із /4/ випливає, що $1-\tilde{F}^{-1}\Lambda$ бієктивно відображає $D(L)$ на себе. Звідси, та беручи до уваги $F-\Lambda = F(1-\tilde{F}^{-1}\Lambda)$, робимо висновок, що $R(F-\Lambda) = R(F)$, а тому $F-\Lambda$ – нормально розв"язуваний. Нарешті, $Z(F-\Lambda)$ замкнута в $D(L)$, бо $F-\Lambda \in B(D(L);\mathcal{U})$.

<u>Висновок.</u> Нехай F – крайовий оператор для пари (L_0, L). Якщо F нормально розв"язуваний, то для всякого компактного оператора $\Phi \in B(H;\mathcal{U})$ такого, що $R(\Phi) \subset R(F)$ оператор $F-\Phi$ – нормально розв"язуваний крайовий оператор для пари (L_0, L).

<u>Доведення.</u> Нехай $K \in B(H;\mathcal{U})$ – скінченновимірний оператор, такий, що $R(K) \subset R(F)$ і $\|\Phi - K\| < \|\tilde{F}^{-1}\|^{-1}$, де $\tilde{F}$ із теореми 2. Припустимо $\Lambda = \Phi - K$. Оскільки $\Lambda \in B(H;\mathcal{U})$ і $\|\Lambda\| < \|\tilde{F}^{-1}\|^{-1}$, то, згідно з теоремою 2, $F-\Lambda$ нормально розв"язуваний крайовий оператор для (L_0, L). Застосовуючи теорему I, бачимо, що $F-\Phi = (F-\Lambda) - K$ нормально розв"язуваний крайовий оператор для (L_0, L).

<u>Список літератури</u>: I. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972. 2. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. – Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, вып. 16.

УДК 517.521.7

О.Б.Скаскiв, М.М.Шеремета

ПРО ЗАДАЧУ АБЕЛЯ-ГОНЧАРОВА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ЛАКУНАРНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

Нехай $(z_n), n \geq 0$ – задана послідовність комплексних чисел. Задача Абеля-Гончарова полягає у відновленні функції f за значеннями $f^{(n)}(z_n)$. У зв"язку з цим виникає питання: при яких умовах ціла функція f розкладається в інтерполяційний ряд Абеля-Гончарова

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_n)P_n(z), \qquad /1/$$

де P_n – многочлен Гончарова степеня n, визначений формулами $P_n^{(m)}(z_m)=0$ при $m\neq n$ і $P_n^{(m)}(z_m)=1$ при $m=n$?

Нехай $M(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\Psi(r)=\ln M(r)$, а φ – функція, обернена до Ψ. Приймемо $S_n=\sum_{0\le\nu\le n-1}|z_{\nu+1}-z_\nu|$ і нехай $n(r)$ – рахуюча функція послідовності (S_n). І.І.Ібрагімов [1] довів: якщо $\Psi(r)\le C(\theta)n(\theta r)$, де $C(\theta)=\ln(1-1/\theta)$, $0<\theta<1/2$, то ціла функція f розкладається у рівномірно збіжний у кожній скінченній замкненій області інтерполяційний ряд /1/.

Ми доповнимо теорему І.І.Ібрагімова на випадок цілих функцій заданих лакунарним степеневим рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n},\quad \sum_{n=0}^{\infty}(1/\lambda_n)<\infty, \qquad /2/$$

тобто доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Якщо функція /2/ задовольняє умову

$$(\ln r)^{-1}\ln\ln M(r)=\gamma(r)\uparrow\infty,\quad r_0\le r\to\infty, \qquad /3/$$

а вузли інтерполяції (z_n) такі, що

$$\varlimsup_{n\to\infty}(z_n/\varphi(n))=k,\ \varlimsup_{n\to\infty}(S_n/\varphi(n))=l,\ k+l<1, \qquad /4/$$

то функція /2/ розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний у кожній скінченній замкненій області ряд /1/.

