УДК 517.512

В.И. Гукевич

ПРО РОЗПОДІЛ ДОДАТНИХ І ВІД"ЄМНИХ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ ПОВНОЇ МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Відома така теорема В.Я.Козлова [3]:

якщо система $\{f_n(x)\}$ ортогонормована та повна на [0,1], то ряди $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n^+(x)]^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n^-(x)]^2$, де

$$f_n^+(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{коли } f_n(x)\geq 0, \\ 0, & \text{коли } f_n(x)<0, \end{cases}$$

і $f_n^-(x)=f_n(x)-f_n^+(x)$,

збігаються майже всюди на [0,1].

Розглянемо узагальнення цієї теореми на системи, майже ортогональних за Белманом /МОБ/ функцій.

Як відомо [2,с.444], систему $\{\varphi_n(x)\}$ нормованих на $[a,b]$ функцій називаємо системою МОБ, якщо $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2<\infty$, де

$$a_{ik}=\begin{cases}\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_i(x)dx, & k\neq i \\ 0, & k=i\end{cases} \qquad /1/$$

Далі припускаємо, що система $\{\varphi_n(x)\}$ задовольняє умову

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}^2=A<1. \qquad /2/$$

Розглянемо деякі означення і твердження. Нехай $\mathcal{P}$ – зведена, досконала множина додатної міри; $\bar{M}(\mathcal{P})$ – множина обмежених функцій, які задані на $\mathcal{P}$ і для яких множина точок, де M – коливання [1] додатне, є множиною другої категорії.

<u>Лема 1.</u> Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ неперервних на $\mathcal{P}$ функцій збігається по нормі L_2 до $f(x)$, де $f(x)$ є $\bar{M}(\mathcal{P})$, то ця послідовність є розбіжною на $\mathcal{P}$ на множині другої категорії.

Лема 2. Нехай $\{\varphi_n(x)\}$ повна, МОБ на $[a,b]$ система функцій, що задовольняє нерівність /2/, $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ і

$$c_i = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx\ , \quad i = 1,2,\dots$$

Існує єдина в просторі l_2 послідовність, яка є розв"язком безконечної системи

$$c_i = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_{ik}\ , \quad i = 1,2,\dots \qquad /3/$$

При цьому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ збігається в середньому до $\varphi(x)$ і наявна рівність Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i c_i = \int_a^b \varphi^2(x)dx\ .$$

Доведення леми І див. у [3], а леми 2 в [І].

Теорема. Нехай $\{\varphi_n(x)\}$ МОБ система функцій, що задовольняє умову /2/. Тоді ряди $\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k^+(x)]^2$ і $\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k^-(x)]^2$, де

$$\varphi_k^+(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & \text{коли } \varphi_k(x) \geq 0, \\ 0\ , & \text{коли } \varphi_k(x) < 0, \end{cases}$$

і $\varphi_k^-(x) = \varphi_k(x) - \varphi_k^+(x)$, розбігаються майже всюди на $[0,І]$.

Зупинимось на доведенні розбіжності майже всюди ряду $\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k^+(x)]^2$. Доведення розбіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k^-(x)]^2$ аналогічне.

Як і в [3], припустимо протилежне, а саме, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2$ збігається на множині $\mathcal{P}$ додатної міри і через $\mathcal{P}_1$ позначимо таку множину, що $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$, $mes\,\mathcal{P}_1 > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2 < M$, для $x \in \mathcal{P}_1$ та всі функції $\{\varphi_n(x)\}$ неперервні на $\mathcal{P}_1$.

Далі розглянемо функцію $\psi(x)$ невід"ємну, нормовану на $[0,І]$, яка зовні $\mathcal{P}_1$ дорівнює нулеві.

Оцінюючи коефіцієнти Фур"є функції $\psi(x)$ по системі $\{\varphi_n(x)\}$, дістаємо

$$c_n = \int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)dx = \int_{\mathcal{P}_1} \psi(x)\varphi_n^+(x)dx + \int_{\mathcal{P}_1} \psi(x)\varphi_n^-(x)dx = c_n^+ + c_n^-, \qquad /4/$$

$$C_n^{+2} \leq \left[\int_{\mathcal{P}_1} \psi(x)\varphi_n^+(x)dx\right]^2 \leq \int_a^\beta [\varphi_n^+(x)]^2 dx = \lambda_n,$$

причому $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \leq M.$$

Згідно з лемою 2 існує єдиний належний l_2 розв"язок системи

$$C_i = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_{ik}, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Позначимо цей розв"язок через $\{\alpha_i\}$. Нехай далі для будь-якої послідовності $\{\gamma_i\}$

$$\gamma_i^+ = \begin{cases} \gamma_i, & \text{коли } \gamma_i \geq 0, \\ 0, & \text{коли } \gamma_i < 0, \end{cases}$$

і $\gamma_i^- = \gamma_i - \gamma_i^+$.

