Список літератури: 1. Гукевич В.Й. Рівність Парсеваля і теореми Фішера-Риса для майже ортогональних рядів. - У цьому ж Віснику. 2. Качмах С.И., Штейнгауэ Т. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1956. 3. Козлов В.Я. О распределении положительных и отрицательных и нормированных функций, образующих полную систему. - Математический сборник, 1948, № 23. 4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Физматгиз, 1950.

УДК 517.535.4

А.А.Гольдберг, О.Н.Фрідман

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ З ДОДАТНИМИ НУЛЯМИ ТА ВІД"ЄМНИМИ ПОЛЮСАМИ

А.Бернштейн [4] висловив таку гіпотезу: нехай f - мероморфна функція з додатними нулями та від"ємними полюсами, така, що $T(r,f) \sim r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ - певний уточнений порядок, $\rho(r) \to \rho$, $0<\rho<1$. Тоді існують такі додатні сталі A і B, що
$N(r,0) \sim A r^{\rho(r)}$, $N(r,\infty) \sim B r^{\rho(r)}$, $r \to \infty$.
Справедливість цієї гіпотези А.Бернштейн [4] довів для цілих функцій (при $0<\rho\le\frac{1}{2}$ можна навіть відкинути обмеження на аргументи нулів). Для цілих функцій порядку $\rho\le\frac{1}{2}$ більш сильний результат незалежно від А.Бернштейна одержав А.А.Гольдберг [1]. Проте, як буде показано в цій статті, для мероморфних функцій гіпотеза А.Бернштейна не справджується, навіть якщо сильно послабити її твердження.

Те, що гіпотеза А.Бернштейна неправильна принаймні при $0<\rho<\frac{1}{2}$, легко побачити, трохи модифікувавши приклад 2 з роботи [3,с.102].

Справді, досить лише взяти за f не $f(z)=V_1(z)+V_2(-z)$, як у цьому прикладі, а $f(z)=V_1(z)/V_2(-z)$. Покажемо, що: для мероморфних функцій з додатними нулями та від"ємними полюсами таких, що $T(r,f)\sim\Delta r^{\rho}$, $0<\rho<1$, $0<\Delta<\infty$, нижні порядки обох величин $N(r,0)$ і $N(r,\infty)$ можуть бути меншими за ρ і навіть дорівнювати нулеві.

Нехай ε – довільне число таке, що $0<\varepsilon<\rho$. Розглянемо спочатку випадок, коли $\frac{1}{2}\le\rho<1$. На $[0,\sin\pi\rho]$ означимо функцію $y(x)=x\cos\pi\rho+\sin\pi\rho\sqrt{1-x^2}$. Це спадна функція, яка бієктивно відображає $[0,\sin\pi\rho]$ на $[0,\sin\pi\rho]$, причому $y(y(x))=x$. Можна перевірити, що коли φ – єдиний корінь на $[0,\pi]$ рівняння

$$x\cos\rho(\pi-\varphi)=y(x)\cos\rho\varphi,\quad x\in[0,\sin\pi\rho],$$

то

$$y(x)\sin\rho\varphi+x\sin\rho(\pi-\varphi)=\sin\pi\rho. \qquad /1/$$

Позначимо $\ln_3 r=\ln\ln\ln r$. Візьмемо чотири послідовності додатних чисел $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n)$, які визначаються співвідношеннями $\ln_3 b_n-\ln_3 a_n=\ln_3 c_n-\ln_3 b_n=\ln_3 d_n-\ln_3 c_n=\ln_3 a_{n+1}-\ln_3 d_n=1$, a_1 вибране досить великим. Нехай

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n],\quad B=\bigcup_{n=1}^{\infty}[b_n,c_n],\quad C=\bigcup_{n=1}^{\infty}[c_n,d_n],$$

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}[d_n,a_{n+1}],\quad A\cup B\cup C\cup D=[a_1,\infty).$$

Візьмемо послідовність $\gamma_n>0$, яка монотонно прямує до нуля при $n\to\infty$, $\gamma_n>(\ln a_n)^{-1}$, $\gamma_0<\frac{1}{2}\sin\pi\rho$, $\beta_n=y(\gamma_n)$.