Теорему 1 ми одержимо з наступної теореми 2, для формування якої нам необхідні деякі приготування. Скажемо, що функція $\alpha\in\Lambda$, якщо вона неперервна на $[x_0,\infty)$, $x_0\ge 0$, зростає до ∞ зі збільшенням x до ∞ і є повільно зростаючою функцією, тобто для кожного $c>1$ при $x\to\infty$ виконується $\alpha(cx)\sim\alpha(x)$. Тут можуть трапитись значення функції α у точках, де вона не визначена. Надаватимемо їй значення $\alpha(x_0)$. Вважаємо також, що $\alpha(\infty)=\infty$. Величина [4]

$$\rho_\alpha(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\alpha(\ln M(r))$$

називається узагальненим порядком функції f. Будемо вважати, що $\rho_\alpha(f)<\infty$, а значення

$$h_\alpha(\varphi) = \lim_{\delta\to 0}\, \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\alpha(\ln M(r,\varphi,\delta)),$$

де $M(r,\varphi,\delta) = \max\{|f(re^{i\beta})| : |\beta-\varphi|<\delta\}, \delta>0$, назвемо узагальненим радіальним індикатором функції f. Очевидно, $0\le h_\alpha(\varphi)\le\rho_\alpha(f)$. Можна показати, що $h_\alpha(\varphi)$ – напівнеперервна зверху /означення, [illegible] у [3, с.II] / функція від φ і $\max\{h$ [illegible] $\rho_\alpha(f)$.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\alpha\in\Lambda$, а вузли інтерполяції задовольняють умови

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/\alpha(n)) = k, \quad \lim_{n\to\infty} (S_n/\alpha(n)) = l, \quad 0\le k, \ l<\infty. \qquad /5/$$

Тоді, якщо

$$\min\{|k-(h_\alpha(\varphi))^{-1}e^{i\varphi}| : |\varphi|\le\pi\} > l, \qquad /6/$$

то функцію f можна розкласти в абсолютно і рівномірно збіжний у кожній скінченній замкненій області ряд /I/.

Теорема 2 узагальнює одну теорему В.А.Осколкова [2]. Її доведення громіздке і цілком аналогічне доведенню теореми В.А.Осколкова, тому ми його опускаємо.

Доведемо теорему I. У роботі [5] показано, що для функцій виду /2/ справедливе твердження: для кожних $\varepsilon>0$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$, $\delta\in\,]0,\pi]$ і для всіх r зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри виконується $\ln M(r,\varphi,\delta) > (1-\varepsilon)\ln M(r)$, звідки випливає, що $h_\alpha(\varphi) = \rho_\alpha(f)$, яка б не була функція $\alpha\in\Lambda$. Оскільки при $\alpha=\psi$ виконується $\rho_\alpha(f)=\rho_\psi(f)=1$, а умова /6/ у цьому випадку еквівалентна умові $\min\{|k-e^{i\varphi}| : |\varphi|\le\pi\} = |k-1| > l$, тобто завдяки нерівності $l\ge k$ /ця нерівність випливає з означення S_n / еквівалентна умові $k+l<1$, то за теоремою 2 нам залишилось показати, що при виконанні умови /3/ $\psi\in\Lambda$

Припустимо, що $\psi \bar{\in} \Lambda$, тобто існують числа $c>1$, $\rho>0$ і послідовність (x_k) такі, що $\psi(cx_k)>(1+\rho)\psi(x_k)$. Приймемо $r_k=\psi(x_k)$. Тоді останню нерівність перепишемо у вигляді $c\,\Psi(r_k)>\Psi((1+\rho)r_k)$, де $\Psi(r_k)=\ln M(r_k)=\exp\{\gamma(r_k)\ln r_k\}$. Таким чином, маємо $\ln c+\gamma(r_k)\ln r_k>\gamma((1+\rho)r_k)\ln r_k+\gamma((1+\rho)r_k)\ln(1+\rho)$, звідки $\gamma(r_k(1+\rho))=O(1)$, $k\to\infty$, що неможливо.

Список літератури: I. Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М., Наука, 1971. 2. Осколков В.А. Задача Абеля-Гончарова для целых функций бесконечного порядка. – Сибирский математический журнал, 1975, т.16, № 1. 3. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 4. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. – Известия вузов. Математика, 1967, № 2. 5. Шеремета М.Н. Рост в углу целых функций, заданных лакунарными степенными рядами. – ДАН СССР, 1977, т.236, № 3.

УДК 517.535.4

М.В.Іванюк, М.М.Шеремета

РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ НА $[0,1]$ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ДОВІЛЬНОГО РОСТУ

1. Нехай

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\quad a_0=1,\ a_k\geq 0\ (k\geq 1)- \qquad /1/$$

ціла трансцендентна функція, Π_n – клас звичайних алгебраїчних многочленів степеня не вище n, а

$$R_n(f)=\inf_{p\in\Pi_n}\left\|\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right\|_{[0,1]},\quad \|g\|_{[0,1]}=\sup_{0\leq x\leq 1}|g(x)|. \qquad /2/$$