 0} g_k(\lambda), \qquad /3/$$

де

$$g_k(\lambda) = f(x_k - \lambda \nabla f(\tilde{x}_k)).$$

<u>Теорема.</u> Нехай випукла функція $f(x) \in C^1(E_n)$, $\inf\limits_{x \in E_n} f(x) = f^* > -\infty$ і градієнт $\nabla f(x)$ задовольняють умову Ліпшиця

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \le R\|x - y\|, \quad R - const > 0$$

x_0 – довільна фіксована точка і послідовність $\{x_k\}$, одержана запропонованим вище методом. Тоді $\lim\limits_{k \to \infty} \nabla f(x_k) = 0$.

<u>Доведення.</u> Якщо при $k \ge 0$ виявиться $\nabla f(x_k) = 0$, то із запропонованого методу видно, що $x_k = x_{k+1} = \cdots$. У цьому випадку твердження стає тривіальним $\lim\limits_{k \to \infty} \nabla f(x_k) = 0$. Вважаємо $\nabla f(x_k) \ne 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тому що

$$f(x_{k+1}) = g_k(\lambda_k) = f(x_k - \lambda_k \nabla f(\tilde{x}_k)) \le g_k(\lambda) = f(x_k - \lambda \nabla f(\tilde{x}_k))$$

при всіх $\lambda > 0$, то, використовуючи лему з роботи [1], записуємо

$$f(x_k)-f(x_{k+1}) \geq f(x_k)-f(x_k-\lambda\nabla f(\tilde{x}_k)) \geq \lambda(\nabla f(x_k),\nabla f(\tilde{x}_k)) -$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}R\|\nabla f(\tilde{x}_k)\|^2 .$$

Очевидно

$$f(x_k)-f(x_{k+1}) \geq \max_{\lambda>0}\left\{\lambda\alpha_k\|\nabla f(x_k)\|\|\nabla f(\tilde{x}_k)\| - \frac{\lambda^2}{2}R\|\nabla f(\tilde{x}_k)\|^2\right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\alpha_k^2}{R}\|\nabla f(x_k)\|^2 > 0,$$

де

$$\alpha_k=\frac{(\nabla f(x_k),\nabla f(\tilde{x}_k))}{\|\nabla f(x_k)\|\|\nabla f(\tilde{x}_k)\|} .$$

Звідси видно, що послідовність $\{f(x_k)\}$ строго спадає. Тому що

$\inf_{x\in E_n} f(x) = f^* > -\infty,$ то $f(x_k)-f(x_{k+1}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Тоді $\lim_{k\to\infty}\nabla f(x_k)=0.$

Теорема доведена.

Оцінку швидкості збіжності розглянемо для простішого випадку, а саме, для квадратичної форми $f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)$, де A - симетрична додатно визначена матриця; M, m - відповідно максимальне і мінімальне власне число оператора A .

З /2/ і /3/ визначимо

$$h_k=\theta\frac{(Ax_k,Ax_k)}{(A^2x_k,Ax_k)}\ ,\quad \lambda_k=\frac{(A\tilde{x}_k,Ax_k)}{(A^2\tilde{x}_k,A\tilde{x}_k)} .$$

Шляхом простих перетворень отримаємо

$$f(x_{k+1})=f(x_k)\left\{1-\frac{(A\tilde{x}_k,Ax_k)^2}{(A^2\tilde{x}_k,Ax_k)(Ax_k,x_k)}\right\} .$$

Використовуючи лему з роботи [2], одержуємо оцінку

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k)\left\{1-\frac{4mM}{(m+M)^2}\ \varphi_k(\theta)\right\} ,$$

де

$$\varphi_k(\theta)=\frac{(1-\theta)^2}{1-2\theta\gamma_k+\theta^2\xi_k} ,$$

$$\gamma_K = \frac{\|Ax_K\|^2 \|A^2 x_K\|^2}{(A^2 x_K, Ax_K)^2}, \qquad \xi_K = \frac{\|Ax_K\|^4 (A^3 x_K, A^2 x_K)}{(A^2 x_K, Ax_K)^3}.$$

Очевидно, $\gamma_K > 1$ і $\xi_K > 1$.

Тоді знайдеться таке $0 < \theta < 1$, що виконується умова $\varphi_K(\theta) > 1$, тобто

$$(1-\theta)^2 > 1 - 2\theta\gamma_K + \theta^2 \xi_K > 0. \qquad /4/$$

Умова /4/ виконується при

$$\theta \in \left[0, \min\left\{1; \frac{2(\gamma_K - 1)}{\xi_K - 1}; \frac{\gamma_K - \sqrt{\gamma_K^2 - \xi_K}}{\xi_K}, \text{якщо } \xi_K < \gamma_K^2\right\}\right].$$

Оскільки оцінка для методу найшвидшого спуску має вигляд

$$f(x_{K+1}) < f(x_K)\left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right\},$$

а для методу /I/

$$f(x_{K+1}) \le f(x_K)\left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\varphi_K(\theta)\right\},$$

то очевидно, що запропонований метод збігається швидше, ніж метод найшвидшого спуску. За нормою можна одержати оцінки для методу градієнтного спуску

$$\|x_{K+1}\| \le \|x_K\| \sqrt{\frac{M}{m}} \left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\right\}^{1/2},$$

для запропонованого методу

$$\|x_{K+1}\| \le \|x_K\| \sqrt{\frac{M}{m}} \left\{1 - \frac{4mM}{(m+M)^2}\varphi_K(\theta)\right\}^{1/2}.$$

Отже, метод /I/ в застосуванні до додатно визначеної квадратичної форми при певному підборі параметра θ збігається не повільніше методу найскорішого спуску, в якого збіжність за нормою не менша, ніж збіжність геометричної прогресії із знаменником

$$q = \frac{M-m}{M+m},$$

а за функціоналом - не менша, ніж збіжність геометричної прогресії із знаменником g^2 .

Теорему про швидкість збіжності методу /I/ можна узагальнити на широкий клас достатньо гладких функцій $f(x)$, які поводять себе в достатньо малому околі точки мінімуму x^* в деякому сенсі так само, як додатно визначена квадратична форма. Використовуючи розклад в ряд Тейлора в околі x^* і те, що $\nabla f(x^*)=0$, одержуємо

$$f(x_{k+1})-f(x^*)=[f(x_k)-f(x^*)]\cdot\Big\{1-$$

$$-\frac{\left(H(x^*)(\tilde{x}_k-x^*),H(x^*)(x_k-x^*)\right)^2}{\left(H^2(x^*)(\tilde{x}_k-x^*),H(x^*)(\tilde{x}_k-x^*)\right)\left(H(x^*)(x_k-x^*),(x_k-x^*)\right)}\Big\} ,$$

де $H(x^*)$ - гессіан в точці x^* /матриця, елемент якої $h_{ij}=\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}$. Зробивши перетворення, як це ми робили з квадратичною формою, одержимо аналогічні результати.

Для перевірки теоретичних результатів розглянемо приклад. Слід мінімізувати функцію

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{5}\left(1-e^{-xt_i^y}-\frac{K_i}{32}\right)^2,$$

де

$$K_1=4,\quad K_2=10,\quad K_3=20,\quad K_4=25,\quad K_5=29;$$

$$t_1=0{,}2,\quad t_2=0{,}7,\quad t_3=1{,}4,\quad t_4=1{,}6,\quad t_5=2{,}4.$$

При мінімізації функції $F(x,y)$ методом /I/ одержано такий результат:

F_{min} = 0,00781187338; x^*= 0,68035382; y^*=I,4I038II.

Задача розв"язувалась також методом найшвидшого спуску і методом Ньютона. Одержано аналогічний результат.

При порівнянні часу обчислення за методом /I/ і методом найшвидшого спуску, якщо прийняти час відліку останнього за одиницю, при різних θ маємо

θ	Порівняльний коефіцієнт по відношенню до методунайшвидшогоспуску
0,25	0,36
0,5	0,49
0,75	0,37

Спис к літератури: І. В а с и л ь е в Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. Изд-во Моск. ун-та, 1974. 2. Л я ш е н к о И.Н. [и др.]. Линейное и нелинейное программирование. К., "Вища школа", 1975. 3. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Д а н и л и н Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., "Наука", 1975.

УДК 518:517.948

М.Я. Бартіш, канд. фіз.-мат. наук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Одним з найбільш поширених методів розв"язування нелінійних операторних рівнянь є метод Ньютона - Канторовича [3] і його модифікації. Найбільш повну бібліографію методів типу Ньютона - Канторовича подано в [4]. Ми розглянемо застосування методу Ньютона - Канторовича для розв"язування крайової задачі системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Нехай задана крайова задача [5]

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \qquad /1/$$

$$g(x_0,x_1)=d. \qquad /2/$$

Для розв"язування задачі /1/, /2/ можна використати метод Ньютона-Канторовича в трьох його варіантах:

1/заміна задачі /1/, /2/ різницевим аналогом в N точках проміжку $[t_0, t_1]$ [1], у цьому випадку розв"язок задачі /1/, /2/ зведено до знаходження розв"язку нелінійної системи алгебраїчних рівнянь;

2/ застосування методу лінеаризації [5], тобто розв"язування задачі /1/, /2/ замінити знаходженням розв"язків послідовності лінійних крайових задач;

3/ знаходження невідомого x_0 з системи алгебраїчних рівнянь /2/ і розв"язування задачі Коші для рівняння /1/.

У першому випадку замість розв"язку задачі /1/, /2/ знаходимо розв"язок певним чином побудованої нелінійної системи алгебраїчних рівнянь

$$P_N(x) = 0. \qquad /3/$$

Точність, з якою розв"язок рівняння /3/ - x_{Ni} наближає розв"язок задачі /1/, /2/ в певній точці - t_i, суттєво залежить від кількості точок апроксимації. При зростанні N точність збільшується, однак ще швидше збільшується розмірність системи /3/. У другому випадку трудність полягає в тому, що ми не маємо ефективних методів розв"язування крайових задач для систем лінійних рівнянь. Хоч третій варіант методу теж не без недоліків, однак для багатьох задач він досить ефективний. При використанні третього варіанту ми повинні прийняти до уваги, що маємо лише алгоритм визначення векторфункції

$$q(x_0) = q(x_0, x_1),$$

тому в даному випадку доцільно використовувати різницеві аналоги методу.

Розглянемо більш детально застосування методу Ньютона - Канторовича /різницевий аналог/ до розв"язування задач оптимального керування на швидкодію. Нехай об"єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь [2]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \,. \qquad /4/$$

Необхідно вибрати керування $u \in U = \{u : |u_i| \leq 1, \; i = 1, 2, \ldots, 2\}$ так, щоб час переходу з точки x_0 у початок координат був мінімальний. Як показано в [2], розв"язування цієї задачі можна здійснити в чотири етапи, причому задача вважається практично розв"язана, якщо визначено значення ψ_0 /яке відповідає x_0 / для задачі Коші

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^*\psi \,, \quad \psi(0) = \psi_0 \,. \qquad /5/$$

Маючи розв"язок задачі /5/, ми з принципу максимуму однозначно визначаємо $u(t)$ і знаходимо розв"язок задачі Коші для рівняння /4/ $x(0) = x_0$. Отриманий розв"язок $x(t)$ є оптимальним, а час T , при якому $x(T) = 0$, оптимальний час переходу з точки x_0 в точку 0 . При значенні ψ_0 , яке не відповідає x_0 , аналогічно отриманий розв"язок задачі Коші /4/, має ту властивість, що $x(t) \neq 0$ для будь-якого $t > 0$.

Таким чином, розв"язок $x(t)$ залежить від ψ_0 . Отже розв"язок задачі /4/ записуємо

$$x(t) = x(t, \psi_0^{(1)}, \ldots, \psi_0^{(n)}),$$

а це дає змогу змінити постановку задачі, а саме, знайти розв"язок системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_i(T, \psi_0^{(1)}, \ldots, \psi_0^{(n)}) = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad /6/$$

Оскільки /6/ є системою n рівнянь з $n+1$ невідомими, то необхідно одну з невідомих визначити з додаткових умов. Це легко зробити для T згідно з роботою [2]. Однак, оскільки нас цікавить лише напрямок вектора ψ_0 , то ми одну з компонент, наприклад $\psi_0^{(1)}$, приймаємо рівною 1 , або -1 /залежно від розміщення x_0 /. Отже, нам необхідно знайти розв"язок системи n рівнянь з n невідомими

$$\tilde{x}_i(T, \psi_o^{(2)}, \dots, \psi_o^{(n)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad /7/$$

Для розв"язування цієї системи можна застосувати різницевий аналог методу Ньютона - Канторовича, оскільки маємо лише алгоритм одержання $\tilde{x}(T, \psi_o^{(2)}, \dots, \psi^{(n)})$ при заданому значенні (T, ψ_o) /розв"язок задачі Коші /5/, визначення керування $u(t)$ з принципу максимуму і розв"язок задачі Коші для рівняння /4/.

Як приклад розглянемо задачу з роботи [5].

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u_1 \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u_2$$

Одержані результати обчислень наводимо нижче:

N	$\psi_i^{(1)}$	$\psi_i^{(2)}$	T	$x_1(T)$	$x_2(T)$
0	-I	-I	5	4,495	0,3
I	-I	-I,5	3,3	-0,8I9844	0
2	-I	-2,438	4,876	-0,0I4205	0
3	-I	-2,3I876	4,63752	-0,00003256	0
4	-I	-2,3I66269	4,6332539		

Таким чином, точний розв"язок $T = 2\sqrt{11} - 2 = 4,6332496\ldots$ отримано з похибкою $< 5 \cdot 10^{-6}$.

Список літератури: I. Б е р е з и н И.С., Ж и д к о в Н.П. Методы вычислений. Т.2. М., Физматгиз, 1960. 2. Б о л т я н с к и й В.Г. Математические методы оптимального управления. М., "Наука", 1969. 3. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - "Труды Института математики АН УССР", 1949, вып.28. 4. О р т е г а Дж., Р е й н б о л т В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., "Мир", 1975. 5. Ш а м а н с к и й В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. К., "Наукова думка", 1966.

УДК 518.90

І.В.Бейко, канд.фіз.-мат.наук, В.В.Ясінський

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ ДЛЯ ОДНІЄЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГРИ

У нашій роботі застосовується методика гарантованого результату [1,2] для дослідження загальних ігор n гравців.

Нехай для гравців I,2... , n з множинами вибору x_1, x_2, ..., x_n відповідно задано множину цільових функцій $\Omega=\{f_\alpha\}$, $\alpha\in J$

$$J=\{K_1,\dots,K_s\},\ s>n,\ \left(\forall\alpha\in J: f_\alpha:\prod_{i=1}^{n}x_i\to R\right).$$

При фіксованих функціях цілі f_{i_1}, f_{i_2}, ..., f_{i_n} $(f_{i_j}\in\Omega,\ j=\overline{1,n})$ для гравців I,2, ..., n через $A_n^{(i)}$ позначимо деяку групу гравців, в якій i- й гравець ініціативний. Зафіксуємо функцію цілі f, $f\in\Omega$, для i-го гравця. Тоді множину ігор виду $A_n^{(i)}$ при різних функціях цілі f_{i_1}, ..., $f_{i_{n-1}}$ $(f_{i_j}\in\Omega,\ j=\overline{1,n-1})$ для гравців I,2, ..., $i-1$, $i+1$, ... n /і при різних впорядкуваннях гравців I,2, ..., $i-1$, $i+1$, ... n, якщо це суттєво/ позначимо через $G_n^{(i)}(f)$.

Припустимо, що для кожного i-го гравця / $i=\overline{1,n}$ / і довільної його функції цілі f, $f\in\Omega$, задано число $L_i(f)$, причому

$$L_i(f)\leq\max_{A_n^{(i)}\in G_n^{(i)}(f)}\gamma_i(A_n^{(i)}),\qquad /\mathrm{I}/$$

де $\gamma_i(A_n^{(i)})$ – максимальний гарантований результат i-го гравця в грі $A_n^{(i)}$.

Назвемо процедурою реалізації цілі $\{L_i(f)\}_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ за допомогою гри $A_n^{(s)}$, $S\in\{1,2,\dots,n\}$ процедуру, яка визначається такими правилами:

I. Заданий порядок P_n, відповідно до якого кожний i-й гравець $i=$ I, ..., n пропонує гравцям I, ..., $i-1$, $i+1$, ... n

пару виду $p_i=(A_n^{(i)}, a_i)$, де $A_n^{(i)}$ - варіант гри, запропонований i-м гравцем /сюди може входити вибір i-м гравцем функцій цілі, накладення ним обмежень на множини виборів гравців, впорядкування інших гравців і т.п./, a_i - плата, запропонована гравцям I, ..., $i-1$, $i+1$, ..., n за прийняття гри $A_n^{(i)}$.

2. Заданий порядок $\hat{P}_{n-1}(A_n^{(i)})=\langle K_1, K_2, \dots, K_{n-1}\rangle$ розподілу плати a_i між гравцями I, ..., $i-1$, $i+1$, ..., n . А саме, кожний гравець K_j , $K_j \in \{$ I, ..., $i-1$, $i+1$, ..., $n\}$, одержавши від гравця K_{j-1} / $K_0=i$ / плату, рівну $a_i-\sum\limits_{r=1}^{i-1} a_{iK_r}$, віднімає від нього деяку частину a_{iK_j} , яку додає до свого максимального виграшу $\gamma_{K_j}(A_n^{(i)})$ в грі $A_n^{(i)}$, а частину $a_i-\sum\limits_{r=1}^{j} a_{iK_r}$, яка залишилась, передає гравцю K_{j+1} .