Очевидно, $(1+o(1))\sin\pi\rho=\beta_n<\sin\pi\rho$, $y(\beta_n)=\gamma_n$. На $[a_1,\infty)$ означимо функції $V_1(r)=r^{L_1(r)}$ та $V_2(r)=r^{L_2(r)}$ наступними формулами:

$$V_1(r)=r^{\rho}L_1(r),\quad L_1(r)=\beta_{n-1}-(\beta_{n-1}-\gamma_n)(\ln_3 r-\ln_3 a_n),$$

$$V_2(r)=r^{\rho}y(L_1(r))\ \text{при}\ a_n\le r\le b_n;$$

$$V_1(r)=\gamma_n r^{\rho-(\rho-\varepsilon)\sin\pi(\ln_3 r-\ln_3 b_n)},$$

$V_2(r)=\beta_n r^\rho$ при $b_n \le r \le c_n$;

$V_1(r)=r^\rho L_2(r)$, $L_2(r)=\gamma_n+(\beta_n-\gamma_n)(\ln_2 r-\ln_2 c_n)$,

$V_2(r)=r^\rho y(L_2(r))$ при $c_n \le r \le d_n$;

$V_1(r)=\beta_n r^\rho$, $V_2(r)=\gamma_n r^{\rho-(\rho-\varepsilon)\sin\pi(\ln_3 r-\ln_3 d_n)}$

при $d_n \le r \le a_{n+1}$.

Можна перевірити, що функції V_1 і V_2, зростаючі на $[a_1,\infty)$, якщо a_1 вибране досить великим, l_1 та l_2 – неперервні кусково-неперервно диференційовані функції, такі, що

$$(j=1,2)\ l_j'(r)\,r\ln r\to 0 \quad \text{при } r\to\infty,$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, l_j(r)=\rho,\quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\, l_j(r)=\varepsilon. \qquad /2/$$

Побудуємо цілу функцію f_1 роду нуль з додатними нулями, такими, що $n(r,0,f_1)\sim V_1(r)$, і цілу функцію f_2 роду нуль з від"ємними нулями, такими, що $n(r,0,f_2)\sim V_2(r)$, $f_1(0)=f_2(0)=1$. Відомо [2,с.94], що $(0<\varphi<\pi)$

$$\ln|f_1(re^{i\varphi})|=\frac{\pi\cos(l_1(r)(\varphi-\pi))}{\sin\pi l_1(r)}V_1(r)+o(V_1(r)), \qquad /3/$$

$$\ln|f_2(re^{i\varphi})|=\frac{\pi\cos(l_2(r)\varphi)}{\sin\pi l_2(r)}V_2(r)+o(V_2(r)) \qquad /4/$$

при $r\to\infty$ рівномірно відносно φ, $0<\delta<\varphi<\pi-\delta$. У нашому виборі V_1 та V_2 можна при $r\in AUC$ замінити в /3/ і /4/ $l_1(r)$ та $l_2(r)$ на ρ. Використаємо для мероморфної функції $f=f_1/f_2$ формулу А.Картана [3,с.28] і просту модифікацію теореми 7.4 в роботи [3, с.59]. Враховуючи те, що $|f_1(z)|\ge 1$ при $\operatorname{Re} z\le 0$, $|f_2(z)|\ge 1$ при $\operatorname{Re} z\ge 0$ і $|f_j(\bar z)|=|f_j(z)|$, одержуємо