Беручи до уваги /2/, маємо

$$\alpha_k = C_k - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\alpha_i = \beta_k^+ + \beta_k, \quad \text{це}$$

$$\beta_k^+ = C_k^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\alpha_i^- - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^- \alpha_i^+, \qquad /5/$$

$$\beta_k^- = C_k^- - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^+ \alpha_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^- \alpha_i^-, \quad \beta_k^+ \geq 0, \quad \beta_k^- \leq 0.$$

Враховуючи /4/ і застосовуючи нерівність Шварца, дістаємо

$$\beta_k^{+2} \leq 3\left[\lambda_k^2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^{-2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{-2} + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{+2}\right)\right]. \qquad /6/$$

Розглянемо праву частину нерівності /6/. Зауважимо, що

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{+2} + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{-2} \leq 2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2, \qquad /7/$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ki}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\alpha_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}^2} \leq A\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2, \qquad /8/$$

де $0 \leq A < 1$.

Але, згідно з лемою 2,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i C_i = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\left(\alpha_i - \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k a_{ik}\right) = \int_0^1 \psi^2(x)dx = 1.$$

З останнього, використовуючи нерівність /8/, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2 \leq \frac{1}{1-\sqrt{A}}.$$

З /6/, /7/ і останньої нерівності /8/ одержуємо

$$\beta_k^{+2} \le 3\left(\lambda_k^2 + \frac{2}{1-\sqrt{R}} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik}^2\right) = \mu_k^2 ,$$

де ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2$ задовольняє нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < 3\left(M + \frac{2R}{1-\sqrt{R}}\right)$$

і не залежить від функції $\psi(x)$, а тільки від системи $\{\varphi_n(x)\}$. Далі показуємо, що оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k^+(x)$ збігається всюди на $\mathcal{P}_1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k^-(x)$ збігається в середньому на $\mathcal{P}_1$ і, будучи постійного знаку на $\mathcal{P}_1$, збігається майже всюди на $\mathcal{P}_1$.

Відтак, міркуючи як у [3], фіксуємо додатне число K і таку зведену додатної міри множину $\mathcal{P}_2$, щоб $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ і

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k^-(x)\right| < K \qquad \text{на } \mathcal{P}_2 .$$

Далі припускаємо, що функція $\psi(x)$ належить $\bar{M}_2(\mathcal{P})$ і, крім цього, задовольняє всі попередні властивості, тобто є нормованою і додатною на $\mathcal{P}_1$, і зовні $\mathcal{P}_1$ повертається в нуль.

Тепер вже нетрудно завершити доведення. Справді, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ записуємо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^+ \varphi_k^+(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^- \varphi_k^-(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^+ \varphi_k^-(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^- \varphi_k^-(x). \qquad /9/$$

Розглянемо ряди у правій частині /9/. Проводячи міркування, як і в [3], показуємо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ збігається на $\mathcal{P}_2$ всюди, крім множини першої категорії.

Але останнє приводить нас до протиріччя. Справді, послідовність $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right\}$ неперервна на $\mathcal{P}_2$, $\psi(x) \in \bar{M}_2(\mathcal{P}_2)$, а тому, беручи до уваги лему I, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ розбігається на множині другої категорії на $\mathcal{P}_2$. Таким чином, припущення про те, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k^+(x)]^2$ збіжний на множині додатної міри, привело нас до протиріччя.

С п и с о к   л і т е р а т у р и : І. Г у к е в и ч В.Й. Рівність Парсеваля і теореми Фішера-Риса для майже ортогональних рядів. – У цьому ж Віснику. 2. К а ч м а х С.И. , Ш т е й н г а у з Т. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1956. 3. К о з л о в В.Я. О распределении положительных и отрицательных и нормированных функций, образующих полную систему. – Математический сборник, 1948, № 23. 4. Н а т а н с о н И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Физматгиз, 1950.

УДК 517.535.4

А.А.Гольдберг, О.Н.Фрідман

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ З ДОДАТНИМИ НУЛЯМИ ТА ВІД"ЄМНИМИ ПОЛЮСАМИ

А.Бернштейн [4] висловив таку гіпотезу: нехай f – мероморфна функція з додатними нулями та від"ємними полюсами, така, що $T(r,f) \sim r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ – певний уточнений порядок, $\rho(r) \to \rho$, $0<\rho<1$. Тоді існують такі додатні сталі A і B, що $N(r,0) \sim Ar^{\rho(r)}$, $N(r,\infty) \sim Br^{\rho(r)}$, $r \to \infty$.
Справедливість цієї гіпотези А.Бернштейн [4] довів для цілих функцій (при $0<\rho \le \frac{1}{2}$ можна навіть відкинути обмеження на аргументи нулів). Для цілих функцій порядку $\rho \le \frac{1}{2}$ більш сильний результат незалежно від А.Бернштейна одержав А.А.Гольдберг [I]. Проте, як буде показано в цій статті, для мероморфних функцій гіпотеза А.Бернштейна не справджується, навіть якщо сильно послабити її твердження.

Те, що гіпотеза А.Бернштейна неправильна принаймні при $0<\rho<\frac{1}{2}$, легко побачити, трохи модифікувавши приклад 2 з роботи [3, с.102].