Введемо позначення

$$d_j^{(i)}(f_{i_j})=\gamma_j(A_n^{(i)})+a_{ij}, \qquad i\neq j,$$
$$d_i^{(i)}(f_{i_i})=\gamma_i(A_n^{(i)})-a_i, \qquad i,j=\overline{1,n},$$

де f_{i_j} - функція цілі j-го гравця в грі $A_n^{(i)}$; a_{ij} - плата, яку одержує j-й гравець з загальної плати a_i при порядку $\hat{P}_{n-1}(A_n^{(i)})$.

Пару $P_K=(A_n^{(K)}, a_K)$ назвемо для i-го гравця вигідною, якщо

$$d_i^{(K)}(f_{K_i})\geqslant L_i(f_{K_i}),$$

де $L_i(f_{K_i})$ визначається з /I/.

Для кожного i-го гравця визначимо множину

$$D_i \overset{df}{=} \left\{P_K : K\in\{1,2,\dots,n\}, d_i^{(K)}(f_{K_i})\geqslant L_i(f_{K_i})\right\}.$$

3. Заданий порядок $\hat{P}_n$, відповідно до якого після N-го пропонування гравцями I,2, ..., n своїх пар P_1 , P_2 , ..., P_n (N - задане натуральне число/ вони повідомляють множини вигідних для них пар.

Позначимо через $D_1^{(M)}, \dots, D_n^{(M)}$ множини вигідних пар повідомлених гравцями I, ..., n на M-му етапі / M - задане натуральне число/.

4. Якщо $D_0 = p_k$, $D_0 = \bigcap_{i=1}^{n} D_i^{(M)}$, то реалізується пара p_k. Коли $D_0 = \{p_{k_1}, \dots, p_{k_q}\}, q \geq 2$, то відповідно заданій випадковій величині δ з ймовірністю $\lambda(p_{k_j}) = \lambda_{k_j}(a_{k_1}, \dots, a_{k_q}), j = \overline{1,q}$, $\sum_{j=1}^{q} \lambda_{k_j} = 1$ вибирається і реалізується одна із пар p_{k_j} множини D_0. Якщо ж $D_0 = \emptyset$, то за реалізацією заданої випадкової величини ξ з ймовірністю $\mu(p_k) = \mu_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ вибирається і реалізується пара p_k, $k = \overline{1,n}$, $\sum_{k=1}^{n} \mu(p_k) = 1$.

5. Кожний k-й гравець може m_k разів відмовлятись від своєї попередньої пропозиції / m_k - задане натуральне число/.

6. Кожний раз за відмовлення від своєї попередньої пропозиції гравець платить штраф c, $c>0$.

7. Кожний k-й гравець намагається при своїй функції виграшу, рівній f, $f \in \Omega$, досягти результату не менше, ніж $L_i(f)$.

Процедуру, яка визначається правилами I-7, позначимо через $B(A_n)$.

Стратегію $\tilde{S}_i$ i-го гравця в процедурі $B(A_n)$ назвемо: I/вибір плати a_i за гру $A_n^{(i)}$ відповідно порядку P_n; 2/ визначення порядку $\hat{P}_{n-1}(A_n^{(k)})$ плати a_{k_i} для всіх $k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$; 3/ знаходження порядку $\hat{\hat{P}}_n$ множини D_i. Тобто стратегія S_i i-го гравця є вибором вектора

$$(a_i, a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{i-1,i}, a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \dots, a_{n_i}, D_i).$$

Позначимо через $\Phi_i(\tilde{S}_i)$ максимальний гарантований результат i-го гравця, якщо $\tilde{S}_i$ - його стратегія в процедурі $B(A_n)$, а через $G(L_i(f), \tilde{S}_i)$ позначимо ймовірність того, що i-й гравець досягне рівня $L_i(f)$, якщо $\tilde{S}_i$ -його стратегія в процедурі $B(A_n)$

Визначення. $L_i(f)$ оптимальною стратегією $\tilde{S}_i^o$ i-го гравця в процедурі $B(A_n)$ назвемо стратегією, яка визначається з формули

$$\tilde{S}_i^o = \begin{cases} S_i', \max\limits_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} \Phi_i(\tilde{s}_i) \geq L_i(f), \\ S_i'', \max\limits_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} \Phi_i(\tilde{s}_i) < L_i(f), \end{cases}$$

$$\tilde{S}_i' : \max_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} \Phi(\tilde{s}_i) = \Phi(\tilde{S}_i'), \ \tilde{s}_i'' : \max_{\tilde{s}_i \in \tilde{S}_i} G(L_i(f), \tilde{s}_i) = G(L_i(f), \tilde{s}_i'') ;$$

$\tilde{S}_i$ – множина допустимих стратегій i-го гравця в процедурі $B(A_n)$; $L_i(f)$ визначається з /I/.

Теорема. Якщо (v) $m_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, $N - M = 0$; (vv) функція μ_i монотонно зростає по a_i, то при порядках

$$P_n = \langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle,$$

$$\hat{P}_{n-1}(A_n^{(j)}) = \langle j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \rangle, \ j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$$

$$\hat{\hat{P}}_n = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle$$

компоненти a_i^o, a_{ji}^o, D_i^o, $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$,

$L_i(f)$ оптимальної стратегії $\tilde{S}_i^o$ i-го гравця в процедурі $B(A_n)$ визначаються з формул

$$a_i = \gamma_i(A_n^{(i)}) - L_i(f), \ A_n^{(i)} \in G_n^{(i)}(f) ; \qquad /3/$$

$$a_{ji}^o = \begin{cases} a_{ji}', \gamma_i(A_n^{(j)}) + a_j - \sum\limits_{s=1}^{p} a_{jj_s} \geq L_i(\tilde{f}), \\ a_{ji}'', \gamma_i(A_n^{(j)}) + a_j - \sum\limits_{s=1}^{p} a_{jj_s} < L_i(\tilde{f}), \end{cases} \qquad /4/$$

де $\tilde{f}$ – функція цілі i-го гравця в грі $A_n^{(j)}$, $j \neq i$

$$a_{ji}' : \gamma_i(A_n^{(i)}) + a_{ji}' = L_i(f),$$

$$a_{ji}'' = a_j - \sum_{s=1}^{p} a_{jj_s}, \ p : 1 \leq p \leq n-1, \ j_p = i, \qquad /5/$$

$$D_i^0 = \begin{cases} \bigcap\limits_{t=1}^{\bar{k}} D_{q_t}, \; q_k = i, & k < n, \\ \tilde{q}, & q_n = i \end{cases}$$

$$\tilde{q} \in Q = \{ q : \max_{j \in \bigcap\limits_{t=1} \tilde{D}_{q_t}} d_i^{(j)}(f_{j_i}) \cdot L_i^{-1}(f_{j_i}) = d_i^{(q)}(f_{q_i}) \cdot L^{-1}(f_{q_i}) \},$$

$$\tilde{D}_q = \{q_1, \dots, q_k\}, \quad D_q = \{\rho_{q_1}, \dots, \rho_{q_k}\}, \quad q = 1, 2, \dots, n.$$

Список літератури: I. Гермеер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами /теория принятия решений при неполном единстве/. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972. 2. Гермеер Ю.Б., Моисеев Н.Н. О некоторых задачах теории иерархических систем управления. - В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М., "Наука", 1971.

УДК 537.523.74

З.С.Бережанська, В.І.Гордійчук

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА І-ГО РОДУ в R^3

Відомо, що розрахунок потенціалу електростатичного поля, яке утворене електронно-оптичною системою /ЕОС/ зводиться до зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в просторі з щілинами. У роботах [3,4] були запропоновані методи розв"язування такої задачі шляхом зведення до інтегрального рівняння Фредгольма І-го роду за допомогою потенціалу простого шару. При цьому вважалось, що ЕОС -

це сукупність поверхонь обертання з достатньо малою товщиною [3] або без товщини [4].

У роботі [2] удосконалюється метод, запропонований в [3] для випадку, коли ЕОС - сукупність поверхонь з товщиною, які не є поверхнями обертання.

Ми пропонуємо методику розв"язування інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду [2], яка дає змогу розраховувати ЕОС без врахування товщин.

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа у просторі з щілинами

$$\Delta U = 0, \quad U\big|_S = U_0, \qquad /1/$$

де Δ - оператор Лапласа; $S = \bigcup S_i$ - сукупність розімкнутих поверхонь; U_0 - граничні умови на S.

Розв"язок задачі /1/ шукаємо у вигляді потенціалу просто шару

$$U(M) = \iint\limits_S \frac{q(S)}{r} dS, \quad r = |M,N|, \; N \in S, \qquad /2/$$

де $q(S)$ - поверхнева густина розподілу зарядів; r - відстань між біжучою точкою $N(x,y,z)$ на поверхні S і фіксованою точкою простору $M(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Задача зводиться до визначення невідомої густини $q(S)$, яка задовольняє інтегральне рівняння Фредгольма I-го роду

$$\iint\limits_S \frac{q(S)}{r} dS = U_0 . \qquad /3/$$

Розглянемо прямокутну систему координат (x,y,z), в якій кожна поверхня S_i описується рівнянням $z = f_i(x,y)$. Тоді інтеграл по поверхні S_i можна звести до подвійного

$$\iint\limits_{S_i} \frac{q_i(S_i)}{r} dS_i = \iint\limits_{\omega_i} \frac{q_i(x,y)\sqrt{1+V_i^2+W_i^2}}{r} dxdy = \iint\limits_{\omega_i} F^{(i)}(x,y)\, dxdy, \qquad /4/$$

де ω_i - проекція S_i на координатну площину (XOY), а

$$V_i = \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial x}, \quad W_i = \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y}.$$

Інтеграли /4/ обчислюємо, застосовуючи метод В.Л.Рвачова. Для цього використовуємо, зручну кубатурну формулу для наближеного обчислення подвійних інтегралів по довільній многокутній області [3]. Область ω_i розіб"ємо на трикутники $\Delta_\mu^{(i)}$, а кожен трикутник $\Delta_\mu^{(i)}$ на систему елементарних трикутників, площа яких $G_{\Delta_\mu^{(i)}}^{(\kappa)}$ не перевищує наперед заданої величини $\varepsilon > 0$. У цьому випадку інтеграл /4/ можна записати у вигляді

$$\sum_{\mu=1}^{N^{(i)}} \iint_{\Delta_\mu^{(i)}} F^{(i\mu)}(x,y)\,dx\,dy = \sum_{\mu=1}^{N^{(i)}} \frac{G_{\Delta_\mu^{(i)}}^{(\kappa)}}{3}\left[F_1^{(i\mu)} + F_2^{(i\mu)} + \dots + F_\nu^{(i\mu)} + 2\left(F_{11}^{(i\mu)} + F_{12}^{(i\mu)} + \dots + F_{\rho j}^{(i\mu)}\right)\right] + R(F), \quad /5/$$

де $N^{(i)}$ - кількість трикутників, на які розбивається область ω_i, $F_\nu^{(i\mu)}$ - значення функції $F^{(i\mu)}(x,y)$ в точках розбиття, які належать сторонам трикутника $\Delta_\mu^{(i)}$, $F_{\rho j}^{(i\mu)}$ - значення функції $F^{(i\mu)}(x,y)$ в точках розбиття, які знаходяться в середині трикутника $\Delta_\mu^{(i)}$; $R(F)$-залишковий член, оцінка якого наведена в роботі [3].

Трикутник $\Delta_\mu^{(i)}$ розбиваємо на 4^n елементарних трикутників, шляхом послідовного проведення середніх ліній / n - порядок розбиття/. Густину $q_i(x,y)$ розподілу зарядів на поверхні S_i записуємо у вигляді суми пробово-раціональних функцій:

$$q_i(x,y) = \sum_{l=1}^{M^{(i)}} \frac{a_l^{(i)}\, t_l^{(i)}}{\left[t_l^{(i)}\right]^2 + \left(x - x_l^{(i)}\right)^2 + \left(y - y_l^{(i)}\right)^2}, \quad /6/$$

де $a_l^{(i)}$ - невідомі коефіцієнти; $t_l^{(i)}$ - деякі наперед задані параметри; $x_l^{(i)}, y_l^{(i)}$ - точки, які належать області $\Delta_\mu^{(i)}$. Враховуючи рівність /6/ рівняння /5/ набере вигляду

$$U(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{M^{(i)}} a_l^{(i)} \left\{ \sum_{\mu=1}^{N^{(i)}} \frac{G_{\Delta_\mu^{(i)}}^{(\kappa)}}{3}\left[Q_1^{(i\mu)} + Q_2^{(i\mu)} + \dots + Q_\nu^{(i\mu)} + 2\left(Q_{11}^{(i\mu)} + Q_{12}^{(i\mu)} + \dots + Q_{\rho j}^{(i\mu)}\right)\right]\right\}, \quad /7/$$

де

$$Q_{\nu}^{(i_\kappa)}=\frac{t_l^{(i)}\cdot\sqrt{1+V_i^2+W_i^2}}{\left[t_l^{(i)}\right]^2+\left(x_\nu^{(i_\kappa)}-x_l^{(i_\kappa)}\right)^2+\left(y_\nu^{(i_\kappa)}-y_l^{(i_\kappa)}\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\left(x_\nu^{(i_\kappa)}-\bar{x}\right)^2+\left(y_\nu^{(i_\kappa)}-\bar{y}\right)^2+\left[f_i\left(x_\nu^{(i_\kappa)},y_\nu^{(i_\kappa)}\right)-\bar{z}\right]^2}}, \quad /8/$$

аналогічний вигляд мають $Q_{pj}^{(i_\kappa)}$.

З рівностей /3/ і /7/ одержуємо рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{M^{(i)}}\left\{\sum_{\mu=1}^{N^{(i)}}\frac{\sigma_{\Delta\mu}^{(i)(\kappa)}}{3}\left[Q_1^{(i_\kappa)}+Q_2^{(i_\kappa)}+\dots+Q_\nu^{(i_\kappa)}+2\left(Q_{11}^{(i_\kappa)}+Q_{12}^{(i_\kappa)}+\dots+Q_{pj}^{(i_\kappa)}\right)\right]\right\}=U_0^{(i)}. \quad /9/$$

Рівняння /9/ розв"язується методом колокації, шляхом задоволення граничних умов у точках (x_ξ, y_ξ, z_ξ) на поверхнях $f_i\left(\xi=1,\dots\sum_{i=1}^{m}M^{(i)}\right)$. При цьому підінтегральна функція має особливість при

$$\left(x_\nu^{(i_\kappa)}, y_\nu^{(i_\kappa)}, z_\nu^{(i_\kappa)}\right)=\left(X_\xi, Y_\xi, Z_\xi\right),$$

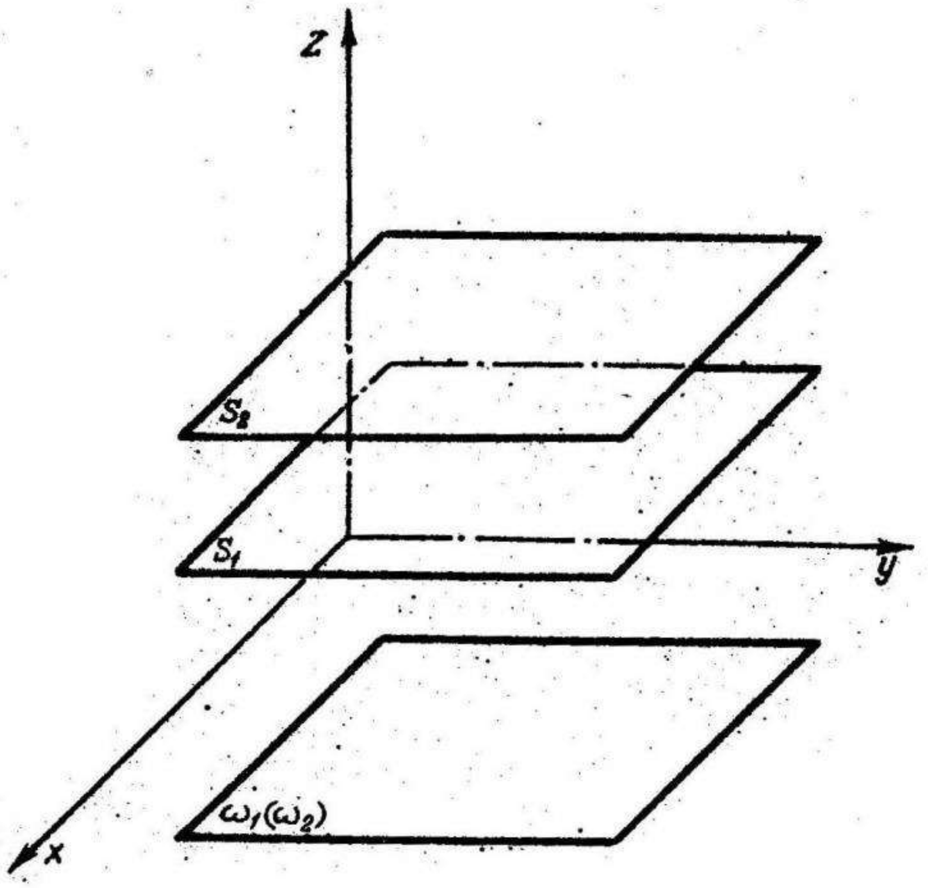
яку можна усунути за рахунок спеціального вибору точок інтегрування і точок колокації. Використаємо те, що жодна точка порядку розбиття n не збігається з точками порядку розбиття, відмінного від n .

Отже, якщо точки колокації виберемо при порядку розбиття n , то точки інтегрування можна взяти при порядку розбиття... $n-3$, $n-2$, $n-1$, $n+1$, $n+2$... Одержана система лінійних алгебраїчних рівнянь є добре обумовлена. При цьому діагональні елементи матриці домінуючі і визначник системи відмінний від нуля. Визначивши невідомі $a_l^{(i)}$, потенціал у довільній точці простору знаходимо за формулою /7/.

<u>Приклад</u>. Нехай потрібно знайти поле, утворене ЕСС, яка зображена на рисунку. Розрахунок поля здійснюється за алгольною програмою на машині М-222 при таких значеннях параметрів:

$$n=2;\ m=2;\quad M_1=16;\ M_2=16;\ f_1(x,y)=0{,}2;\quad f_2(x,y)=0{,}5;$$
$$U_0^{(1)}=1;\ U_0^{(2)}=-1;\quad N^{(1)}=2;\ N^{(2)}=2;$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \{0{,}2 \le x \le 0{,}6;\ \ 0{,}2 \le y \le 0{,}8\}\ .$$



Час обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь становить 4 хв. Точність задоволення граничних умов 0,5%. Потенціал у довільній точці $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ визначається за формулою /7/. Нижче наведені значення потенціалу в деяких точках на осі Z :

Z	$U(0{,}0\ 0{,}0\ Z)$
0,0	0,140914
0,1	0,128565
0,2	0,093382
0,3	0,034554
0,4	-0,034554
0,5	-0,093382
0,6	-0,128565
0,7	-0,140914
0,8	-0,138738
0,9	-0,129506

Список літератури: I. Б е з л ю д н ы й Е.Е. и др. Приближенное вычисление двойных интегралов по методу В.Л.Рвачева. - "Изв. АН БССР, сер. ФМН", 1969, вып.I. 2.Г о р д и й ч у к В.И. Численное решение пространственной задачи теории потенциала методом интегральных уравнений. В сб.: Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. Киев, 1974. 3.Л ю д к е в и ч И.В., Г о р д и й ч у к В.И. Численный метод расчета электростатического поля и траекторий электронов фокусирующих электронно-оптических систем с помощью ЭВМ. - "Вычислительная и прикладная математика", 1973, вып.17. 4.Л ю д к е в и ч И.В.,Ч у х л е б о в А.Н. Численное решение граничной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае разомкнутых поверхностей. В сб.: Вычислительная математика в научно-техническом прогрессе. Киев, 1974.

УДК 539.3:534.1

О.В.Блажиєвська, канд.фіз.-мат.наук

ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ НА СФЕРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ПОБЛИЗУ ГРАНИЦІ РІДКОГО ПІВПРОСТОРУ

Нехай на жорстку сферу, яка занурена в обмежений нерухомою площиною /дном/ акустичний півпростір, падає плоска хвиля тиску скінченної тривалості. Припустимо, що фронт падаючої хвилі паралельний до дна, а тиск у ній змінюється за законом

$$p_i(\tau, z) = p_o g(\tau_1)[H(\tau_1) - H(\tau_1 - \tau_o)], \qquad /1/$$

де $\tau = ctR^{-1}$, c – швидкість звуку в рідині; t – час, який відлічується з моменту дотику падаючої хвилі до поверхні сфери; R – радіус сфери; $z = ZR^{-1}$, Z – координата, що відлічується від центра сфери вздовж осі симетрії /границя півпростору – це площина $Z = a > R$/;

p_o – постійна, яка має розмірність тиску; $g(\tau_1)$ – довільна функція-оригінал, $\tau_1 = \tau - z - 1$; H – одинична функція Хевісайда; $\tau_o = ct_o R^{-1}$,

t_o – тривалість падаючого імпульсу.

Визначимо тиск p_e у дифракційній хвилі. Запишемо його у вигляді

$$p_e = p_1 + p_2, \qquad /2/$$

де $p_1 = p_o g(\tau_2)[H(\tau_2) - H(\tau_2 - \tau_o)]$ – тиск у відбитій від жорсткого дна хвилі, $\tau_2 = \tau - 1 + z - 2a/R$; p_2 – тиск, викликаний наявністю сфери.

У загальноприйнятій лінійній постановці ця задача зводиться до розв"язування хвильового рівняння, яке задовольняє функція p_2 в області, зайнятій рідиною, при нульових початкових умовах, умовах непроникливості сфери та дна і умовах випромінювання на нескінченності.

Позначимо через p_2^L трансформанту Лапласа по змінній τ від функції p_2. Для визначення p_2^L маємо таку крайову задачу:

$$\Delta p_2^L - s^2 p_2^L = 0; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial p_2^L}{\partial n} = 0 \quad \text{на } T_o; \qquad /4/$$

$$\frac{\partial p_2^L}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(p_i^L + p_1^L) \quad \text{на } T; \qquad /5/$$

$p_2^L = 0$ в безмежно віддаленій точці. /6/

Тут Δ -тривимірний оператор Лапласа у безрозмірних координатах; s - параметр перетворення Лапласа; T_0 і T - відповідно поверхні дна і сфери; n -орт нормалі до відповідної поверхні; $p_i^L = p_0 g^L(s) exp[-s(1+z)]$; $p_r^L = p_0 g^L(s) exp[-s(1-z+2a/R)]$; $g^L(s) = \int_0^{\tau_0} g(x) exp(-sx) dx$.

Розв"язуємо поставлену крайову задачу альтернативним методом Шварца. Фактично виділення доданку p_1 у формулі /2/ є першим кроком цього методу, коли розглядається задача дифракції на дні при відсутності сфери /не враховується умова /5/ /. Наступним кроком є розв"язок задачі дифракції падаючої та відбитої від дна хвиль на сфері за умови, що дно відсутнє, тобто не береться до уваги умова /4/ і так далі.

Розглянемо так звану прифронтову асимптотику розв"язку, коли в просторі зображень за Лапласом приймається, що $s \to \infty$. Оскільки при цьому параметр $\varepsilon = s^{-1}$ - малий, то шукаємо розв"язок за допомогою асимптотичного методу Вишика і Люстерника [1].

Зауважимо, що асимптотичний розв"язок із залишковим членом довільного порядку малості можна одержати цим методом лише у вузькій смузі /порядку ε / поблизу границі області. Тому методом Вишика і Люстерника визначаємо функцію p_2^L на границі області, а потім шукаємо розв"язок у довільній точці простору, скориставши ь формулою Кірхгофа [3]. Інтеграл Кірхгофа обчислюємо асимптотичним методом Лапласа [?].

Введемо систему безрозмірних сферичних координат r, θ, φ, початок якої збігається з центром сфери. Запишемо шукану функцію у вигляді

$$p_{21}^L = p_0 g^L(s) \{ U_1^L(s,r,\theta) exp[-s(1+\cos\theta)] + U_2^L(s,r,\theta) exp[-s(1-\cos\theta+2a/R)] \}. \qquad /7/$$

Легко переконатись, що функції U_i^L $(i=1,2)$ задовольняють такі диференціальні рівняння:

$$L_\varepsilon u_i^L = \sum_{K=0}^{2} \varepsilon^K (-1)^{K+i} L_K u_i^L = 0 \ . \qquad /8/$$

Тут $\varepsilon = \frac{1}{s}$; $L_0 = r^{-2}\sin^2\theta - 1$; $L_1 = 2r^{-2}(\cos\theta + \sin\theta\, \partial/\partial\theta)$; $L_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + r^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + ctg\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$.
На поверхні сфери шукані функції задовольняють умови

$$\frac{\partial u_i^L}{\partial r}\Big|_{r=1} = (-1)^{i+1} s \cos\theta \ . \qquad /9/$$

Провівши згідно з методом Вишика і Люстерника "перше розщеплення" оператора L_ε, одержуємо u_i^L. Тому розв"язок є функцією примежевого шару і його можна отримати "другим розщепленням" оператора L_ε. Для цього введемо нову змінну α, приймаючи $\alpha = s(r-1)$.

Розв"язок рівняння /8/ шукаємо у вигляді

$$u_i^L(\varepsilon, \alpha, \theta) = \sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K u_{Ki}^L(\alpha, \theta) \ . \qquad /10/$$

Методом Вишика і Люстерника одержуємо

$$u_{0i}^L = \begin{cases} (-1)^{i+1} exp[\alpha\cos\theta], & \text{коли} \quad -1 \le \cos\theta < 0; \\ (-1)^i \ exp[-\alpha\cos\theta], & \text{коли} \quad 0 < \cos\theta \le 1; \end{cases} \qquad /11/$$

$$u_{1i}^L = \begin{cases} [1+(-1)^{i+1}]\left[\alpha^2\dfrac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} + \dfrac{\cos^2\theta+1}{2\cos^3\theta}(1-\alpha\cos\theta)\right]l^{\alpha\cos\theta}, & \text{коли } \cos\theta < 0; \\ [1+(-1)^i]\left[-\alpha^2\dfrac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} - \dfrac{\cos^2\theta+1}{2\cos^3\theta}(1+\alpha\cos\theta)\right]l^{-\alpha\cos\theta}, & \text{коли } \cos\theta > 0; \end{cases} \qquad /12/$$

і так далі.

Функції u_{Ki}^L терплять розрив неперервності при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Отже, розв"язок /10/ є нерівномірноточним. Наявне явище, аналогічне внутрішньому примежевому шару за термінологією Вишика і Люстерника.

Введемо "внутрішню" змінну, приймаючи $\gamma = s\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. У змінних α, γ вихідне рівняння /3/ має вигляд

$$\sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K M_K P_2^L = 0, \qquad /13/$$

$$M_0 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 1; \ M_1 = 2\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 1\right) + 2\frac{\partial}{\partial\alpha}; \ M_2 = \alpha^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 1\right) + 2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} \quad \text{т.д.}$$

Розв"язок рівняння /I3/ шукаємо у вигляді

$$p_{22}^{L} = p_0 g^L(s)\left\{ \exp(-s) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \eta_{k1}^L + \exp\left[-s\left(1+\frac{2a}{R}\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \eta_{k2}^L \right\} . \qquad /I4/$$

Для визначення функцій η_{ki}^L одержуємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{L}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 1\right)\eta_{0i}^L = 0 \qquad \text{і т.д.} \qquad /I5/$$

Розв"язок рівняння /I5/ типу функції внутрішнього примежевого шару, який задовольняє умову $\partial p_{22}^L/\partial n = 0$ на T і є таким, що функція $p_{21}^L + p_{22}^L$ неперервна і гладка при $\theta = \frac{\pi}{2}$, має вигляд

$$\eta_{0i}^L = \begin{cases} [1+(-1)^l]\exp \gamma , & \text{коли } \gamma < 0; \\ [1+(-1)^{l+1}]\exp(-\gamma), & \text{коли } \gamma > 0. \end{cases} \qquad /I6/$$

Отже, записуємо нульове наближення розв"язку на поверхні сфери

$$p_2^L\Big|_{r=1} = p_0 g^L(s) \begin{cases} \exp[-s(1+\cos\theta)] - \exp[-s(1+\frac{2a}{R} - \cos\theta)] + 2\exp[-s(1+\frac{2a}{R} + \theta - \frac{\pi}{2})] , & \text{коли } \theta > \frac{\pi}{2}; \\ -\exp[-s(1+\cos\theta)] + 2\exp[-s(1+\frac{\pi}{2} - \theta)] + \exp[-s(1+\frac{2a}{R} - \cos\theta)] , & \text{коли } \theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad /I7/$$

Розв"язок є рядом по експонентах, показники яких визначають моменти приходу різних дифракційних хвиль у точку спостереження. Зокрема, якщо обмежитись лише доданками /II/, то одержимо так зване наближення Кірхгофа. Доданки /I6/ визначають тиск у повзучих хвилях.

Скориставшись формулою Кірхгофа, визначаємо тиск у довільній точці [3]

$$p_2^L = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left\{ p_2^L \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{L^{-d}}{l}\right) - \frac{\partial p_2^L}{\partial R}\,\frac{L^{-d}}{l} \right\}_{R=1} \sin\Psi\, d\Psi , \qquad /I8/$$

де $l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2r\cos(\theta - \Psi)}$ - безрозмірна віддаль від точки спостереження до довільної точки на поверхні інтегрування.

Обчислимо інтеграл /I8/ методом Лапласа [2]. Розглянемо випадок, коли $\theta > \frac{\pi}{2}$. Стаціонарні точки ψ_i інтегралів, які входять у формулу /I8/, є розв"язками рівнянь

$$\sin\psi_1 + r\sin(\theta-\psi_1)\left[r^2+1-2r\cos(\theta-\psi_1)\right]^{-1/2} = 0, \qquad /19/$$

$$-1 + r\sin(\theta-\psi_2)\left[r^2+1-2r\cos(\theta-\psi_2)\right]^{-1/2} = 0. \qquad /20/$$

Вклади від критичних точок $\psi = \psi_2$ характеризують тиск у повзучих хвилях, які сповзають з поверхні сфери. Вклади від критичних точок $\psi = \psi_1$ визначають тиск у хвилях, відбитих від поверхні сфери.

Визначимо функцію p_l^L у довільній точці осі $\theta = \pi$. Якщо обмежитись лише головними членами розкладів інтегралів /I8/ по степенях параметра ε, то тоді маємо

$$p_l^L = p_0 q^L(s)\left\{-\frac{1}{2r-1} l^{-s(r-1)} - 2\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{r}\sqrt[3]{s}\, l^{-s\tau_*}\right\}, \qquad /21/$$

де $\tau_* = 1 + \frac{2a}{R} + \sqrt{r^2-1} - \arcsin\frac{1}{r}$ – час приходу першої повзучої хвилі, якщо $\frac{2a}{R} < \pi$.

Використовуючи формули обернення перетворення Лапласа і приймаючи $g(\tau) = \sin(\Omega\tau)\left[H(\tau) - H(\tau-\tau_0)\right]$, знаходимо дифракційний тиск на акустичній осі

$$p_l\Big|_{\theta=\pi} = -\frac{p_0}{2r-1}\sin\Omega(\tau+1-r)\left[H(\tau+1-r) - H(\tau+1-r-\tau_0)\right] - 2\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\frac{p_0}{r}\Omega\int_0^{\tau}\frac{\cos\left[\Omega(x-\tau_*)\right]}{\sqrt[3]{\tau-x}}\left[H(x-\tau_*) - H(x-\tau_*-\tau_0)\right]dx.$$

Список літератури: I. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - "УМН", 1957, т.I2, № I2. 2. Е в г р а ф о в М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962. 3. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. М., "Мир". 1975.

УДК 624.04

К.С. Іванків

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ КУСКОВОЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Оптимальний розрахунок складових оболонок кусковопостійної товщини [2,5] показав, що деякі складові елементи мало напружені і напруження у них зменшується по меридіану.

Пропонується деякі елементи конструкції або конструкцію в цілому розглядати кусковозмінної товщини. Товщина h_i $(i=1,2,...,s)$ елемента задається змінною по меридіану. Серединна поверхня конструкції фіксується, а тому шукається оптимальний розподіл матеріалу за заданою серединною поверхнею.

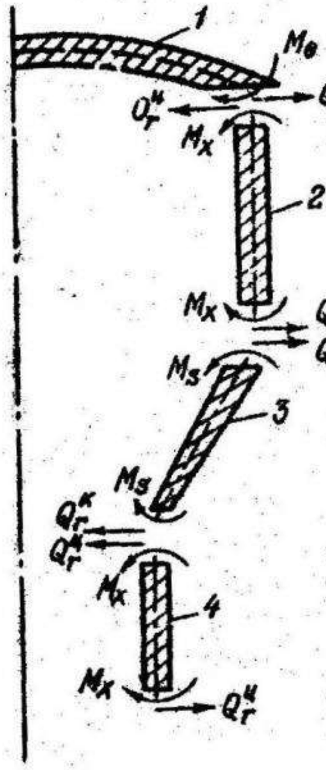
Задача оптимального проектування за вагою на міцність полягає в знаходженні мінімуму ваги конструкції при обмеженнях, що накладаються на напруження і деякі геометричні параметри: знайти вектор $\bar{h}^{\circ}$ такий, що

$$P(\bar{h}^{\circ})=\min_{\bar{h}\in H} P(\bar{h})\,;\quad \bar{h}\in H=\left\{\bar{h}\,\middle|\,\sigma_K^{max}\le[\sigma]\right\},\ K=\overline{1,P}\,. \qquad /1/$$

Розрахунок пружних конструкцій типу складових оболонок обертання при осесиметричному навантаженні здійснюється за безмоментною теорією з врахуванням крайового ефекту [2,3]. Довільні постійні загального розв"язку визначаються з умов сумісної деформації елементів конструкції та граничних умов. При швидкозмінній товщині елементів треба користуватися уточненими співвідношеннями [4].

Поставлена задача оптимального проектування за допомогою числових методів зводиться до задачі геометричного програмування [2].

Як приклад розглядається скляна конструкція, показана на рисунку, товщини складових елементів якої h_i /$i=1,2,4$/ і $h_3=\beta s$ /s - координата по твірній від вершини конуса, β - const /. Конструкція шарнірно оперта і знаходиться під дією рівномірного зовнішнього тиску інтенсивності q .



При однорідності конструкції мінімум об"єму забезпечує мінімум ваги.

Регульованими параметрами вибираються товщини елементів $h_i\,(i=1,2,4)$ і параметр β .

Після зведення задачі оптимального проектування /I/ до задачі геометричного програмування [1,2] отримуємо таку пряму програму: знайти мінімум

$$P(\bar{h}) \approx c_1 h_1^{a_{11}} h_2^{a_{12}} \beta^{a_{13}} h_4^{a_{14}} \qquad /2/$$

при обмеженнях

$$h_i > 0, \quad i=1,2,4; \quad \beta > 0;$$

$$\frac{\sigma_\theta^{max}}{[\sigma]} \approx c_2 h_1^{a_{21}} h_2^{a_{22}} \beta^{a_{23}} h_4^{a_{24}} \le 1; \quad \frac{\sigma_x^{max}}{[\sigma]} \approx c_3 h_1^{a_{31}} h_2^{a_{32}} \beta^{a_{33}} h_4^{a_{34}} \le 1; \qquad /3/$$

$$\frac{\sigma_s^{max}}{[\sigma]} \approx c_4 h_1^{a_{41}} h_2^{a_{42}} \beta^{a_{43}} h_4^{a_{44}} \le 1; \quad h_4 \ge K\beta \; (K = const) . \qquad /4/$$

Поставлена задача доведена до числа на М-222 при таких значеннях фіксованих параметрів:

$$F = 2\,мм, \quad R_2 = 19{,}45\,мм, \quad l_2 = 20\,мм, \quad \alpha_к = \pi/6, \quad l_3 = 20\,мм,$$
$$l_4 = 20\,мм, \quad q = 0{,}01\,кГ/мм^2, \quad \nu = 0{,}2, \quad E = 6240\,кГ/мм^2,$$
$$[\sigma]/q = 60, \quad K = 20.$$

Тут E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $[\sigma]$ - допустиме напруження; F - стріла підйому; R_2 - радіус циліндричної оболонки; l_2 , l_3 , l_4 - відповідні довжини елементів; $\alpha_к$ - кут конусності.

При отриманих оптимальних параметрах $h_1^0 = 1{,}45$ мм, $h_2^0 = 1{,}70$ мм, $\beta^0 = 0{,}0206$, $h_4^0 = 0{,}41$ мм максимальні напруження відповідно дорівнюють $\sigma_\theta^{max}/q = 56$, $\sigma_x^{max}/q = 59$, $\sigma_\varphi^{max}/q = 56$.

Розроблені алгоритми і програми можна використати як складові елементи загальної системи комплексної автоматизації процесу розрахунку і оптимального проектування ЕВП.

Список літератури: I. Д а ф ф и н Р., П и т е р с о н Э., З е н е р К. Геометрическое программирование. М., "Мир", 1972. 2. О щ и п к о Л.Й., І в а н к і в К.С., Ю д і н а Т.В. Оптимальний розрахунок деяких елементів електровакуумних приладів. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1977, вип.12. 3. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Т.I. М., "Машиностроение", 1968. 4. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Т.2. М., "Машиностроение", 1968. 5. Ф л е й ш м а н Н.П., И в а н к и в Е.С., О щ и п к о Л.Й. К оптимальному проектированию составных оболочек ЭВП. - В сб.: Качество, прочность, надежность и технологичность электровакуумных приборов. К., "Наукова думка", 1976.

УДК 516.6:517.944

Я.Г.Савула, канд.фіз.-мат.наук

НОВІ ОРТОГОНАЛЬНІ КРИВОЛІНІЙНІ КООРДИНАТИ

У прикладних задачах математичної фізики і механіки буває зручно визначати положення точки в просторі не трьома декартовими координатами x, y, z, а деякими іншими криволінійними $-\alpha_1$, α_2, α_3, які більш тісно пов"язані з досліджуваним об"єктом. При цьому, оскільки запис диференціальних виразів дивергенції, градієнта і т.п. є найпростішим в ортогональних системах координат, то вони найбільш вживані.

Побудуємо нову криволінійну систему координат, координатними поверхнями якої є різані поверхні /поверхні Монжа/ [3 - 5].

Припустимо, що напрямна різаної поверхні плоска гладка крива, задана рівняннями

$$x = R_2\, x_0(\alpha_2)\ ,\quad y = R_2 y_0(\alpha_2)\,. \qquad /1/$$

Твірною різаної поверхні є деяка інша гладка крива, задана параметрично в локальній системі координат η, ξ рівняннями

$$\eta = R_1 \eta_0(\alpha_1)\ ,\quad \xi = R_1 \xi_0(\alpha_1)\,. \qquad /2/$$

Як відомо [3,4], рівняння різаної поверхні з плоскою напрямною /1/ мають вигляд

$$\begin{aligned} x &= R_2 x_0(\alpha_2) - R_1 \eta_0(\alpha_1)\frac{y_0'(\alpha_2)}{\sqrt{[x_0'(\alpha_2)]^2+[y_0'(\alpha_2)]^2}}\,,\\ y &= R_2 y_0(\alpha_2) + R_1 \eta_0(\alpha_1)\frac{x_0'(\alpha_2)}{\sqrt{[x_0'(\alpha_2)]^2+[y_0'(\alpha_2)]^2}}\\ z &= R_1 \xi_0(\alpha_1)\,. \end{aligned} \qquad /3/$$

Розглянемо сім"ю ліній в системі координат η, ξ кожну з яких одержують шляхом зсуву точок кривої /2/ в напрямку нормалі. Оскільки напрямні косинуси нормалі до кривої /2/ можна представити співвідношеннями $-\frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2+(\xi_0')^2}}$, $\frac{\eta_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2+(\xi_0')^2}}$, то рівняння сім"ї кривих мають вигляд

$$\begin{aligned} \eta &= R_1\Big[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2+(\xi_0')^2}}\Big],\\ \xi &= R_1\Big[\xi_0 - (\alpha_3 + R_3)\frac{\eta_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2+(\xi_0')^2}}\Big]\,, \end{aligned} \qquad /4/$$

де R_3 - постійна; α_3 - параметр, кожному значенню якого відповідає одна лінія сім"ї /4/.

Вважатимемо криві /4/ гладкими. Це накладає на зміну параметра α_3 обмеження

$$(\eta')^2 + (\xi')^2 \neq 0\,. \qquad /5/$$

Підставляючи рівняння сім"ї кривих /4/ у формули /3/, одержуємо систему криволінійних координат

$$
\begin{aligned}
x &= R_2 x_0 - R_1\left[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\right]\frac{y_0'}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}}, \\
y &= R_2 y_0 + R_1\left[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\right]\frac{x_0'}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}}, \qquad /6/ \\
z &= R_1\left[\xi_0 - (\alpha_3 + R_3)\frac{\eta_0'}{\sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}}\right].
\end{aligned}
$$

Твердження. Система криволінійних координат /6/ - ортогональна. Обчисливши за формулами /6/ похідні $\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial z}{\partial \alpha_i}$ $(i = 1,2,3)$, знайдемо, що коефіцієнти g_{ij} $(i,j = 1,2,3,\ i \neq j)$ метричного тензора дорівнюють нулю, що доводить твердження.

Коефіцієнти Ляме H_1, H_2, H_3 ортогональної криволінійної системи координат /6/ можна записати так:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= R_1 t_1(\alpha_1, \alpha_3)\,\tau_1(\alpha_1), \\
H_2 &= R_1 t_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,\tau_2(\alpha_2), \qquad /7/ \\
H_3 &= R_1,
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2}, \qquad \tau_2 = \sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}, \qquad /8/ \\
t_1 &= 1 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0''\eta_0' - \xi_0'\eta_0''}{\tau_1^3}, \quad t_2 = \frac{R_2}{R_1} - \left[\eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\frac{\xi_0'}{\tau_1}\right]\frac{y_0''x_0' - y_0'x_0''}{\tau_2^3}.
\end{aligned}
$$

Відомо [1], що якобіан J ортогональної криволінійної системи координат визначається через коефіцієнти Ляме співвідношеннями

$$
J = H_1 H_2 H_3 . \qquad /9/
$$

Звідси, щоб визначник Якобі був ненульовим, достатньо вимагати, щоб не дорівнював нулю жоден із коефіцієнтів Ляме. Згідно з формулами /7/, /8/, оскільки напрямна і твірна різаної поверхні - гладкі криві, тобто $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$, ця вимога еквівалентна такій: $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$.

З огляду на вираз /5/ перше з останніх співвідношень виконується завжди. Таким чином, якобіан криволінійної системи координат /6/ відмінний від нуля, якщо $t_2 \neq 0$.

Із формул /6/ одержуються відомі координатні системи: циліндрична, сферична, а також такі, координатними поверхнями яких є поверхні обертання.

Прийнявши $x_0 = \cos\alpha_2,\ y_0 = \sin\alpha_2,\ \eta_0 = \sin\alpha_1,\ \xi_0 = \cos\alpha_1,\ R_2 = 0,\ R_3 = -1$, із співвідношень /6/ одержуємо відомі формули сферичної системи координат

$$x = R_1\alpha_3 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2,\ y = R_1\alpha_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2,\ z = R_1\alpha_3 \cos\alpha_1, \qquad /10/$$

коефіцієнти Ляме якої, згідно з формулами /7/, /8/, мають вигляд

$$H_1 = R_1\alpha_3,\quad H_2 = R_1\alpha_3 \sin\alpha_1,\quad H_3 = R_1. \qquad /11/$$

Щоб одержати циліндричну систему координат, необхідно прийняти у формулах /6/

$$x_0 = \alpha_2,\ y_0 = 0,\quad \eta_0 = -\sin\alpha_1,\ \xi_0 = \cos\alpha_1,\quad R_3 = -1.$$

Після нескладних обчислень одержуємо

$$x = R_2\alpha_2,\ y = -R_1\alpha_3 \sin\alpha_1,\quad z = R_1\alpha_3 \cos\alpha_1.$$

Коефіцієнти Ляме цієї системи координат, згідно зі співвідношеннями /7/, /8/, набирають вигляду

$$H_1 = R_1\alpha_3,\quad H_2 = R_2,\quad H_3 = R_1.$$

Коли прийняти у формулах /6/ $\eta_0 = -\sin\alpha_1,\ \xi_0 = \cos\alpha_1$, то одержимо координатну систему із координатними поверхнями $\alpha_3 = const$ у вигляді криволінійних труб колового перерізу. У випадку $x_0 = \cos\alpha_2$, $y_0 = \sin\alpha_2$ ці поверхні є торами.

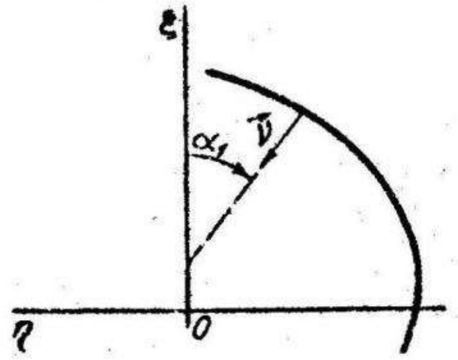


Рис.I.

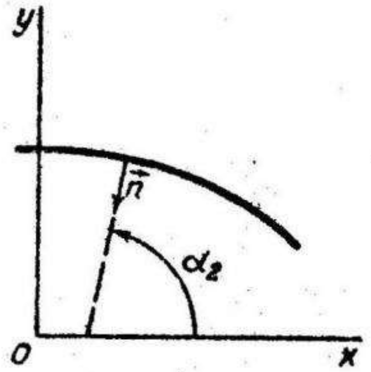


Рис.2.

Якщо параметром α_1 твірної /2/ різаної поверхні є кут між нормаллю $\vec{\nu}$ і віссю ξ /рис.I/, параметром α_2 напрямної /I/ є кут між нормаллю $\vec{n}$ і віссю x /рис.2/, то формули /6/ - /8/ для побудованої криволінійної системи координат спрощуються. Тоді маємо

$$\frac{\xi_0'' \eta_0' - \xi_0' \eta_0''}{q_1^2} = 1 , \quad \frac{y_0'' x_0' - y_0' x_0''}{q_2^2} = 1 , \qquad /I2/$$

оскільки ліві частини цих рівностей дорівнюють швидкостям зміни кутів між нормалями і параметрами відповідно α_1 та α_2. Напрямні косинуси нормалей $\vec{\nu}$ і $\vec{n}$ такі:

$$\vec{\nu} = \left\{ -\frac{\xi_0'}{q_1} , \frac{\eta_0'}{q_1} \right\} , \qquad \vec{n} = \left\{ -\frac{y_0'}{q_2} , \frac{x_0'}{q_2} \right\} . \qquad /I3/$$

Для вибраної параметризації кривих /I/, /2/ величини /I3/ можна записати у вигляді

$$\vec{\nu} = \{ \sin\alpha_1 , -\cos\alpha_1 \} , \quad \vec{n} = \{ -\cos\alpha_2 , -\sin\alpha_2 \} . \qquad /I4/$$

Враховуючи співвідношення /I3, /I4/, із формул /6/ одержуємо

$$\begin{aligned} x &= R_2 x_0(\alpha_2) - R_1 [\eta_0(\alpha_1) - (\alpha_3 + R_3) \sin\alpha_1] \cos\alpha_2 , \\ y &= R_2 y_0(\alpha_2) - R_1 [\eta_0(\alpha_1) - (\alpha_3 + R_3) \sin\alpha_1] \sin\alpha_2 , \\ z &= R_1 [\xi_0(\alpha_1) + (\alpha_3 + R_3) \cos\alpha_1] . \end{aligned} \qquad /I5/$$

Враховуючи формули /I2/, запишемо коефіцієнти Ляме /7/, /8/ системи координат /I5/ так:

$$H_1 = R_1 t_1(\alpha_1, \alpha_3), \quad H_2 = R_1 t_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad H_3 = R_1. \qquad /I6/$$

Тут

$$t_1 = \sqrt{(\eta_0')^2 + (\xi_0')^2} + \alpha_3 + R_3,$$
$$t_2 = \frac{R_2}{R_1}\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2} - \eta_0 + (\alpha_3 + R_3)\sin\alpha_1. \qquad /I7/$$

Зауважимо, що використані нами при одержанні сферичної системи координат /I0/ рівняння кола параметризовані кутами між нормалями і осями координат. У зв"язку з цим співвідношення /I0/, /II/ одержуються шляхом нескладних обчислень із формул /I5/ – /I7/, якщо прийняти

$$R_2 = 0, \ R_3 = -1, \ x_0 = \cos\alpha_2, \ y_0 = \sin\alpha_2, \ \eta_0 = \sin\alpha_1, \ \xi = \cos\alpha_1.$$

Список літератури: I. К о ш л я к о в Н.С., Г л и н е р Э.Б., С м и р н о в М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., "Высшая школа", 1970. 2. Л у р ь е А.И. Теория упругости. М., "Наука", 1970. 3. Н о р д е н А.П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956. 4. С а в у л а Я.Г. Статика оболочек с резной поверх срединной поверхностью. Автореф. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Львов, 1973. 5. С а в у л а Я.Г., Ф л е й ш м а н Н.П. Про одне можливе розширення класу оболонок канонічних форм. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1974, вип. 9.

УДК 518.12:517.55

А.І.Кардаш,канд.фіз.-мат.наук, А.М.Кузик, І.І.Чулик,канд.фіз.-мат.наук

ПРО ДЕЯКІ АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІАГРАМИ НЬЮТОНА ФУНКЦІЇ ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ КРИВОЇ СПРЯЖЕНИХ РАДІУСІВ ЗБІЖНОСТІ

Нехай задано степеневий ряд

$$f(z,\omega)=\sum_{k,l=0}^{\infty}a_{kl}z^k\omega^l,\ a_{00}\neq 0\ , \qquad /1/$$

збіжний в повній бікруговій області D. В роботі /1/ розглядаються і вивчаються поняття діаграми Ньютона $\tilde{\mathcal{J}}_f$ та мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z,\omega)$ ряду /1/. Нехай $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathcal{R}_f}$ – асимптотичний конус діаграми $\tilde{\mathcal{J}}_f$, а $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}_f}(z,\omega)$ – асимптотична мажоранта Ньютона ряду /1/. Діаграма $\tilde{\mathcal{J}}_f$ та її асимптотичний конус $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathcal{R}_f}$ розглядаються в евклідовому просторі $\mu\nu\lambda$ [2,3].

Нехай рівняння асимптотичного конуса має вигляд /2/

$$\lambda=F(\mu,\nu). \qquad /2/$$

Для зручності викладу вважатимемо, що область D обмежена. Тоді функція $F(\mu,\nu)$ визначена в області $\mu\geq 0$, $\nu\geq 0$.

Розглянемо функцію $\chi(q)\equiv F(1-q,q)$, визначену і опуклу на відрізку $[0,1]$, який позначимо через M. Через m позначимо скінчену або зчислену множину точок відрізка $[0,1]$, в яких функція $\chi(q)$ недиференційовна. Тоді /2,3/ крива спряжених радіусів збіжності ряду /1/ визначається рівняннями

$$\begin{aligned} x&=\exp[\chi(q)-q\chi'(q)],\\ y&=\exp[\chi(q)+(1-q)\chi'(q)], \end{aligned} \qquad /3/$$

якщо $q \in M \setminus m$, і рівнянням

$$x^{1-q} y^{q} = \exp[\chi(q)], \qquad /4/$$

$$\exp[\chi(q) - q\chi'(q+0)] < x < \exp[\chi(q) - q\chi'(q-0)],$$

якщо $q \in m$, де $\chi'(q-0)$, $\chi'(q+0)$ відповідно ліва і права похідні функції $\chi(q)$ в точці q. Криву /4/ за Фабером [4] називатимемо W - кривою. Криву спряжених радіусів збіжності, яка визначається рівняннями /3/ і /4/, позначимо через

$$\varphi(x,y) = 0. \qquad /5/$$

Будь-якій точці (x, y) кривої /5/ відповідає площина

$$\lambda = \mu \ln x + \nu \ln y ,$$

а умови $\mu \ln x + \nu \ln y - \lambda \le 0$, якщо точка (x, y) пробігає вздовж кривої /5/, визначають в додатному октанті простору $\mu\nu\lambda$ асимптотичний конус $\sim_{R_1}^{q}$. При цьому для будь-якого $q \in [0,1]$ вірне твердження: спряжені радіуси збіжності ряду /I/ задовольняють рівняння

$$x^{1-q} y^{q} = \exp[\chi(q)] .$$

Відзначимо, що необхідною і достатньою умовою того, що спряжені радіуси збіжності утворюють W -криву, є наявність ребра злому поверхні $\sim_{R_1}^{q}$.

Отриманий аналітичний вираз кривої /5/ дає змогу зробити висновок про неперервність кривої /5/ та її диференційованість, або існування хоча б лівої або правої похідних в кожній точці цієї кривої, що добре узгоджується з результатами, отриманими раніше іншим шляхом [4].

Логарифмічна опуклість кривої спряжених радіусів збіжності у випадку /4/ очевидна, а у випадку /3/ зводиться до виконання умови $\chi''(q) > 0$, що завжди має місце [2,3].

Якщо на деякому інтервалі (q_1, q_2), де $0<q_1<q_2<1$, виконується умова $\chi''(q)=0$, то це означає, що $\chi(q)$ - лінійна на (q_1, q_2), а асимптотичний конус $\tilde{\mathcal{I}}_{n_f}$ для всіх μ, ν, що визначаються умовами

$$\mu=(1-q)t,$$
$$\nu=qt,$$
$$t>0,\ q_1<q<q_2,$$

вироджується в плоску грань, обмежену твірними $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$, які проектуються відповідно на промені

$$q_1\mu=(1-q_1)\nu,\ \lambda=0,$$
$$q_2\mu=(1-q_2)\nu,\ \lambda=0.$$

Мають місце теореми:

Теорема I. Нехай $\tilde{q}\in m$ і в деякому околі Q точки $\tilde{q}$ існують $\chi'(q)$ та $\chi''(q)$. Тоді, якщо $\chi''(q)>0$ хоча б зліва або справа від точки $\tilde{q}$ в околі Q, то крива /5/ гладка в усіх точках, що відповідають $q\in Q$.

Теорема 2. Для того, щоб на кривій /5/ існувала кутова точка, необхідно й достатньо, щоб для всіх $q\in(q_1, q_2)$, де $0<q_1<q_2<1$, $q_1, q_2\in m$ функція $\chi(q)$ була лінійною.

Список літератури: І. Кардаш А.І., Костовський О.М., Чулик І.І. Мажоранта та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. - "Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.", 1967, вип.3. 2. Кардаш А.І., Чулик І.І. Дослідження границі області збіжності степеневих рядів функції двох комплексних змінних. - "ДАН УРСР, серія А", 1972, № 5. 3. Кардаш А.І., Чулик І.І. Дослідження граничних властивостей мажоранти й діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних. - "ДАН УРСР", серія А", 1972, № 4. 4. Agrusti G. Sui raggi associati di convergenza di una serie potenze ad n variabili complesse. - „Giorn. mat. Battaglini", 1955, 83, №2

УДК 517.537

Г.Г.Цегелик, к 1д.фіз.-мат.наук

ПРО ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

Розглянемо ряд типу Тейлора-Діріхле [2]

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^{m_\nu} e^{-\lambda_\nu z}, \qquad /I/$$

де

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots, \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty;\ 0<m_1<m_2<\cdots, \lim_{n\to\infty} m_n=\infty;$$

A_ν – довільні комплексні числа.

Позначимо

$$\rho_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{m_n}, \quad \rho_2=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{m_n}.$$

Нехай

$$\mathfrak{M}_{f_1}(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} T_\nu e^{-\lambda_\nu z}, \quad \mathfrak{M}_{f_2}(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} T_\nu^{*} e^{-m_\nu z}$$

є відповідно мажоранти Ньютона [I] рядів

$$f_1(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu z}, \quad f_2(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-m_\nu z}.$$

Використовуючи результати робіт [I,2], одержуємо такі теореми.

Теорема I. Якщо виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0,$$

то ряд /I/ збігається абсолютно в областях

$$|z|\geq 1, \ |z|<e^{\rho_1(x-K_1)} \qquad \text{і} \qquad |z|\leq 1, \ |z|<e^{\rho_2(x-K_1)}$$

і розбігається в областях

$$|z|>1,\ |z|>e^{\rho_2(x-K_1)} \quad і \quad |z|<1,\ |z|>e^{\rho_1(x-K_1)},$$

де

$$K_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln T_n}{\lambda_n}=0.$$

<u>Теорема 2</u>. Якщо виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{m_n},$$

то ряд /I/ збігається абсолютно в областях

$$x>0,\ |z|<e^{\rho_1 x-K_2} \qquad і \quad x<0,\ |z|<e^{\rho_2 x-K_2}$$

і розбігається в областях

$$x>0,\ |z|>e^{\rho_2 x-K_2} \qquad і \quad x<0,\ |z|>e^{\rho_1 x-K_2},$$

де

$$K_2=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln T_n^*}{m_n}.$$

<u>Список літератури:</u> І. К о с т о в с ь к и й О.М.,Ц е г е л и к Г.Г. Побудова мажорант та діаграм Ньютона рядів Діріхле. - "Вісник Львів. ун-ту, сер.мех.-мат.", І97І, вип.6. 2.Л у н ц Г.Л. О рядах типа Тейлора-Дирихле. - "Изв. АН Арм.ССР, сер.физ.-мат.наук", І96І, І4, № 2.

М Е Х А Н І К А

УДК 539.311

Д.В.Грилицький, д-р техн.наук, В.К.Опанасович,канд.фіз.-мат.наук

СТИСК КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З ФІЗИЧНОЮ ЩІЛИНОЮ НА ЛІНІЇ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Розглянемо безмежну пластинку, що складається з двох ізотропних, спаяних між собою, півплощин. Нехай на лінії розділу матеріалів є фізична щілина довжиною $2a$ та сталої ширини h, що співрозмірна з пружними переміщеннями. Береги тріщини паралельні лінії спаю. На нескінченності пластинка стискається рівномірно розподіленим навантаженням q, перпендикулярним до лінії розділу матеріалів, і розтягується рівномірно розподіленими напруженнями p_1 і p_2, паралельними лінії щілини відповідно в верхній і нижній півплощині. Вважаємо, що під дією заданого напруженого стану береги тріщини на деякій частині вступають у гладкий контакт.

Визначимо напружений стан пластинки. Зокрема довжину контакту між берегами щілини і характер розподілу на ній тиску.

Початок декартової системи координат розмістимо в центрі щілини, направивши вісь Ox по лінії спаю. Всі характеристики, що належать до верхньої півплощини, будемо позначачи індексом "I", а до нижньої - індексом "2". Лінію спаю позначимо через L'', вільні краї щілини - через L', лінію контакту - через L.

З фізичних міркувань ясно, що площадка контакту буде симетричною відносно осі Oy і її довжину позначимо через $2l$ /рис.I/.

Згідно з умовами задачі на лінії розділу матеріалів будемо мати

$$(Y_y - iX_y)^+ = (Y_y - iX_y)^-, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- \quad \text{на } L'',$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = X_y^+ = X_y^- = 0 \quad \text{на } L', \quad /I/$$

$$X_y^+ = X_y^- = 0, \quad Y_y^+ - Y_y^-, \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- = 0 \qquad \text{на } L .$$

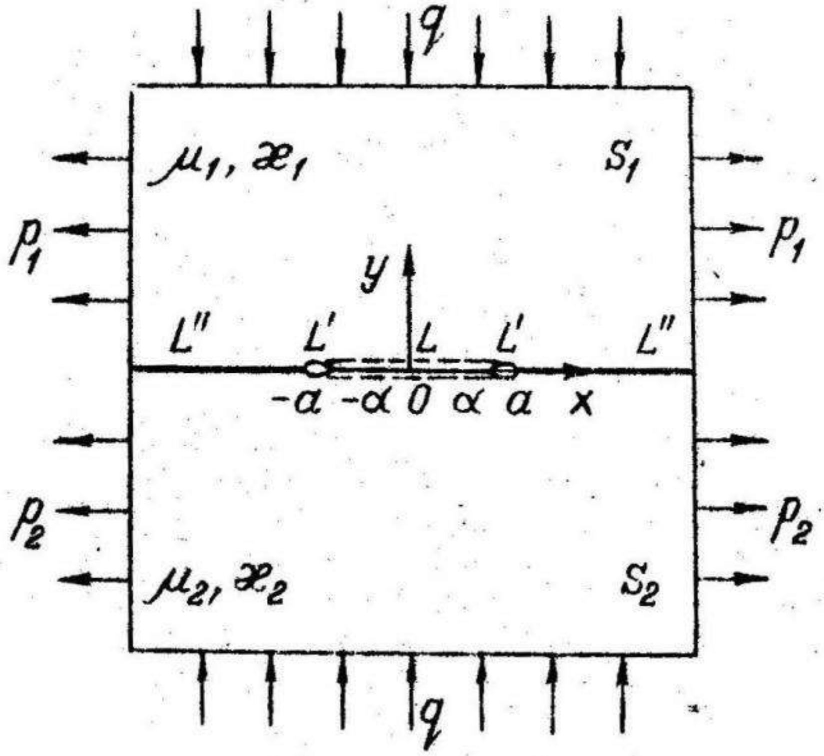


Рис.I

Тут індексами "+" і "-" позначено граничне значення функцій на дійсній осі відповідно зверху, тобто із S_1, і знизу, тобто із S_2.

Зауважимо, що в подальших викладках індекс j набуває лише двох значень I і 2.

Введемо функції напружень Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ /3/ для областей S_j. Аналітично продовжимо функцію $\Phi_j(z)$ із півплощини S_j у півплощину S_{3-j} за формулою

$$\Phi_j(z) = -\bar{\Phi}_j(z) - z\bar{\Phi}_j'(z) - \bar{\Psi}_j(z),$$

тоді напружено-деформований стан у пластинці можемо визначити за співвідношеннями

$$X_x + Y_y = 2\left[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}\right],$$

$$Y_y - iX_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi_j'(z)}\ , \qquad /2/$$

$$2\mu_j\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa_j\Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}\ .$$

Зауважимо, що при великих $|z|$ функцію $\Phi_j(z)$ можемо записати у вигляді

$$\Phi_j(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) + \begin{cases} \frac{1}{4}(P_j - q) & z \in S_j\ , \\ \frac{1}{4}(P_j + 3q) & z \in S_{3-j}\ , \end{cases}$$

Крім того, для розв"язуваності задачі між напруженнями на нескінченності і пружними сталими пластинки повинна виконуватись залежність

$$\mu_1(1 + \varkappa_2)P_2 - \mu_2(1 + \varkappa_1)P_1 = [3(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1\varkappa_2 - \mu_2\varkappa_1]\,q$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_0(z) = D_j\Phi_j(z) - R_{3-j}\Phi_{3-j}(z) \qquad z \in S_j\ , \qquad /3/$$

то для потенціалів $\Phi_j(z)$ є залежність

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} A_j^{-1}\left(R_{3-j}B + \Phi_0(z)\right) & z \in S_j\ , \\ A_{3-j}^{-1}\left(D_{3-j}B - \Phi_0(z)\right) & z \in S_{3-j}\ , \end{cases} \qquad /4/$$

де

$$D_j = c_j g^{2-j}, \quad R_j = -c_j g^{j-1}, \quad c_j\,\frac{(-1)^j\mu_{3-j}(1 + \varkappa_j)}{1 - g}\ ,$$

$$B = \frac{1}{4}(P_1 + P_2 + 2q)\ , \qquad A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\varkappa_j\ , \quad g = -A_1/A_2\ . \qquad /4'/$$

Із /3/ випливає, що для функції $\Phi_0(z)$ при великих $|z|$ наявний розклад

$$\Phi_0(z) = -\frac{A_1}{1-g}\,q + O\left(\frac{1}{z}\right)\ . \qquad /5/$$

Прийнявши до уваги /I/, /2/, /4/, невідому функцію $\Phi_0(z)$ знайдемо з задачі лінійного спряження

$$\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = A_1 Y_y \qquad x \in L+L', \qquad /6/$$
$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = 0 \qquad x \in L'',$$

тут Y_y – шукані контактні напруження.

Розв"язавши /6/, одержимо

$$\Phi_0(z) = \frac{A_1 X_0(z)}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{Y_y\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} + (C_0 + C_1 z)X_0(z) \quad , \qquad /7/$$

де C_0 і C_1 – невідомі постійні, які знаходимо з умови однозначності переміщень і співвідношення /5/

$$C_1 = -\frac{A_1}{1-g}q\,, \qquad C_0 = -2i\beta a C_1\,,$$
$$X_0(z) = (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \qquad \beta = \frac{1}{2\pi}\ln|g|\,.$$

Остання гранична умова /I/, через функцію $\Phi_0(z)$ виразиться так:

$$\Phi_0^+(x) - \overline{\Phi_0^+(x)} - \Phi_0^-(x) + \overline{\Phi_0^-(x)} = 0 \qquad x \in L\,,$$

або, використовуючи /7/, дістаємо

$$\mathrm{Im}\left[\frac{X_0^+(x)}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{Y_y\,dt}{X_0^+(t)(t-x)} - \frac{q}{1-g}(x-2i\beta a)X_0^+(x)\right] = 0 \quad x \in L\,. \qquad /8/$$

Співвідношення /8/ є сингулярне інтегральне рівняння для знаходження невідомих контактних напружень Y_y .

Якщо ввести функцію

$$W(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{Y_y\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{q}{1-g}(z-2i\beta a)X_0(z)\,, \qquad /9/$$

то, як випливає з /8/, вона задовольняє таку крайову задачу

$$W^+(x) - gW^-(x) = 0 \qquad x \in L',$$
$$W^+(x) - \overline{W^+(x)} = 0 \qquad x \in L\,, \qquad /10/$$
$$W^-(x) - \overline{W^-(x)} = 0 \qquad x \in L\,,$$

загальний розв"язок якої наведено в роботі [2].

Розв"язуючи /10/, знаходимо

$$W(z) = -\frac{q}{1-g}\left(1 - \frac{2i\beta a K_0}{\sqrt{z^2 - d^2}}\right) R(z), \qquad /11/$$

де

$$R(z) = \sqrt{\frac{z^2 - d^2}{z^2 - a^2}} \left(\frac{\sqrt{z^2 - d^2} + aK_0}{\sqrt{z^2 - d^2} - aK_0} \right)^{i\beta}, \quad K_0 = \sqrt{1 - \frac{d^2}{a^2}}.$$

З /9/ випливає, що

$$W^+(x) - gW^-(x) = Y_y \qquad x \in L.$$

Підставляючи у цю рівність формулу /11/, одержуємо вираз для невідомих контактних напружень

$$Y_y = -\frac{2q\, e^{\pi\beta}}{1-g} \left\{ \sqrt{\frac{d^2 - x^2}{a^2 - x^2}}\, ch\left[2\beta \gamma_1(x)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{2\beta a K_0}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, sh\left[2\beta \gamma_1(x)\right] \right\} \qquad x \in L, \qquad /12/$$

де

$$\gamma_1(x) = arctg \frac{\sqrt{d^2 - x^2}}{a K_0}.$$

Зауважимо, що для визначення функції $\Phi_0(z)$ у цьому випадку вигідно не підставляти /12/ у /7/, а порівняти /7/ і /9/, і, виходячи з /11/, написати відразу вираз для $\Phi_0(z)$

$$\Phi_0(z) = -\frac{A_1 q}{1-g}\left(1 - \frac{2i\beta a K_0}{\sqrt{z^2 - d^2}}\right) R(z). \qquad /13/$$

Для повного розв"язку задачі необхідно визначити область контакту, яку знаходимо з умови

$$\int_{-a}^{-d} (V^+ - V^-)'\, dx = -h,$$

і, опускаючи викладки, можемо записати так:

$$n = \int_d^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ \sqrt{x^2 - d^2} \cos\left[\beta \gamma_3(x)\right] + 2\beta a K_0 \sin\left[\beta \gamma_3(x)\right] \right\} dx, \qquad /14/$$

де

$$n = \frac{q^*}{q}, \quad q^* = \frac{2\mu_1 \mu_2 h e^{\pi\beta}}{a A_1}, \quad \gamma_3(x) = ln \frac{aK_0 + \sqrt{x^2 - d^2}}{aK_0 - \sqrt{x^2 - d^2}},$$

q^* - те значення q, при якому починає зарождуватись контакт.

Обчислення показали, що для всіх фізично можливих пружних характеристик матеріалу площадку контакту з точністю до I,5% можна шукати за формулою

$$n = E\left(\frac{\pi}{2}, K_0\right) - \lambda^2 F\left(\frac{\pi}{2}, K_0\right), \qquad /I5/$$

яка одержується з /I4/, прийнявши $\beta = 0$, тобто для однорідної пластинки.

У формулі /I5/ E і F - символи повних еліптичних інтегралів відповідно першого і другого роду.

Подібно до [4] коефіцієнти інтенсивності напружень введемо за формулою

$$\tilde{\Phi}(z_m) = (-1)^{m+1} 0{,}5 A_1 \sqrt{a}\, e^{-\pi\beta} (K_{1m} - iK_{2m}),$$

де

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi_0(z)\sqrt{z^2 - a^2}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{i\beta}, \quad z_m = (-1)^{m+1} a,$$

$m=1$ для кінця a і $m=2$ для кінця $-a$; K_{1m}, K_{2m} - коефіцієнти інтенсивності напружень.

Провівши відповідні перетворення, знаходимо, що в нашому випадку

$$K_{11} = K_{12} = \Gamma(\cos\delta + 2\beta\sin\delta),$$

$$K_{21} = -K_{22} = \Gamma(2\beta\cos\delta - \sin\delta),$$

де

$$\delta = 2\beta \ln K_0, \qquad \Gamma = -\frac{q\sqrt{a}\,K_0}{ch\,\pi\beta}.$$

На рис.2 графічно зображено залежність правої частини /I5/ від відношення величини області контакту до довжини тріщини. Зміну коефіцієнтів інтенсивності напружень від того ж відношення показано на рис.3,4. При цьому всі криві обчислені для $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 2$ за ви-

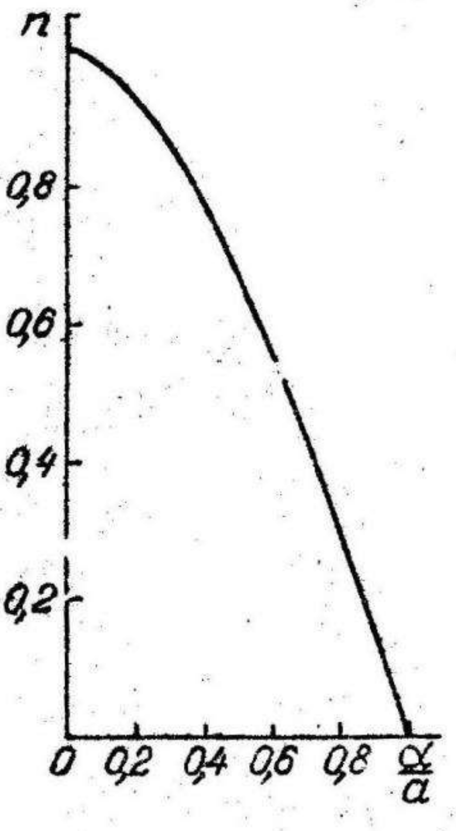


Рис.2.

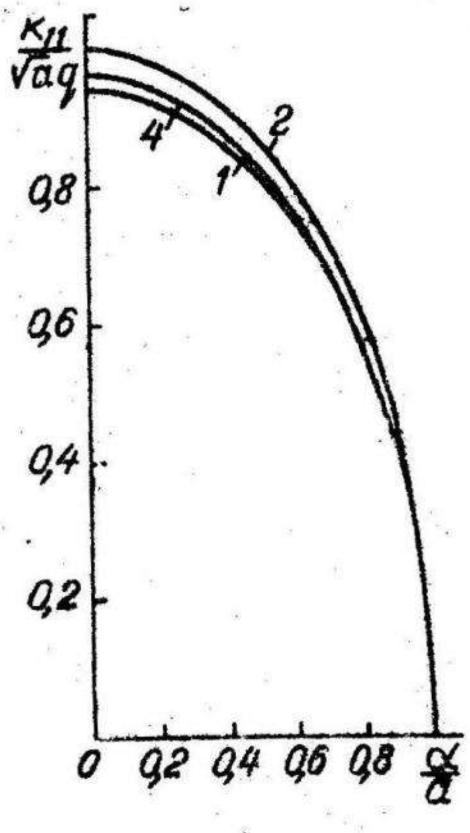


Рис.3.

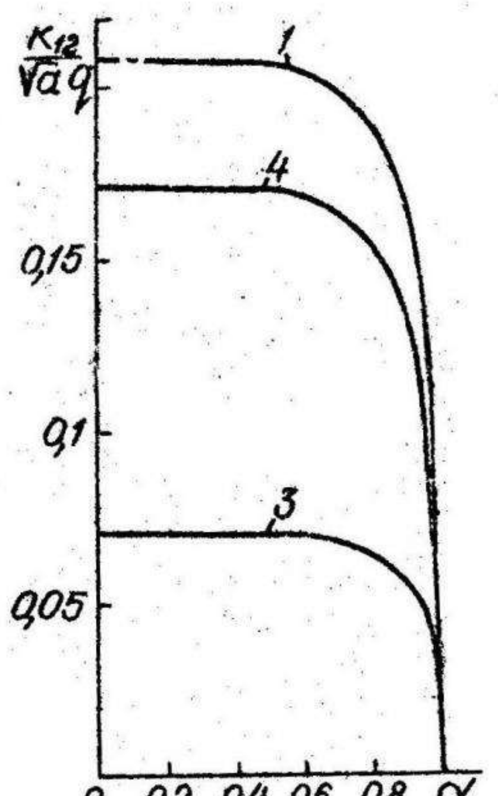


Рис.4.

нятком першої кривої, для якої $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_2 = 3$. Крім того, для першої кривої $\rho = \mu_1/\mu_2 = 0$, для другої – $\rho = 1$, для третьої – $\rho = 0.5$, для четвертої – $\rho = 0.1$.

Зауважимо, що детальне дослідження даної задачі для випадку дії зосереджених сил проведено в роботі [1], минаючи етап сингулярного інтегрального рівняння.

Список літератури: 1. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К. Распределение напряжений в кусочнооднородной плоскости со щелью при сжатии. - "Известия АН Арм.ССР. "Механика",1974,т.27,№ 2. 2. Грилицкий Д.В., Опанасович В.К. О замкнутом решении одного сингулярного интегрального уравнения. - "Математическая физика", 1973, вып.14. 3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966. 4. Сих, Райс. Изгиб неоднородных пластин с трещинами. - "Прикладная механика", 1964, т.31, Е, № 3.

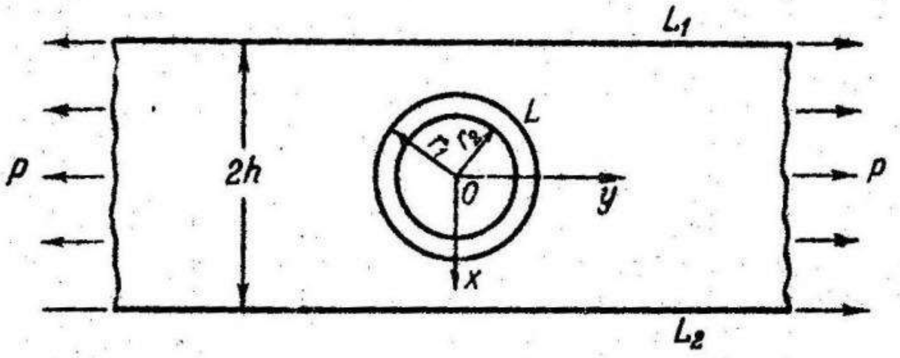
УДК 539.3

Т.Л.Мартинович, д-р фіз.-мат.наук, М.К.Зварич, канд.фіз.-мат.наук, В.С.Щукін

ПРУЖНА РІВНОВАГА СМУГИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНО ЗАМКНУТИЙ СТЕРЖЕНЬ

Проблема визначення концентрації напружень в смузі з одним отвором або нескінченною кількістю кругових отворів розглядалася в [1,2], [4-7]. У цій роботі, виходячи з граничних умов в інтегральній формі, що містять довільну голоморфну функцію, розв"язана задача про напружений стан смуги, в круговий отвір якої впресовано пружне кільце. Напружено-деформований стан кільця описується теорією криволінійних стержнів.

Розглянемо ізотропну смугу шириною $2h$ з круговим отвором радіуса r_1, в який впресовано пружне кільце /стержень/, поперечний переріз якого може бути довільної форми, симетричної відносно серединної площини смуги. Тертям на лінії контакту між пластинкою і кільцем нехтуємо. До внутрішнього контуру кільця $r = r_2$ прикладено рівномірно розподілене навантаження N, а сторони смуги L_1 і L_2 вільні від завантаження. На нескінченності смуга розтягається зусиллями інтенсивності p. При цьому припускається, що контакт між тілами здійснюється вздовж всього контура L.



Після того, як в отвір смуги впресовано кільце, граничні умови задачі згідно з [3] мають вигляд

$$\int_L F_1'(t)\,\mathrm{Re}\,U\,dt = 2\mu \int_L F_1'(t)\left[u_{1n} + \varepsilon^*\right]dt, \qquad /1/$$

$$\int_L \overline{F_1'(t)}\,V\,d\bar{t} = -\int_L N^{(1)}\overline{F_1(t)}\,dt; \quad \int_L F_1'(t)\,V\,dt = -\int_L N^{(1)} F_1(t)\,dt.$$

$$dV = 0, \quad t \in L_j, \ (j = 1,2), \qquad /2/$$

$$U = i\bar{t}\left[\varkappa\varphi_1(t) - t\,\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}\right], \quad V = \varphi_1(t) + t\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}.$$

$\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ – комплексні потенціали, які визначають напружений стан смуги; $F_1(z)$ – довільна функція, голоморфна в області, зайнятій смугою; u_{1n} – нормальна складова переміщення контурних точок кільця; $N^{(1)}$ – нормальна складова контактного напруження; ε^* – величина порядку пружних переміщень; t – афікс точки контура.

Вважаючи, що отвір розміщений на однаковій відстані від сторін смуги, яка розтягається зусиллями, паралельними осі Oy /див. рисунок/, функції напруження $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ виберемо у вигляді [1]

$$\varphi_1(z)=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} a_k r_1^k z^{-k}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k r_1^k\left[(2h+z)^{-k}-(2h-z)^{-k}\right]+c_1 z,$$

$$\psi_1(z)=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} b_k r_1^k z^{-k}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k r_1^k\left[(2h+z)^{-k}-(2h-z)^{-k}\right]+d_1 z . \qquad /3/$$

Величини u_{1n}, $N^{(1)}$ і довільну функцію $F_1(z)$ на контурі кругового отвору γ / $t=r_1\sigma$ / згідно з [3] подамо у вигляді

$$u_{1n}=\gamma_0+\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\gamma_k(\sigma^k+\sigma^{-k}),\quad F_1(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\sigma^{-n} ,$$

$$N^{(1)}=\frac{g}{2hr_1r_0}\left\{\gamma_0+\frac{1}{1+\frac{r_0}{h_0}}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}(1-k^2)^2\gamma_k(\sigma^k+\sigma^{-k})\right\}+\frac{h^*r_2}{h\,r_1}N. \qquad /4/$$

Внесемо розклади /3/ і /4/ у граничні умови /I/ і виконаємо інтегрування вздовж контура γ, приймаючи при цьому всі E_j, крім E_n, рівними нулю. Одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\sum_{k=0,2\ldots}^{\infty} g_{kn}^{(1)}\gamma_k+\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty} a_{kn}^{(1)}a_k+\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty} b_{kn}^{(1)}b_k+\sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(1)}\alpha_k+\sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}\beta_k=\varepsilon_n+P_n^{(1)},$$

$$\sum_{k=0,2\ldots}^{\infty} g_{kn}^{(2)}\gamma_k+\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty} a_{kn}^{(2)}a_k+\sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)}\alpha_k+\sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}\beta_k=P_n^{(2)}, \qquad /5/$$

$$\sum_{k=0,2\ldots}^{\infty} g_{kn}^{(3)}\gamma_k+\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty} a_{kn}^{(3)}a_k+\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty} b_{kn}^{(3)}b_k+\sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(3)}\alpha_k=P_n^{(3)},\qquad n=1,3,5,\ldots,$$

де

$$g_{kn}^{(1)}=-4\mu\delta_{kn};\ \varepsilon_n=4\mu\varepsilon^*\delta_{-n};\ P_n^{(1)}=\frac{p}{2}r_1\left[(1-\varkappa)\delta_{-n}+\delta_{-n+2}\right];$$

$$a^{(1)}_{kn} = (\varkappa + k)\,\delta_{k-n+1}; \quad b^{(1)}_{kn} = -\delta_{k-n-1} - \delta_{-k-n+1};$$

$$c^{(1)}_{kn} = (\varkappa - n)\,A_{kn}(1+\delta_{-n}); \quad d^{(1)}_{kn} = -A_{k,n-2}\,\delta^*_{n-2};$$

$$a^{(2)}_{kn} = \delta_{n-k-1}; \quad c^{(2)}_{kn} = (n+2)\,A_{k,n+2}; \quad d^{(2)}_{kn} = A_{k,n}; \qquad /6/$$

$$g^{(2)}_{kn} = \frac{g}{2hr_0}\,\frac{(1-k^2)^2}{1+\frac{r_0}{\eta_c}}\,\frac{1}{n}\,\delta_{n-k}; \quad P^{(2)}_n = -\frac{P}{2}\,r_1\,\delta_{-n}; \quad g^{(3)}_{0,n} = -\frac{g}{2h\,r_0}\,\delta_{-n};$$

$$g^{(3)}_{kn} = -\frac{g}{2hr_0}\,\frac{(1-k^2)^2}{1+\frac{r_0}{\eta_c}}\,\frac{1}{n}\,\delta_{k-n}; \quad a^{(3)}_{kn} = -k\,\delta_{k-n+1};$$

$$b^{(3)}_{kn} = \delta_{k-n-1}; \quad c^{(3)}_{kn} = A_{k,n}(1+\delta_{-n}); \quad P^{(3)}_n = \left(N - \frac{P}{2}\right) r_1\,\delta_{-n};$$

$$A_{k,m} = -2C^{m}_{k+m-1}\,\varepsilon^{k+m}; \quad \varepsilon_1 = \frac{r_1}{2h};$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j = -1; \\ 0, & j \neq -1; \end{cases} \qquad \delta^*_j = \begin{cases} 1, & j \geq 0; \\ 0, & j < 0; \end{cases}$$

Внаслідок геометричної і силової симетрії задачі граничним умовам /2/ достатньо задовольнити лише на контурі L_1 /на контурі L_2 вони задовольняються автоматично/. Підставляючи розклади /3/ в умову /2/, враховуючи, що на L_1 $t = -h + iy$, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(2\varepsilon_1)^k a_k\left[\frac{k(1-2i\varepsilon_1\eta)}{(1+2i\varepsilon_1\eta)^{k+1}} - \frac{1}{(1-2i\varepsilon_1\eta)^k}\right] - \frac{(2\varepsilon_1)^k b_k}{(1+2i\varepsilon_1\eta)^k}\right\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(2\varepsilon_1)^k d_k\left[\frac{1}{(1+2i\varepsilon_1\eta)^k} + \frac{k}{(1-2i\varepsilon_1\eta)^k} - \frac{1}{(3-2i\varepsilon_1\eta)^k} + \right. \qquad /7/$$

$$\left. + \frac{k(1-2i\varepsilon_1\eta)}{(3+2i\varepsilon_1\eta)^{k+1}}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}(2\varepsilon_1)^k \beta_k\left[\frac{1}{(1-2i\varepsilon_1\eta)^k} - \frac{1}{(3+2i\varepsilon_1\eta)^k}\right] = C_1^*,$$

Таблиця I

Значення напружень σ_θ/p

ε_1	δ	θ° 0	15	30	45	60	75	90
0,35	0,25	5,898	5,002	2,973	0,996	-0,379	-1,146	-1,392
	0,15	6,622	5,263	2,491	0,259	-1,009	-1,630	-1,820
	0,02	6,952	5,283	2,134	-0,125	-1,303	-1,866	-2,040
	σ_θ^*/p	6,984	5,269	2,115	-0,133	-1,309	-1,868	-2,038
0,25	0,25	4,116	3,621	2,392	0,952	-0,284	-1,094	-1,375
	0,15	4,295	3,722	2,340	0,793	-0,478	-1,287	-1,564
	0,02	4,347	3,746	2,315	0,743	-0,531	-1,338	-1,613
	σ_θ^*/p	4,347	3,747	2,314	0,743	-0,531	-1,337	-1,613
0,1	0,25	3,125	2,848	2,094	1,069	0,051	-0,691	-0,962
	0,15	3,139	2,853	2,073	1,018	-0,028	-0,787	-1,064
	0,02	3,152	2,862	2,072	1,001	-0,062	-0,835	-1,117
	σ_θ^*/p	3,134	2,846	2,061	0,995	-0,063	-0,833	-1,113

Таблиця 2

Значення напружень σ_θ/N

ε_1	δ	θ° 0	15	30	45	60	75	90
0,35	0,25	0,725	0,818	1,000	1,101	1,079	1,010	0,976
	0,15	0,729	0,991	1,421	1,594	1,512	1,370	1,308
	0,02	1,000	1,567	2,402	2,674	2,498	2,243	2,135
	σ_θ^*/N	1,107	1,717	2,634	2,937	2,743	2,463	2,343
0,25	0,25	0,589	0,634	0,732	0,816	0,854	0,860	0,858
	0,15	0,713	0,784	0,934	1,052	1,098	1,098	1,092
	0,02	1,011	1,121	1,348	1,523	1,586	1,582	1,572
	σ_θ^*/N	1,079	1,195	1,438	1,624	1,691	1,687	1,676

де c_1^* - стала, яка не впливає на напружений стан смуги; $\eta = y/r_1$ - безрозмірна величина.

Шукані коефіцієнти γ_k, a_k, b_k, α_k, β_k, крім системи /5/, повинні задовольняти співвідношення /7/ в усіх точках границі. Аналогічно [2] будемо задовольняти його лише в деяких точках контура L_1, в яких виявляється найбільший вплив отвору на величину напружень.

Знайшовши невідомі сталі, напруження у смузі визначаються за відомими співвідношеннями Колосова-Мусхелішвілі, а нормальні напруження у поперечному перерізі кільця обчислюються за формулою

$$\sigma = E^*\left[\frac{1}{r}\gamma_0 + 2\,\frac{r_0 - r + \eta_c}{r(r_0+\eta_c)}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}(1-k^2)\gamma_k\cos k\theta\right]. \qquad /8/$$

Для числового прикладу взято мідну пластинку і стальне кільце прямокутного поперечного перерізу $2h^* \times b$ з такими пружними і геометричними характеристиками [3] :

$\mu = 4{,}34\cdot 10^{10}$ н/м^2; $E^* = 2{,}06\cdot 10^{11}$ н/м^2; $\delta = b/r_1$;
$\gamma = h^*/h_1 = 1$; $\nu = 0{,}3$; $\varkappa = 2{,}08$.

Числові значення кільцевих напружень σ_θ, що діють у смузі поблизу лінії контакту з кільцем на площинах, перпендикулярних до контура L, наведені в таблицях. У табл.1 наведені значення напружень σ_θ, коли смуга розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності p, у табл.2 - коли кільце знаходиться під дією зусиль N, прикладених на контурі $r = r_2$ / $p = 0$/. Через σ_θ^* позначені напруження у смузі без кільця [1,2] . Розрахунки проведені на ЕОМ "Минск-32".

Список літератури: I. К а л о є р о в С.А., К о с м о д а м і а н с ь к и й О.С. Наближений метод визначення напруженого стану полоси з круговим отвором. – ДАН УРСР, 1972, № I. 2. К а л о е р о в С.А. Концентрация напряжений в полосе с круговым отверстием. – "Механика твердого тела", 1974, № 6. 3. М а р т и н о в и ч Т.Л., З в а р и ч М.К. Упругое равновесие пластинки с двумя круговыми отверстиями, в которые впрессованы замкнутые стержни. – В сб.: Математические методы и физико-механические поля. К., "Наукова думка", 1975, вып.I. 4. М и р о н е н к о Н.И. О равновесии бесконечной полосы с круговым отверстием. – "Прикладная механика", 1972, т.8, № I. 5. С а в и н Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. К., "Наукова думка", 1968. 6. Żelisko T. Stresses Induced by Central Bending in a Long Beam Containing a Circular Annular Inclusion. – "Bull. Polon. Sci. sér. sci. techn.", 1969, т.17, №8. 7. Żelisko T. Transvers Flexure of the Strip Containing an Infinite Double Row of Circular Holes. – "Bull. Polon. Sci. sér. techn." 1969, т.17, №9.

УДК 539.370

В.С. Щукін

ЗГИН КОНСОЛЬНОЇ БАЛКИ З ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНО ПРУЖНЕ КІЛЬЦЕ

Нехай пружна анізотропна балка-пластинка шириною $2h_o$, товщиною $2h$ та довжиною l, нерухомо затиснута одним кінцем і згинається в своїй площині нормальним навантаженням q, розподіленим за лінійним законом. У пластинці на відстані a від затиснутого кінця є круговий отвір радіуса r_1, в який впресовано кільце постійного поперечного перерізу, симетричного відносно серединної площини пластинки /рис.I-4/. При цьому припускається, що контакт між кільцем і пластинкою здійснюється вздовж усього контуру до і після деформації. Тертям на лінії контакту нехтуємо.

Визначення напруженого стану в контактуючих тілах зводиться до знаходження компонентів деформації e_o, θ_b та функцій $\Phi_j(z_j)$ / j = 1,2 / комплексних змінних $z_j = x + \mu_j y$, які задовольняють граничні умови в інтегральній формі [2]

$$\int_{L_1} F_1(t)\, Re\, dU = \int_{L_1} F_1(t)\, d\left[u_{1n} + \varepsilon^*(t)\right] ; \qquad /1/$$

$$\int_{L_1} \overline{F_1(t)}\, dV = \int_{L_1} N_1^{(1)} \overline{F_1(t)}\, dt \; ; \quad \int_{L_1} F_1(t)\, dV = \int_{L_1} F_1(t) N_1^{(1)}\, dt \; ;$$

$$U = i\bar{t} \sum_{j=1,2} \left[(p_j + i q_j) \Phi_j(z_j) + (\bar{p}_j + i \bar{q}_j) \overline{\Phi_j(z_j)} \right] ; \qquad /2/$$

$$V = \sum_{j=1,2} \left[(1 + i\mu_j) \Phi_j(z_j) + (1 + i\bar{\mu}_j) \overline{\Phi_j(z_j)} \right] ,$$

де μ_j , p_j , q_j – постійні величини, що залежать від пружних сталих матеріалу пластинки [I] ; t – афікс точки контура отвору L_1 ; $\bar{t} = dt/ds$; $F_1(z)$ – довільна функція змінної $z = x + iy$, голоморфна в області пластинки.

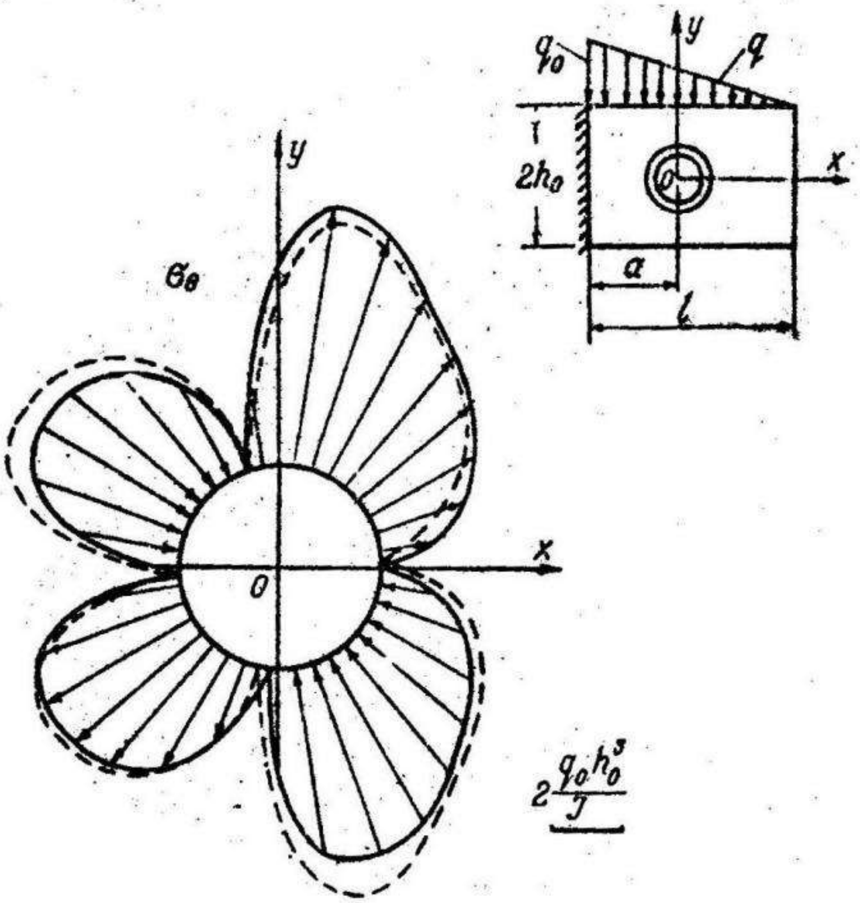


Рис.I.

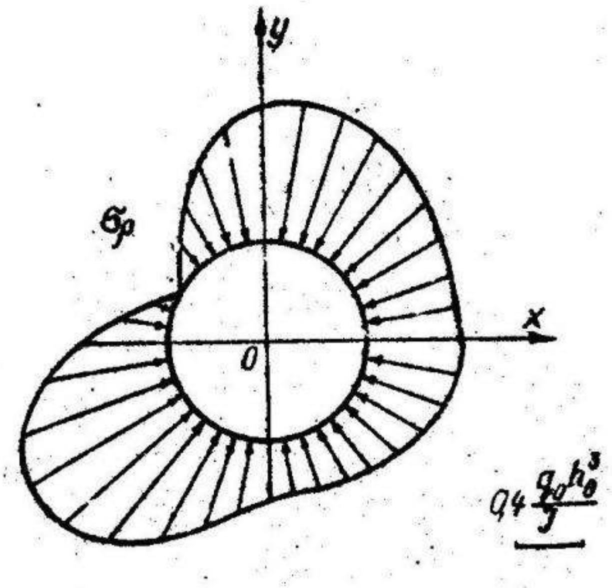

y
σ_ρ
x
0
$0{,}4\,\frac{q_0 h_0^3}{J}$

Рис.2.

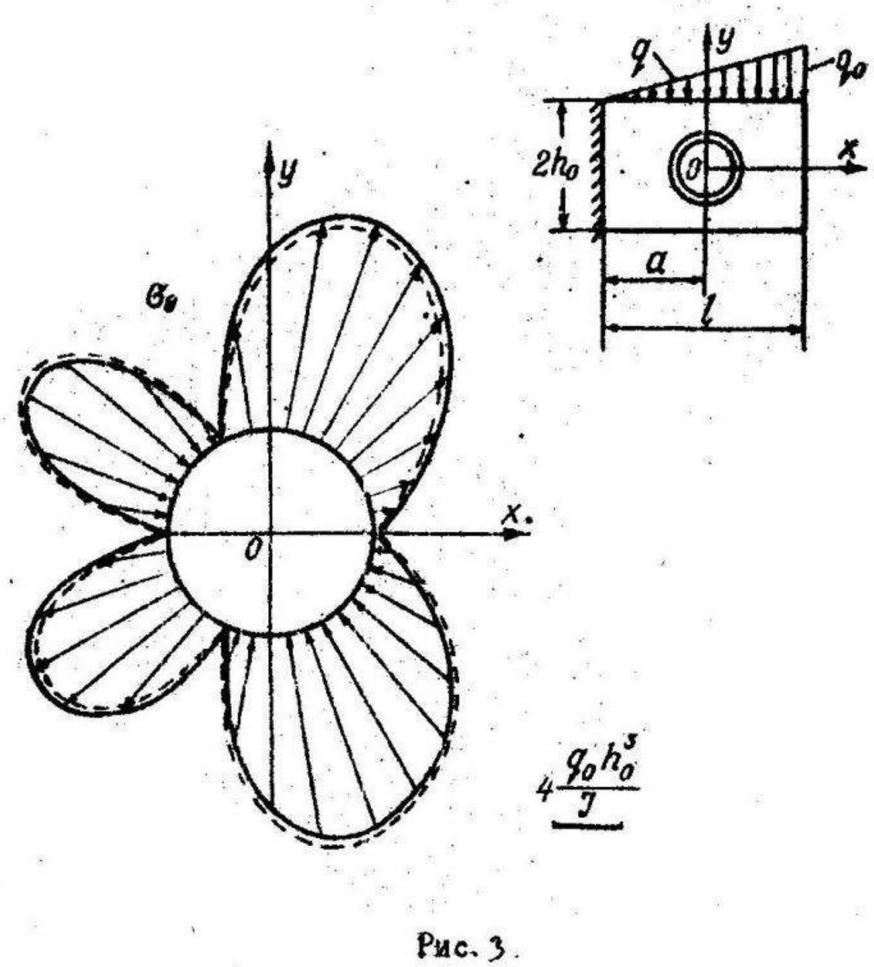

q
y
q_0
x
$2h_0$
0
a
l
y
σ_θ
x.
0
$4\,\frac{q_0 h_0^3}{J}$

Рис. 3.

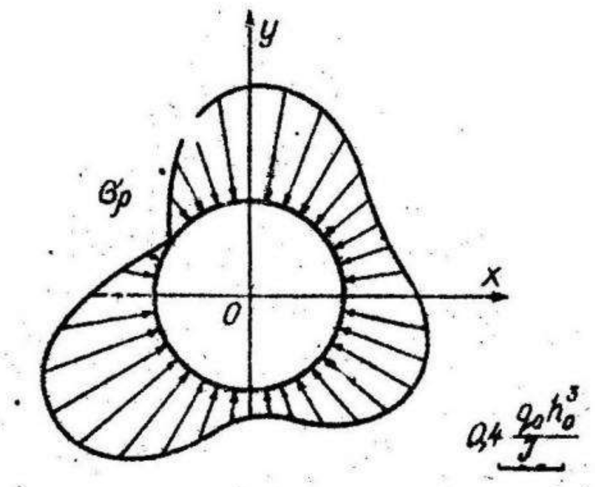


Рис.4

Нормальна складова переміщення u_{1n} контурних точок стержня виражається через відносне подовження e_o нульової /для чистого згину/ лінії L_o і кут повороту θ_b нормального перерізу стержня формулою

$$u_{1n} = Re\left\{ i\bar{t} \int_{t_o}^{t} \left[\frac{r_o}{r_1} e_o + i(r_1 - r_o)\frac{d\theta}{dt} + i\theta_b \right] dt + c\bar{t} \right\}, \qquad /3/$$

де c – стала інтегрування.

Внутрішні зусилля та нормальне напруження у перерізі стержня визначаються за формулами / 2 /.

Приймемо

$$z = \omega(\zeta) = r_1\,\zeta\,; \quad t = r_1\sigma; \quad \sigma = e^{i\theta}, \qquad /4/$$

тоді функції

$$z_j = \omega_j(\zeta_j) = \frac{r_1}{2}\left[(1 - i\mu_j)\,\zeta_j + (1 + i\mu_j)\frac{1}{\zeta_j}\right], \quad (j = 1, 2), \qquad /5/$$

будуть конформно переводити відповідні області зміни Z_1 і Z_2 на зовнішність одиничного круга γ, причому для контурних точок γ змінні ζ, ζ_1 і ζ_2 набувають одного і того самого значення $\sigma = e^{i\theta}$.

Компоненти деформації стержня e_o і θ_b на γ подамо у формі комплексних рядів Фур"є

$$e_o = \alpha_o + 2Re\sum_{K=1}^{\infty}\alpha_K\sigma^K; \quad \theta_b = \beta_o + 2Re\sum_{K=1}^{\infty}\beta_K\sigma^K. \qquad /6/$$

Нормальне напруження $N_1^{(i)}$ на γ згідно з [2], враховуючи /6/, визначається за формулою

$$N_1^{(i)} = \frac{g}{2hr_1}\left[\alpha_o + \sum_{K=2}^{\infty}(1-K^2)(\alpha_K\sigma^K + \bar{\alpha}_K\sigma^{-K})\right]. \qquad /7/$$

Довільну функцію та комплексні потенціали виберемо у вигляді

$$\Phi_1(\zeta_1) = \sum_{p=1}^{5}a_p\zeta_1^p + \sum_{K=1}^{\infty}A_K\zeta_1^{-K};$$

$$\Phi_2(\zeta_2) = \sum_{p=1}^{5}b_p\zeta_2^p + \sum_{K=1}^{\infty}B_K\zeta_2^{-K}; \qquad /8/$$

$$F_1(\zeta) = \sum_{K=1}^{\infty}E_n\zeta^{-n}.$$

Коефіцієнти a_p і b_p залежать від виду навантаження пластинки.

Вносимо розклади /6/-/8/ в граничні умови /І/ з врахуванням /2/-/5/ і виконаємо інтегрування вздовж контура γ, враховуючи при цьому, що всі E_j, крім E_n, дорівнюють нулю. У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів A_K, B_K, α_K і β_K.

Для ортотропної пластинки, коли осі вибраної системи координат /рис.І-4/ паралельні головним напрямкам пружності, система має вигляд/ $\mu_1 = i\beta_1^*$; $\mu_2 = i\beta_2^*$ /:

$$r_o\alpha_o - (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)A_1' - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)B_1' = (p_1 + iq_1)a_1' + (p_2 + iq_2)b_1' - \varepsilon^*;$$

$$-(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{A}_2 - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{B}_2 = (p_1 + iq_1)a_2 + (p_2 + iq_2)b_2;$$

$$\frac{2r_o}{1-(n-1)^2}\left(1 + \frac{r_o}{r_c}\right)\alpha_{n-1} - (p_1 + iq_1)\bar{A}_{n-2} - (\bar{p}_1 + iq_1)\bar{A}_n -$$

$$-(p_2+iq_2)\bar{B}_{n-2}-(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\bar{B}_n=(p_1+iq_1)a_n\delta_{n,5}+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)a_{n-2}\delta_{n-2,5}+ \qquad /9/$$

$$+(p_2+iq_2)b_n\delta_{n,5}+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)b_{n-2}\delta_{n-2,5};$$

$$\frac{g}{2h}n\alpha_{n-1}-(1-\beta_1^*)\bar{A}_{n-2}-(1-\beta_2^*)\bar{B}_{n-2}=(1+\beta_1^*)a_{n-2}\delta_{n-2,5}+(1+\beta_2^*)b_{n-2}\delta_{n-2,5};$$

$$\frac{g}{2h}\alpha_0-(1+\beta_1^*)\bar{A}_1-(1+\beta_2^*)\bar{B}_1=(1-\beta_1^*)a_1+(1-\beta_2^*)b_1;$$

$$-(1+\beta_1^*)\bar{A}_2-(1+\beta_2^*)\bar{B}_2=(1-\beta_1^*)a_2+(1-\beta_2^*)b_2;$$

$$\frac{g}{2h}(2-n)\alpha_{n-1}-(1+\beta_1^*)\bar{A}_n-(1+\beta_2^*)\bar{B}_n=(1-\beta_1^*)a_n\delta_{n,5}+(1-\beta_2^*)b_n\delta_{n,5};$$

$$r_0\alpha_{n-2}=-i\eta_c(n-2)\beta_{n-2}, \qquad (n=3,4,5,\dots),$$

де $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера; $g=E^*F$.

Якщо навантаження розподілене за лінійним законом $q=(q_0/l)[(l-a)-x]$, то коефіцієнти a_p мають такий вигляд:

$$a_1'=\frac{4}{3}\frac{K}{L}\beta_2^{*2}Q; \qquad a_2'=-\frac{1}{3}\frac{r_1}{l}K\beta_1^*\beta_2^{*2}Q;$$

$$a_1''=-\left\{\frac{1}{32}L\left[\left(1-\frac{a}{l}\right)^2\left(\frac{l}{h_0}\right)^2-\frac{\beta_1^{*2}-\beta_2^{*2}}{30}\right]+\frac{K(1+\beta_1^*)(1-\beta_1^*)^2}{48}\left(\frac{r_1}{h_0}\right)^4+\right. \qquad /10/$$

$$\left.+\frac{K(1-\beta_1^*)}{4}\left(\frac{r_1}{h_0}\right)^2\left[\left(\frac{l}{h_0}\right)^2\left(1-\frac{a}{l}\right)^2+\frac{\beta_1^{*2}-4\beta_2^{*2}}{5}\right]\right\}\frac{h_0}{l}Q;$$

$$a_2''=K\left(1-\frac{a}{l}\right)\frac{r_1}{h_0}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{l}{h_0}\right)^2\left(1-\frac{a}{l}\right)^2+\frac{\beta_1^{*2}-4\beta_2^{*2}}{10}+\frac{1-\beta_1^{*2}}{12}\left(\frac{r_1}{h_0}\right)^2\right]Q;$$

$$a_3'' = -\frac{K(1+\beta_1^*)}{12}\frac{r_1^2}{h_0 l}\left[\left(\frac{l}{h_0}\right)^2\left(1-\frac{a}{l}\right)^2 + \frac{\beta_1^{*2}-4\beta_2^{*2}}{5} + \frac{1-\beta_1^{*2}}{8}\left(\frac{r_1}{h_0}\right)^2\right]Q;$$

$$a_4'' = \frac{K(1+\beta_1^*)^2}{48}\left(\frac{r_1}{h_0}\right)^3\left(1-\frac{a}{l}\right)Q; \quad a_5'' = -\frac{K(1+\beta_1^*)^3}{480}\frac{r_1^4}{h_0^3 l}\,Q;$$

$$a_3' = a_4' = a_5' = 0; \quad a_p = a_p' + i a_p''; \quad b_p = b_p' + i b_p'',$$

де

$$K = \frac{(1+\beta_1^*)^2}{16\beta_1^*(\beta_1^{*2}-\beta_2^{*2})}; \quad L = \frac{1+\beta_2^*}{\beta_1^*}; \quad Q = r_1\frac{q_0 h_0^3}{J};$$

J – момент інерції перерізу пластинки; q_0 – найбільше значення навантаження q. Коефіцієнти b_p визначаються з коефіцієнтів /10/ заміною β_1^* на β_2^*.

Для числового прикладу за ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КАСТ-В /ГОСТ 10292-62/ [3] та кільце прямокутного поперечного перерізу $2h^* \times b$ з дюралюмінію при таких значеннях пружних сталих матеріалів та геометричних параметрів: $E_1 = 2\cdot 10^{10}$ Па, $\nu_1 = 0{,}158$; $\nu_2 = 0{,}098$; $G = 4\cdot 10^9$ Па; $E^* = 7\cdot 10^{10}$ Па; $h^*/h = 1$: $b/r_1 = 0{,}2$; $l/a = 4$; $l/h_0 = 10$; $r_1/h_0 = 0{,}25$.

На рис.1-2 побудовані графіки розподілу кільцевих σ_θ та радіальних σ_ρ напружень вздовж контура отвору в ортотропній консольній балці при згині її навантаженням розподіленим за лінійним законом $q = (q_0/l)[(l-a)-x]$. Мінімальна величина посадки кільця знаходилася з умови $N_1^{(i)} \le 0$ на L_1.

Розв"язана також задача про пресову посадку кільця в круговий отвір ізотропної консольної балки, але через громіздкість формули тут не наводимо. Для числового прикладу взята мідна пластинка та стальне кільце з такими пружними сталими: $\mu = 4\cdot 10^{10}$ Па; $E^* = 2\cdot 10^{11}$ Па; $\varkappa = 2{,}08$. Геометричні розміри зберігалися попередні.

На рис.3-4 показані графіки розподілу напружень σ_θ і σ_ρ вздовж контура отвору. Балка згинається у своїй площині навантаженням, яке розподілене за лінійним законом $q = q_0[(a+x)/l]$. Відхід кільця від пластинки відбувається в обох випадках при $\theta^\circ = 150^\circ$. Штриховою лінією зображені графіки розподілу напружень σ_θ при відсутності кільця.

Список літератури: I.Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки.М ,ГТИ,1957. 2. М а р т и н о в и ч Т.Л., З в а р и ч М.К., Щ у к и н В.С. О напряженном состоянии анизотропной пластинки,в криволинейное отверстие которой впрессован замкнутый стержень. - "Механика полимеров",1976, № 2, с.304-309. 3. Физические и механические свойства стеклопластиков. Справочник. Рига, "Зинатне", 1969, 266 с.

З м і с т

М а т е м а т и к а

Прикладна математика

М е х а н і к а

УДК 517.913

Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. К о с т е н к о К.С. - Вестн.Львов.ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа". Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с.3-5 /на укр.яз./.

При определенных условиях найдены асимптотические представления фундаментальной системы решений и их производных до третьего порядка включительно линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка при $x \to \infty$.
Список лит.: 2 назв.

УДК 517.946

Об обобщенной задаче Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в случае многосвязной области. В о л о ш и н а М.С., Г у п а л о Г.С., Л о п у ш а н с к а я Г.П. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 13 "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа". Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 5-8 /на укр.яз./.

Рассматривается задача Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений при заданной обобщенной вектор-функции на границе многосвязной области. В классическом случае для уравнения Лапласа метод был предложен В.Д.Купрадзе.
Список лит.: 4 назв.

УДК 539.3; 534.I

Единственность решения задачи о взаимодействии кусочно-гладкой упругой оболочки с акустическими средами. К о с т е н к о В.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.I3."Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 8-II /на укр.яз./.

Найдены условия при которых единственность решения задачи о взаимодействии кусочно-гладкой упругой изотропной оболочки с акустическими средами доказывается по той же методике, что и в случае гладких оболочек.
Список лит.: 2 назв.

УДК 517.94

Общее линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка на плоскости, инвариантное относительно группы преобразований с заданными траекториями. К о с т е н к о В.Г., В е с е л о в с к а я А.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат. вып.I3."Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. II-I6 /на укр.яз./.

Найдены все линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка на плоскости, каждое из которых допускает группу преобразований с заданной траекторией.
Список лит.: 5 назв.

УДК 517.917

Устойчивость в целом одной неавтономной системы второго порядка. Л а в р е н ю к С.П.-Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. „Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 16-19 /на укр.яз./.

Рассмотрена одна нелинейная неавтономная система дифференциальных уравнений второго порядка. Для этой системы получено достаточное условие устойчивости в целом нулевого решения. При доказательстве используются дифференциальные неравенства и разрывные функции Ляпунова.

Список лит.: 3 назв.

УДК 517.917

О почти периодичности решений нелинейной S^p-почти периодической системы дифференциальных уравнений. К о в а л ь ч у к Б.В., Л и с е в и ч Л.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. „Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 20-23 /на укр.яз./.

Рассматривается нелинейная S^p-почти периодическая система обыкновенных дифференциальных уравнений и устанавливаются некоторые достаточные условия S^p-почти периодичности ограниченного решения этой системы.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.9

Существование почти периодического решения одной краевой задачи для волнового уравнения. Лисевич Л.М., Свирчевская Ж.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. „Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 24-28 /на укр.яз./.

Доказывается существование почти периодического решения в полубесконечной призме волнового уравнения с почти периодической правой частью.

Список лит.: 2 назв.

УДК 517.43

О представлении абелевой группы операторов в гильбертовом пространстве. Чуйко Г.И. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. „Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 28-30 /на укр.яз./.

Доказана теорема. Пусть $G \subset B(H)$ абелева группа, H - сепарабельное гильбертово пространство. Пусть существует обобщенная спектральная мера P, коммутирующая с каждым оператором A группы G и такая, что $\sup_{\Delta \in D(P)} \|P(\Delta) A\| < \infty$. Тогда существует самосопряженный оператор B с обратным B^{-1}, такой, что BAB^{-1} в существенном унитарен относительно некоторого скалярного произведения.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.944:947

О фундаментальных решениях эллиптических систем в римановом пространстве. М а р т ы н е н к о М а р и я. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. I3. „Теоретические и прикладные вопросы математического анализа". Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 30-34 /на укр.яз./.

Доказываются следующие два свойства фундаментальных матриц эллиптических систем 2-го порядка специального вида в n -листном римановом пространстве:

1/ $K(x,y) - K'(y,x)$, где штрих означает транспонирование,

2/ $\sum_{i=1}^{n} K(x_i, y) = \omega(x,y)$, где $\omega(x,y)$ – классическая фундаментальная матрица рассматриваемой системы, x_i / $i = \overline{1,n}$ / – точки n – листного риманового пространства, которые лежат над одной и той же точкой евклидового пространства.

Список лит.: 3 назв.

УДК 512.4

О расщепляемости счетно-порожденных кручений. Г о р б а ч у к О.Л., К о м а р н и ц к и й М.Я. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. I3. „Теоретические и прикладные вопросы математического анализа". Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 35-37 /на укр.яз./.

Кручение над ассоциативным кольцом называется счетно-порожденным, если его радикальный фильтр обладает счетным базисом. При некоторых ограничениях на базис счетно-порожденного кручения доказывается его нерасщепляемость.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.94

Общее линейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка на плоскости, инвариантное относительно заданной группы преобразований. В е с е л о в с к а я А.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 13, "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 38-41 /на укр.яз./.

Найдены все линейные дифференциальные уравнения в частных производных 4-го порядка на плоскости, каждое из которых допускает группу преобразований с траекториями $x^4+y^4=a^4$.

Список лит.: 6 назв.

УДК 517.512.2

Абсолютная сходимость рядов Фурье и частные модули гладкости. П р и т у л а Я.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 13, "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, "Вища школа", 1978, с. 41-43 /на укр.яз./.

Для почти периодических функций двух переменных, спектр которых имеет единственную точку сгущения в нуле или на бесконечности, приведены условия абсолютной сходимости рядов Фурье. Условия даны в терминах частных модулей гладкости функций.

УДК 517.9

О приближенном решении некоторых дифференциальных уравнений с помощью полиномов Чебышева. Старокадомский Л.А. Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 44-47 /на укр. яз./.

Для обыкновенного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами предлагается метод приближенного решения, который состоит в следующем. Как и в методе степенных рядов частные решения выражаются с помощью полиномов с неопределенными коэффициентами, но эти коэффициенты отыскиваются из условия наименьшего уклонения от нуля в чебышевском смысле невязки, получаемой при подстановке искомого полинома в уравнение. Приведены примеры.
Список лит.: 2 назв.

УДК 519.21

Обратная формула обращения для отражения. Квит И.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 47-53 /на укр. яз./.

На основании определений интервального и точечного ограничителей выводится формула обращения для отражения положительной случайной величины. Из нее же получаются теорема единственности, теорема о величине скачка функции распределения в точке и формула для плотности вероятности.
Список лит.: 3 назв.

УДК 519.21

Экспоненциальные и логарифмические распределения. Отражение и проблема моментов. К в и т И.Д., К о с а р ч и н В.Н. - Вестн.Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа". Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 53-59 /на укр. яз./.

Рассматривается четыре класса случайных величин: $\mathcal{E}$ - класс всех случайных величин, $\mathcal{L}$ - положительных, Φ - имеющих отражение, M - удовлетворяющих достаточному условию определенности проблемы моментов. Доказывается взаимнооднозначное соответствие между элементами классов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{L}$. Элементу класса Φ в классе $\mathcal{E}$ соответствует случайная величина с определенной проблемой моментов. Элементу класса M в классе $\mathcal{L}$ соответствует случайная величина с отражением. Указывается способ восстановить распределение в классе M по заданным моментам.
Список лит.: 3 назв.

УДК 519.95

Об одном методе решения задач на экстремум. Б а р т и ш М.Я., С т а щ у к М.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа". Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с.59-64 /на укр.яз./.

Предложена одна модификация метода наискорейшего спуска решения задач на экстремум. Доказана сходимость метода. Сделан сравнительный анализ быстроты сходимости предложенного метода и метода наискорейшего спуска.
Список лит.: 3 назв.

УДК 518:517.948

Применение метода Ньютона - Канторовича к решению задач оптимального управления. Б а р т и ш М.Я. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13."Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 64 /на укр.яз./.

Рассмотрено применение метода Ньютона-Канторовича для решения нелинейных краевых задач /три варианта/. Как частный случай рассмотрена задача оптимального управления на быстродействия, указано на особенности применения метода к решению данной задачи. Приведен числовой пример
Список лит.: 5 назв.

УДК 518.90

Оптимальные стратегии для одной обобщенной игры. Б е й к о И.В., Я с и н с к и й В.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 68 /на укр.яз./.

Для сформулированной процедуры $B(A_n)$ вводится понятие $L(f)$ оптимальной стратегии. Приводится построение $L(f)$ оптимальных стратегий в процедуре при некоторых частичных предположениях. Список лит.: 2 назв.

УДК 537.523.74

Численное решение интегрального уравнения Фредгольма I-го рода в R^3. Б е р е ж а н с к а я З.С., Г о р д и й ч у к В.И. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 72 /на укр.яз./.

Предложена методика решения интегрального уравнения Фредгольма I-го рода в R^3, которая дает возможность рассчитать потенциальное поле, создаваемое ЭОС без учета толщины.
Ил.1. Список лит.: 4 назв.

УДК 539.3:534.1

Дифракция плоской звуковой волны на сфере, находящейся вблизи границы жидкого полупространства. Б л а ж и е в с к а я А.В. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 77 /на укр.яз./.

Предложен метод решения задачи дифракции нестационарной волны давления на жесткой сфере, погруженной в жидкость, ограниченную жестким дном. Полученное решение является асимптотическим и справедливым для импульсов, длительность которых мала. Решение позволяет выделить отраженные и первые ползущие волны. Список лит.: 3 назв.

УДК 624.04

Оптимальный расчет составных оболочек вращения кусочнопеременной толщины. И в а н к и в К.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа" Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 83 /на укр.яз./.

Решается задача оптимального проектирования конструкции, состоящей из оболочек вращения кусочнопеременной толщины. Оптимальные параметры определяются методами геометрического программирования Рассмотрен числовой пример. Список лит.: 5 назв.

УДК 516,6:517.944

Новые ортогональные криволинейные координаты. С а в у л а Я.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13."Теоретические и прикладные вопросы математического анализа" Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 85 /на укр.яз./.

Построены новые ортогональные криволинейные координаты, координатными поверхностями которых являются разные поверхности /поверхности Монжа/. Показано, что из них как частные случаи можно получить цилиндрические, сферические, торообразные координаты. Ил.2. Список лит.:5 назв.

УДК 518.12:517.55

О некоторых асимптотических свойствах диаграммы Ньютона функции двух комплексных переменных и дифференциальных свойствах кривой сопряженных радиусов сходимости. Кардаш А.И., Кузик А.М., Чулик И.И. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13.„Теоретические и прикладные вопросы математического анализа". Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 91 /на укр.яз./.

Рассматриваются геометрические свойства асимптотического конуса диаграммы Ньютона функции двух комплексных переменных, указывается на их связь с кривой сопряженных радиусов сходимости двойного степенного ряда. Устанавливаются условия, при выполнении которых кривая сопряженных радиусов сходимости будет гладкой либо будет иметь угловые точки.
Список лит.: 4 назв.

УДК 517.537

Об области сходимости рядов типа Тейлора-Дирихле. Цегелик Г.Г. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13."Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 94 /на укр.яз./.

Рассматривается применение аппарата мажорант Ньютона рядов Дирихле для определения областей абсолютной сходимости рядов типа Тейлора-Дирихле при некоторых ограничениях на показатели.
Список лит.: 2 назв.

УДК 539.311

Сжатие кусочно-однородной пластинки с физической щелью на линии раздела материалов. Грилицкий Д.В., Опачасович В.К. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13."Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 96 /на укр.яз./.

Рассматривается задача о сжатии кусочно-однородной пластинки с физической щелью постоянной ширины заданным напряженным состоянием на бесконечности. Предполагается, что берега щели приходят в гладкий контакт на некоторой ее части. Решение задачи сведено к сингулярному интегральному уравнению. Определена функция напряжений и длина линии контакта. Приводятся формулы для коэффициентов интенсивности напряжений. Задача проиллюстрирована численным материалом.
Ил.4. Список лит.: 4 назв.

УДК 539.3

Упругое равновесие полосы с круговым отверстием, в которое впрессован замкнутый стержень. Мартинович Т.Л., Зварич М.К., Шукин В.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.13."Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 103 /на укр.яз./.

Исходя из граничных условий в интегральной форме, решена плоская задача теории упругости о напряженном состоянии полосы, в круговое отверстие которой впрессовано упругое кольцо, напряженно-деформированное состояние которого описывается теорией криволинейных стержней. Приводится числовой пример.
Табл.2.Ил.1. Список лит.: 7 назв.

УДК 539.370

Изгиб консольной балки с отверстием, в которое впрессовано упругое кольцо. Щ у к и н В.С. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 13. "Теоретические и прикладные вопросы математического анализа." Львов, издательское объединение "Вища школа", 1978, с. 109 /на укр.яз./.

Решены задачи о впрессовке упругого кольца в круговое отверстие анизотропной и изотропной консольной балки-пластинки. Балка изгибается в своей плоскости нагрузкой, распределенной по линейному закону. Трением на линии контакта пренебрегается. Напряженно-деформированное состояние кольца описывается уравнениями тонких криволинейных стержней. Приводится числовой пример.
Ил.4. Список лит.: 3 назв.

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Вестник Львовского университета

Серия механико-математическая

Выпуск 13

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

/На украинском языке/

Львов

Издательство при Львовском государственном университете издательского объединения "Вища школа"

Редактор В.В.Войтович. Художній редактор Е.А.Каменщик.
Технічний редактор І.С.Куючко. Коректор А.В.Кармінська

Інформ. бланк № 3480
Підписано до друку 29.УП.1977 р. Формат 60х90 I/16. Папір друкарський № 3. 8,25 умовн. друк. арк., 6,74 обл.-видавн.арк. Тираж 600 прим. Видавн. № 413. БГ 13601. Зам. № 3831. Ціна 80 коп.

Видавництво при Львівському державному університеті видавничого об"єднання "Вища школа", 290000, Львів, вул.Університетська, I.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління в справах видавництв, поліграфії і книжкової торгівлі. 290000, Львів-центр, вул.Стефаника, II.

80 коп.