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{\ln|f_1(re^{i\varphi})|,\ln|f_2(re^{i\varphi})|\}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\max\{\ln^+|f_1(re^{i\varphi})|,\ln^+|f_2(re^{i\varphi})|\}\,d\varphi=$$

$$= \int_0^{\pi} \max\left\{ \frac{\cos^+(L_1(r)(\varphi-\pi))}{\sin \pi L_1(r)} V_1(r),\ \frac{\cos^+(L_2(r)\varphi)}{\sin \pi L_2(r)} V_2(r) \right\} d\varphi +$$

$$+ o(r^{\rho}),\ r \to \infty. \qquad /5/$$

При $\rho \in [b_n c_n]$ маємо $V_1(r) \le \gamma_n r^{\rho} = o(r^{\rho})$, $l_2(r) = \rho + O(1/\ln r)$, $r \to \infty$, тому з /5/ при $r \in B$ випливає $(b_n \le r \le c_n)$

$$T(r,f) = \frac{B_n r^{\rho}}{\sin \pi \rho} \int_0^{\pi} \cos^+ \rho\varphi \, d\varphi + o(r^{\rho}) =$$
$$= \frac{1}{\rho} r^{\rho} + o(r^{\rho}),\ r \to \infty. \qquad /6/$$

Аналогічно одержуємо /6/ при $r \in D$. При $r \in A$ маємо $l_1(r) = \rho + O(\ln\ln r/\ln r)$, $l_2(r) = \rho + O(\ln\ln r/\ln r)$, тому з /5/ одержуємо

$$T(r,f) = \frac{r^{\rho}}{\sin \pi \rho} \int_0^{\pi} \max\left\{ L_1(r)\cos^+\rho(\varphi-\pi),\ y(L_1(r))\cos^+\rho\varphi \right\} d\varphi +$$
$$+ o(r^{\rho}) = \frac{r^{\rho}}{\sin \pi \rho} \left\{ y(L_1(r)) \int_0^{\varphi(r)} \cos \rho\varphi \, d\varphi + L_1(r) \int_{\varphi(r)}^{\pi} \cos \rho(\varphi-\pi) \, d\varphi \right\} +$$
$$+ o(r^{\rho}) = \frac{r^{\rho}}{\rho \sin \pi \rho} \left\{ y(L_1(r)) \sin \rho\varphi(r) + L_1(r) \sin \rho(\pi - \varphi(r)) \right\} + o(r^{\rho}),$$

де $\varphi(r) \in [0, \pi]$ – єдиний корінь рівняння $L_1(r)\cos\rho(\pi-\varphi) = y(L_1(r))\cos\rho\varphi$. З огляду на /I/ одержуємо, що

$$y(L_1(r)) \sin \rho\varphi(r) + L_1(r) \sin \rho(\pi - \varphi(r)) \equiv \sin \pi\rho.$$

Тому і при $r \in A$ маємо /6/. Аналогічні міркування проводимо, якщо $r \in C$. Таким чином, співвідношення /6/ доведено при $r \to \infty$.

З іншого боку, $N(r,0,f) = N(r,0,f_1) \sim V_1(r)/l_1(r)$, $N(r,\infty,f) = N(r,0,f_2) \sim V_2(r)/l_2(r)$. З /2/ випливає, що обидві функції $N(r,0,f)$ та $N(r,\infty,f)$ мають порядок ρ і нижній порядок ε. Використовуючи ту ж саму ідею, можна побудувати також приклад, де $N(r,0,f)$ та $N(r,\infty,f)$ матимуть нульовий нижній порядок. Проте викладки тоді стануть набагато довші, бо без додаткових пояснень не можна використовувати готові формули /3/ і /4/, навіть для інтервалів, де $0 < \varepsilon \le l_j(r) \le \rho$.

