Припустимо, що $\Psi \bar{\in} \Lambda$, тобто існують числа $c > 1$, $\rho > 0$ і послідовність (x_n) такі, що $\Psi(cx_k) > (1+\rho)\Psi(x_n)$. Приймемо $t_k = \Psi(x_k)$. Тоді останню нерівність перепишемо у вигляді $c\Psi(t_k) > \Psi((1+\rho)t_k)$, де $\Psi(t_k) = \ln M(t_k) = \exp\{\gamma(t_k)\ln t_k\}$. Таким чином, маємо $\ln c + \gamma(t_k)\ln t_k > \gamma((1+\rho)t_k)\ln t_k + \gamma((1+\rho)t_k)\ln(1+\rho)$, звідки $\gamma(t_k(1+\rho)) = O(1)$, $k \to \infty$, що неможливо.

Список літератури: І. Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М., Наука, 1971. 2. Осколков В.А. Задача Абеля-Гончарова для целых функций бесконечного порядка. – Сибирский математический журнал, 1975, т.16, № 1. 3. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 4. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. – Известия вузов. Математика, 1967, № 2. 5. Шеремета М.Н. Рост в углу целых функций, заданных лакунарными степенными рядами. – ДАН СССР, 1977, т.236, № 3.

УДК 517.535.4

М.В.Іванюк, М.М.Шеремета

РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ НА [0,1] ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ДОВІЛЬНОГО РОСТУ

1. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_0 = 1, a_k \geq 0 \ (k \geq 1) - \qquad /1/$$

ціла трансцендентна функція, Π_n – клас звичайних алгебраїчних многочленів степеня не вище n, а

$$R_n(f) = \inf_{P \in \Pi_n} \left\| \frac{1}{f} - \frac{1}{P} \right\|_{[0,1]}, \quad \|g\|_{[0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|. \qquad /2/$$

У статті [8] наведені результати, які дають оцінки $R_n(f)$ для цілих функцій скінченного порядку. Зокрема, доведено, що коли функція /1/ має порядок ρ, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{-\ln R_n(f)} = \rho .$$

Ми узагальнимо ці результати на випадок цілих функцій довільного росту. При цьому будемо користуватись наступними класами функцій [3]: $\alpha \in L^0$, якщо α –неперервна додатна зростаюча до ∞ на $[x_0,\infty)$ функція така, що $\alpha(x\{1+\gamma(x)\}) \sim \alpha(x)$ при $x\to\infty$ для будь-якої функції γ, $\gamma(x)\to 0$ при $x\to\infty$ і $\alpha\in\Lambda$, якщо $\alpha\in L^0$ і для кожного $c\in(0,\infty)$ виконується $\alpha(cx)\sim\alpha(x)$, $x\to\infty$.

2. Надалі нам потрібні леми.

Лема 1. Для всіх $n\geq 0$ і $r\geq 2$ виконується

$$R_n(f)\leq f(r)r^{-n}. \qquad /3/$$

Дійсно, нехай $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Тоді, використавши нерівність Коші $a_k\leq f(r)r^{-k}$, $k\geq 0$, $r\geq 2$ маємо

$$R_n(f)\leq \left\|\frac{1}{f}-\frac{1}{S_n}\right\|_{[0,1]} \leq \max_{0\leq x\leq 1}\left\{\frac{1}{f(x)S_n(x)}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right\}\leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(r)r^{-k} = f(r)\frac{r^{-n-1}}{1-1/r}\leq f(r)r^{-n}.$$

Лема 2. Для всіх $n\geq n_0$ виконується

$$R_n(f)\geq f^{-2}(1)a_{n+1}4^{-n}. \qquad /4/$$

Справді, нехай $p^*\in\Pi_n$ – многочлен, який дає найкраще наближення у розумінні /2/, тобто $R_n^{(f)}=\left\|\frac{1}{f}-\frac{1}{p^*}\right\|_{[0,1]}$. Оскільки з доведення попередньої леми випливає, що $R_n(f)\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k<f(1)$, $n\geq n_0$ то, як і в [8], одержуємо

$$\frac{-f^2(x)}{1/R_n(f)+f(x)}\leq p^*(x)-f(x)\leq\frac{f^2(x)}{1/R_n(f)-f(x)},\quad 0\leq x\leq 1,$$

