що нулі f додатні, а полюси від"ємні, то з $T(r,f)\sim\Delta r^{\rho}$, $0<\Delta<\infty$ не випливає, що існує границя

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,0,\infty)}{r^{\rho}}.$$

Це видно з побудованих вище прикладів, де остання границя не існує при $r\to\infty$, $r\in A$, оскільки $y(x)+x$ на жодному інтервалі не дорівнює тотожно сталій.

Список літератури: I. Гольдберг А.А. О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений. – Теория функций функциональный анализ и их приложения, 1972, № 15. 2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 3. Гольдберг А.А., Островский И.В. Некоторые теоремы о росте мероморфных функций. – Записки математического отдела физ.-мат. ф-та Харьковского ун-та и ХМО, 1961, сер.4, № 27. 4. Baernstein A. A nonlinear Tauberian theorem in function theory.- Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 146.

УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

ПРО ЗБУРЕННЯ КРАЙОВОГО ОПЕРАТОРА

Нехай H -гільбертів простір, $\mathcal{C}(H)$ - множина лінійних, замкнутих, щільно визначених операторів $H\to H$. Парі операторів (L_0,L) такій, що $L_0, L\in\mathcal{C}(H)$ і $L_0\subset L$, поставимо у відповідність крайову, або граничну пару, що складається з простору крайових, або граничних значень $\mathcal{U}$, та крайового, або граничного, оператора $\mathcal{P}$. Пара $(\mathcal{U},\mathcal{P})$ визначається умовами:

1/ $\mathcal{U}$ -гільбертів простір,

2/ $\mathcal{P} \in B(D(L);\mathcal{U}), Z(P) = D(L_0)$, $R(P) = \mathcal{U}$ *.

<u>Зауваження.</u> Крайова пара існує. Справді, досить прийняти $\mathcal{U} = D(L) \ominus D(L_0)$, де область визначення $D(L)$ оператора L розглядається як гільбертів простір зі скалярним добутком $(f/g)_L \stackrel{df}{=} (f/g)_H + (Lf/Lg)_H$, а за P взяти ортопроектор $D(L) \to \mathcal{U}^H$.

<u>Означення.</u> Оператор F називається крайовим, або граничним, якщо $F \in B(D(L);\mathcal{U})$ і $Z(F)$ щільна в H.

У цій статті розглядаємо збурення крайового оператора, що зберігають його властивість як крайового. Почнемо зі збурень, "малих за розмірністю".

<u>Теорема 1.</u> Нехай F - крайовий оператор для пари (L_0, L). Якщо F - нормально розв"язуваний, а K - скінченовимірний оператор, такий, що $K \in B(H;\mathcal{U})$ і $R(K) \subset R(F)$, то $F-K$ також нормально розв"язуваний крайовий оператор для пари (L_0, L).

<u>Доведення.</u> Очевидно, що $F-K \in B(D(L);\mathcal{U})$. Ми можемо трактувати F як відображення $D(L) \to R(\Phi)$, а оскільки $R(K) \subset R(F)$, то $F-K$ - нормально розв"язуваний оператор [1]. Тому досить довести, що $Z(F-K)$ щільна в H.

Припустимо, що $h \in H$ і $\forall f \in Z(F-K)$ $(f/h)_H = 0$. Позначимо через D повний прообраз підпростору $R(K)$ при відображенні F. Нехай $(e_1, \dots, e_n)$ - $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ - ортогональна база в $R(K)$. Легко бачити, що

$$Z(F-K) = \{f \in D: ((F-K)f/e_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n\}.$$

---

* $B(X;Y)$ - нормований простір лінійних обмежених операторів $X \to Y$, де X і Y - нормовані простори. $Z(P)$ і $R(P)$ - многовид нулів і область значень оператора P.

Тому існують такі комплексні числа $c_1, \dots, c_n$, що $\forall f \in D$
$\sum c_k((F-K)f|e_k)_u = (f|h)_H$, або

$$\forall f \in D \ (Ff|e)_u = (f|h + K^* e)_H, \qquad /1/$$

де $e \overset{df}{=} \sum \bar{c}_k e_k$ Припустимо, що функціонал $D \ni f \to (Ff|e)_u$ відмінний від нуля. Тоді він $\|\cdot\|_H$ – необмежений, бо його ядро містить множину $Z(F)$, яка всюди щільна в H.

Але $\|\cdot\|_H$ – необмеженість цього функціонала суперечить співвідношенню /1/. Тому $\forall f \in D \quad (Ff|e)_u = 0$,
а оскільки $D = F^{-1} R(K)$ і $e \in R(K)$, то $e = 0$
Тепер з /1/ випливає, що $\forall f \in D \ (f|h)_H = 0$. Отже, $h = 0$, а тому D щільна в H.

Тепер розглянемо збурення, "мале за нормою".

Теорема 2. Нехай F – крайовий оператор для пари (L_0, L). Якщо F – нормально розв"язуваний, а $\Lambda \in B(H; U)$, $R(\Lambda) \subset R(F)$ і норма Λ достатньо мала /див.нерівність /2//, то $F-\Lambda$ – нормально розв"язуваний крайовий оператор для пари (L_0, L).

Доведення. Позначимо через $\tilde{F}$ звуження оператора F на $D(L) \ominus Z(F)$, а через $\tilde{P}$ – ортопроектор $D(L) \to D(L) \ominus Z(F)$.
Тоді $F = \tilde{F}\tilde{P}$, існує $\tilde{F}^{-1}$ і, оскільки $R(F)$ замкнута в U, $\tilde{F}^{-1} \in B(R(F), D(L))$. Припустимо, що існує таке $\alpha < 1$, що

$$\forall h \in H \quad \|\tilde{F}^{-1}\Lambda h\| \le \alpha \|h\|. \qquad /2/$$

Тоді, тому що $\forall f \in D(L) \quad \|f\|_H \le \|f\|_L$,

$$\|\tilde{F}^{-1}\Lambda\|_{B(H)} < 1, \qquad /3/$$

$$\|\tilde{F}^{-1}\Lambda\|_{B(D(L))} < 1. \qquad /4/$$

Отже, оператор $1_H - \tilde{F}^{-1}\Lambda$ біективно і $\|\cdot\|_H$ – неперервно відображає H на себе. Оскільки $Z(F-\Lambda) = (1 - \tilde{F}^{-1}\Lambda) Z(F)$ і $Z(F)$ щільна в h, то цю саму властивість має $Z(F-\Lambda)$.

Із /4/ випливає, що $1-\tilde{F}^{-1}\Lambda$ бієктивно відображає $D(L)$ на себе. Звідси, та беручи до уваги $F-\Lambda = F(1-\tilde{F}^{-1}\Lambda)$, робимо висновок, що $R(F-\Lambda) = R(F)$, а тому $F-\Lambda$ – нормально розв"язуваний. Нарешті, $Z(F-\Lambda)$ замкнута в $D(L)$, бо $F-\Lambda \in B(D(L);\mathcal{U})$.

<u>Висновок.</u> Нехай F – крайовий оператор для пари (L_0, L). Якщо F нормально розв"язуваний, то для всякого компактного оператора $\Phi \in B(H;\mathcal{U})$ такого, що $R(\Phi) \subset R(F)$ оператор $F-\Phi$ – нормально розв"язуваний крайовий оператор для пари (L_0, L).
<u>Доведення.</u> Нехай $K \in B(H;\mathcal{U})$ – скінченновимірний оператор, такий, що $R(K) \subset R(F)$ і $\|\Phi - K\| < \|\tilde{F}^{-1}\|^{-1}$, де $\tilde{F}$ із теореми 2. Припустимо $\Lambda = \Phi - K$. Оскільки $\Lambda \in B(H;\mathcal{U})$ і $\|\Lambda\| < \|\tilde{F}^{-1}\|^{-1}$, то, згідно з теоремою 2, $F-\Lambda$ нормально розв"язуваний крайовий оператор для (L_0, L). Застосовуючи теорему I, бачимо, що $F-\Phi = (F-\Lambda)-K$ нормально розв"язуваний крайовий оператор для (L_0, L).

<u>Список літератури</u>: I. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972. 2. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. – Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, вып. I6.

УДК 517.52I.7

О.Б.Скаскiв, М.М.Шеремета

ПРО ЗАДАЧУ АБЕЛЯ-ГОНЧАРОВА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ЛАКУНАРНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

Нехай $(z_n), n \geq 0$ – задана послідовність комплексних чисел. Задача Абеля-Гончарова полягає у відновленні функції f за значеннями $f^{(n)}(z_n)$. У зв"язку з цим виникає питання: при яких умовах ціла