У випадку, коли $0<\rho<\frac{1}{2}$, потрібний приклад будується і досліджується аналогічно з деякими змінами, на які вкажемо далі. Функція $y=y(x)$ задається попередньою формулою, але розглядається на відрізку $[\cos\pi\rho, 1]$. Як і раніше, беремо послідовності $(\alpha_n), (b_n), (c_n), (d_n), (\beta_n), (\gamma_n)$, але тепер вибираємо β_n так, щоб (β_n) була зростаючою послідовністю, що прямує до 1 так, що $\beta_0 > (1+\cos\pi\rho)/2$, $\beta_n < 1-(\ln a_n)^{-1}$. Тоді $\gamma_n = y(\beta_n)$ задовольняє нерівність $(1+o(1))\cos\pi\rho \ge \gamma_n > \cos\pi\rho$, $n\to\infty$. Після цього функції $V_1(r)$ та $V_2(r)$, мероморфна функція f будуються, як і раніше. Нові моменти з"являються лише при доведенні /6/ для $r\in B\cup D$. Нехай $r\in B$. Тоді $l_2(r)=\rho+o((\ln r)^{-1})$, $r\to\infty$. Використаємо той факт, що при $\ln r > \pi\operatorname{ctg}\pi\varepsilon$ і $\varepsilon\le x\le\rho$ виконується $r^x\operatorname{cosec}\pi x \le r^\rho\operatorname{cosec}\pi\rho$. При $0\le\varphi\le\pi$, $r\to\infty$, $r\in[b_n, c_n]$ одержуємо

$$\frac{\cos^+(l_1(r)(\varphi-\pi))}{\sin\pi l_1(r)}r^{l_1(r)} \le (1+o(1))\frac{\gamma_n r^{l_1(r)-\frac{\ln\gamma_n}{\ln r}}}{\sin\pi\left[l_1(r)-\frac{\ln\gamma_n}{\ln r}\right]} \le$$

$$\le(1+o(1))\frac{\cos\pi\rho}{\sin\pi\rho}r^\rho \le (1+o(1))\frac{\cos^+(l_2(r)\varphi)}{\sin\pi l_2(r)}r^{l_2(r)} =$$

$$=\frac{\cos\rho\varphi}{\sin\pi\rho}r^\rho+o(r^\rho),\quad r\to\infty.$$

Тоді з /5/ при $r\in B$ маємо $(r\to\infty)$

$$T(r,f)=\int_0^\pi\frac{\cos\rho\varphi}{\sin\pi\rho}r^\rho d\varphi+o(r^\rho)=\frac{r^\rho}{\rho}+o(r^\rho),$$

тобто /6/. При $r\in D$ міркування аналогічні.

Зауваження. Якщо для мероморфної функції f порядку $\rho<1$ виконується $\ln T(r,f)\sim\rho\ln r$, $r\to\infty$, то і $\ln N(r,0,\infty)\sim\rho\ln r$, де $N(r,0,f)+N(r,\infty,f)=N(r,0,\infty)$. Це випливає, наприклад, з теореми 2.1 в роботі [3]. Але навіть якщо додатково припустити, що нулі f додатні, а полюси від"ємні, то з $T(r,f) \sim \Delta r^{\rho}$, $0<\Delta<\infty$ не випливає, що існує границя

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r,0,\infty)}{r^{\rho}}.$$

Це видно з побудованих вище прикладів, де остання границя не існує при $r\to\infty$, $r\in A$, оскільки $y(x)+x$ на жодному інтервалі не дорівнює тотожно сталій.

Список літератури: I. Гольдберг А.А. О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений. – Теория функций функциональный анализ и их приложения, 1972, № 15. 2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 3. Гольдберг А.А., Островский И.В. Некоторые теоремы о росте мероморфных функций. – Записки математического отдела физ.-мат. ф-та Харьковского ун-та и ХМО, 1961, сер.4, № 27. 4. Baernstein A. A nonlinear Tauberian theorem in function theory.- Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 146.

УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

ПРО ЗБУРЕННЯ КРАЙОВОГО ОПЕРАТОРА

Нехай H -гільбертів простір, $\mathcal{C}(H)$ - множина лінійних, замкнутих, щільно визначених операторів $H\to H$. Парі операторів (L_0,L) такій, що $L_0, L\in\mathcal{C}(H)$ і $L_0\subset L$, поставимо у відповідність крайову, або граничну пару, що складається з простору крайових, або граничних значень $\mathcal{U}$, та крайового, або граничного, оператора $\mathcal{P}$. Пара $(\mathcal{U},\mathcal{P})$ визначається умовами: