УДК 517.512

В.Й.Гукевич

РІВНІСТЬ ПАРСЕВАЛЯ І ТЕОРЕМА ФІШЕРА-РИСА ДЛЯ МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Як відомо [I, с.444], систему $\{\varphi_n(x)\}$ нормованих на $[a,b]$ функцій називаємо системою майже ортогональною за Белманом /МОБ/, якщо $A=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < \infty$, де

$$a_{ik}=\begin{cases}\int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx, & k\neq i\\ 0, & k=i\end{cases}. \qquad /1/$$

Надалі припускаємо, що

$$A<1. \qquad /2/$$

<u>Лема</u>. Нехай $\varphi(x)\in L_2[a,b]$ і $\{\varphi_k(x)\}$ МОБ система функцій, що задовольняє умову /2/. Справедлива нерівність
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}^2 \le \frac{\int_a^b \varphi^2(x)dx}{1-\sqrt{A}},$$

де α_{kn} – коефіцієнти найкращого середньоквадратичного наближення функції $\varphi(x)$ узагальненими многочленами виду $\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)$.

<u>Доведення</u>. Як відомо [I,с.9I], для того щоб узагальнений многочлен $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\varphi_k(x)$ був многочленом найкращого середньоквадратичного наближення функції $\varphi(x)$ агрегатами виду $\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)$, необхідно і достатньо задовольнити рівності

$$c_i=\alpha_{in}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}a_{ik}, \quad i=1,2,\ldots n,\ldots, \qquad /3/$$

де $c_i=\int_a^b \varphi_i(x)\varphi(x)dx$.

Але

$$0\le\int_a^b\Big[\varphi(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\varphi_k(x)\Big]^2dx=\int_a^b\varphi^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}c_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}^2+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\alpha_{sn}a_{ks}.$$

Беручи до уваги /3/, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}^{2} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} \alpha_{sn} a_{ks} \leq \int_a^b \varphi^2(x)\, dx.$$

Застосовуючи нерівність Шварца і нерівність /2/, маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}^{2} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{kn} \alpha_{ns} a_{ks} \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} (1-\sqrt{A}).$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}^{2} \leq \frac{\int_a^b \varphi^2(x)\, dx}{1-\sqrt{A}} .$$

Теорема I. Нехай $\{\varphi_i(x)\}$ повна система МОБ на $[a,b]$ функцій, що задовольняють умову /2/,

$$\varphi(x) \in L_2[a,b] \qquad і \quad C_i = \int_a^b \varphi(x)\varphi_i(x)\, dx\ , \quad i=1,2,\ldots$$

Існує єдина послідовність $\{\alpha_i\} \in l_2$, яка є розв"язком безконечної системи

$$C_i = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_{ik} \quad , \qquad k=1,2,\ldots \qquad /4/$$

При цьому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ збігається в середньому до $\varphi(x)$ на $[a,b]$ і наявна рівність /типу/ Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i C_i = \int_a^b \varphi^2(x)\, dx .$$

Доведення. Оскільки система $\{\varphi_i(x)\}$ МОБ, то, як відомо [I,c.445], $\{C_k\} \in l_2$. Беручи це до уваги, а також нерівність /2/, та застосовуючи "принципи нерухомої точки" до системи /4/ [2,c.389], приходимо до висновку про існування єдиного, належного l_2 , розв"язку системи /4/. Позначимо цей розв"язок через $\{\alpha_i\}$.

Нехай $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} \varphi_k(x)$ - узагальнений многочлен найкращого середньоквадратичного наближення функції $\varphi(x)$ узагальненими многочленами виду $\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k(x)$.

Оскільки $\{\alpha_i\}$ - розв"язок системи /4/, який належить l_2 , то беручи до уваги /3/, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} c_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} (\alpha_k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ik}) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\alpha_{kn} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} a_{ik}) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_k \alpha_{in} a_{ik}.$$

І далі, з огляду на нерівність Шварца та леми,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_k\alpha_{in} a_{ik}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_{kn} a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{A}}{1-\sqrt{A}}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn} c_k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad /5/$$

Але система $\{\varphi_i(x)\}$ повна, тому

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\varphi_k(x)\right]^2 dx = 0;$$

з останнього маємо

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[2\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn} c_k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\alpha_{kn} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{in} a_{ik}\right)\right],$$

що разом з /5/ завершує доведення теореми.

Розглянемо ще рівність Парсеваля для суми, різниці та добутку двох функцій.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ повна на $[a,b]$ МОБ система функцій, що задовольняє умову /2/, $f_1(x)$, $f_2(x)$ належить $L_2[a,b]$,

$$c_k^{f_i} = \int_a^b f_i(x)\varphi_k(x)dx, \qquad \begin{matrix} k = 1,2,\dots \\ i = 1,2 \end{matrix}$$

і $\{\alpha_k^{f_i}\}$ – розв"язок безконечної системи

$$c_k^{f_i} = x_k + \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ki}, \qquad \begin{matrix} k = 1,2,\dots \\ i = 1,2. \end{matrix} \qquad /6/$$

Справедливі рівності

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{f_1} + \alpha_k^{f_2})(c_k^{f_1} + c_k^{f_2}); \qquad /7/$$

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{f_1} - \alpha_k^{f_2})(c_k^{f_1} - c_k^{f_2}); \qquad /8/$$

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{f_2} c_k^{f_1} + \alpha_k^{f_1} c_k^{f_2}). \qquad /9/$$

<u>Доведення.</u> Зупинимось на доведенні рівності /7/ /доведення /8/ аналогічне/ $f_1(x), f_2(x) \in L_2[a,b]$ система $\{\varphi_n(x)\}$ є МОБ на $[a,b]$, тому $\{C_k^{f_i}\}$ є l_2 $i=1,2$ [1,c.445], оскільки, крім цього, задовольняється нерівність /2/, то система /6/ має єдиний, приналежний l_2 розв"язок $\{\alpha_k^{f_i}\}$ $i=1,2$ [2,c.381].

Функція $f_1(x)+f_2(x)$ також належить $L_2[a,b]$ і тому $\{C_k^{f_1+f_2}\} \in l_2$, де $C_k^{f_1+f_2} = \int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx$, $k=1,2,\dots$.

З останнього та нерівності $A<1$ знову випливає, що в просторі l_2 існує єдиний розв"язок безконечної системи

$$C_k^{f_1+f_2} = x_k + \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ik} \qquad k=1,2,\dots \quad /B/.$$

Але $C_k^{f_1+f_2} = C_k^{f_1} + C_k^{f_2}$ і $\{\alpha_k^{f_i}\}$ $(i=1,2)$ є розв"язком системи /6/.

Звідси одержуємо, що послідовність $\{\alpha_k^{f_1} + \alpha_k^{f_2}\}$ задовольняє систему / B /.

Але розв"язок системи / B / єдиний в l_2, тому $\{\alpha_k^{f_1+f_2}\} = \{\alpha_k^{f_1} + \alpha_k^{f_2}\}$.

З останнього, застосовуючи теорему I, дістаємо рівність /7/.

Шляхом віднімання від рівності /7/ рівності /8/, отримуємо рівність /9/.

<u>Теорема 3.</u> Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ МОБ система функцій на $[a,b]$, яка задовольняє умову /2/.

Якщо для кожної функції $f(x) \in L_2[a,b]$ справедлива рівність Парсеваля, то система $\{\varphi_k(x)\}$ замкнена /а отже, і повна/ в $L_2[a,b]$.

<u>Доведення.</u> Нехай $f(x) \in L_2[a,b]$.

Розглянемо $\int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)]^2\,dx$, де $C_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx$ і $\{\alpha_k\}$, приналежний l_2, розв"язок системи

$$C_k = x_k + \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ik}, \qquad k=1,2,\dots,$$

$$\int_a^b [f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \varphi_k(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\alpha_k+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{ki}) = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i a_{ki}.$$

Оцінимо суму $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i a_{ki}$. Застосовуючи нерівність Шварца, а також беручи до уваги, що $\{\alpha_k\}\in l_2$, $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ki}^2<\infty$, одержуємо рівність $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i a_{ki}=0$.

Таким чином, $\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)]^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k$.

Але для функції $f(x)$ справедлива рівність Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k.$$

Тому остаточно одержуємо $\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)]^2dx=0$.

Замкненість системи $\{\varphi_k(x)\}$ в $L_2[a,b]$ доведена.

Теорема 4. Нехай $\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2<\infty$ і $\{\varphi_i(x)\}$ МОБ на $[a,b]$ система функцій, що задовольняє умову /2/.

Існує функція $f(x)\in L_2[a,b]$, для якої

$$c_i=\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx \qquad i=1,2,\dots$$

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$c_k=x_k+\sum_{i=1}^{\infty}x_i a_{ik} \qquad k=1,2,\dots .$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2<\infty$ і $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2=\lambda<1$, то ця система має єдиний в l_2 розв"язок $\{\alpha_k\}$ [2,с.389]. Розглянемо $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$ і покажемо, що $\|s_n(x)-s_m(x)\|\to 0$, коли $n,m\to\infty$. Дійсно, застосовуючи нерівність Шварца і беручи до уваги, що $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2=\lambda$, одержуємо

$$\left|\int_a^b\sum_{i=m}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)dx\right|\le\int_a^b\left|\sum_{i=m}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\right|dx\le\sqrt{b-a}\left(\sum_{i=m}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=m}^{n}\sum_{k=m}^{n}\alpha_i\alpha_k a_{ki}\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sqrt{b-a}\sqrt{\sum_{i=m}^{n}\alpha_i^2(1+\lambda)}\to 0,\ \text{коли}\quad n,m\to\infty.$$

Таким чином, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \| S_n - S_m \| = 0$. З цього випливає, що послідовність $\{S_n(x)\}$ сильно збігається в $L_2[a,b]$.
Але простір $L_2[a,b]$ повний, тому існує функція $f(x) \in L_2[a,b]$ для якої

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0. \qquad /C/$$

Розглянемо $\int_a^b [f(x) - S_n(x)] \varphi_i(x)\, dx$,

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x) \varphi_i(x)\, dx = \alpha_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_{ik} = C_i .$$

Беручи до уваги останнє, отримуємо

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx - C_i = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)]\varphi_i(x)dx - \int_a^b [\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)]\varphi_i(x)dx,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx - C_i\right| \le \|f(x) - S_n(x)\| \|\varphi_i(x)\| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k a_{ki}\right|.$$

Але з огляду на рівність /C/ $\|f - S_n\| \to 0$, $n\to\infty$; крім цього, $\{\alpha_k\} \in l_2$.

Тому

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k a_{ki}\right| \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ki}^2} \le A\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \text{ коли } n\to\infty.$$

Таким чином,

$C_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\, dx$, $i = 1, 2, \dots$, що треба було довести.

<u>Зауваження.</u> Якщо система $\{\varphi_i(x)\}$ повна, то функція $f(x)$, існування якої гарантує теорема 4, буде єдиною в $L_2[a,b]$. Теорема 4 є узагальненням теореми Фішера–Риса на майже ортогональні за Белманом системи.

<u>Список літератури</u>: 1. Качмаж С. Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1956. 2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Физматгиз, 1950.