звідки внаслідок монотонності $f(x)$ записуємо

$$\|f-P^*\|_{[0,1]} \le \frac{f^2(1)}{1/R_n(f)-f(1)} . \qquad /5/$$

Нехай $E_n(f)=\inf\limits_{P\in\Pi_n}\|f-P\|_{[0,1]}$. Тоді за нерівністю С.Н.Бернштейна [7,с.10] одержуємо $E_n(f)\ge a_{n+1}2^{-(2n+1)}$. Тому з /5/ випливає $\frac{2a_{n+1}}{4^n}\le$ $\le \frac{f^2(1)}{1/R_n(f)-f(1)}$, звідки

$$R_n(f) \ge \frac{2}{f^2(1)+2f(1)a_{n+1}4^{-n}} \, \frac{a_{n+1}}{4^n} .$$

Тому що $a_{n+1}4^{-n}\to 0$ при $n\to\infty$, з останньої нерівності маємо /4/.

Лема 3 /див.[1,3]/. Нехай $F(x;c)=\beta^{-1}(c\alpha(x))$ і для всіх $c\in(0,\infty)$ виконана одна з умов:

а) $\alpha\in L^0$, $\beta\in L^0$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{d\ln F(x;c)}{d\ln x}=\frac{1}{\rho}$, $0<\rho<\infty$;

б/ $\alpha\in\Lambda$, $\beta\in\Lambda$ і $\frac{d\ln F(x;c)}{d\ln x}=O(1), x\to\infty$.

Тоді

$$\rho_{\alpha\beta}(f)\overset{df}{=}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\alpha(\ln f(r))}{\beta(r)}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(e^{1/\rho}a_n^{-1/n})} . \qquad /6/$$

Лема 4 [5-6]. Нехай $\Phi(x)=\ln f(e^x)$, φ – функція, обернена до Φ і $\gamma(x)=(\ln x)^{-2}\ln\Phi(x)$. Тоді, якщо

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\gamma(x)=\infty, \qquad /7/$$

то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\varphi(n)}{-\ln a_n}=1, \qquad /8/$$

а якщо $\gamma(x)\uparrow\infty$ при $x\to\infty$ і a_n/a_{n+1} зростає зі збільшенням n, то у /8/ існує границя, яка дорівнює 1.

3. Використовуючи леми 1...4, доведемо наступні дві теореми.

Теорема 1. Якщо α і β задовольняють одну з умов леми 3, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(\frac{1}{4}e^{1/\rho}R_n^{-1/n}(f))}\ge\rho_{\alpha\beta}(f)\ge\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(e^{1/\rho}R_n^{-1/n}(f))} \qquad /9/$$

Доведення. Нехай $\rho_{\alpha\beta}(f)<\infty$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ при досить великих t одержуємо $f(t)\le \exp\{\alpha^{-1}((\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon)\beta(t))\}$. Взявши $t=\beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon}\alpha\left(\frac{n}{p}\right)\right)$ з /3/, маємо

$$R_n(f)\le\left\{\frac{e^{1/p}}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon}\alpha\left(\frac{n}{p}\right)\right)}\right\}^n, \qquad /10/$$

звідки випливає права частина /9/ з $\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon$ замість $\rho_{\alpha\beta}(f)$. Внаслідок довільності ε одержуємо справедливість правої частини /9/, яка очевидна при $\rho_{\alpha\beta}(f)=\infty$.

Нехай тепер

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n/p)}{\beta\left(\frac{1}{4}e^{1/p}R_n^{-1/n}(f)\right)}=t<\infty.$$

Тоді для кожного $\varepsilon>0$ при $n\ge n_0(\varepsilon)$ маємо

$$R_n(f)\le\left\{4e^{-1/p}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n/p)}{t+\varepsilon}\right)\right\}^{-n}.$$

Звідки внаслідок /4/ маємо

$$a_{n+1}\le f^2(1)\left\{e^{-1/p}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n/p)}{t+\varepsilon}\right)\right\}^{-n}=$$

$$=f^2(1)\left\{e^{1/p}\beta^{-1}\left(\frac{(1+o(1))\alpha\left(\frac{n+1}{p}\right)}{t+\varepsilon}\right)\right\}^{-n-1}e^{1/p}\beta^{-1}\left(\frac{(1+o(1))\alpha\left(\frac{n+1}{p}\right)}{t+\varepsilon}\right).$$

З умов теореми випливає, що $\ln\beta^{-1}(c\alpha(x))=o(x)$ при $x\to\infty$. Тому з /10/ за формулою /6/ одержуємо, що $\rho_{\alpha\beta}(f)\le t+\varepsilon$, звідки внаслідок довільності ε одержуємо ліву частину /9/, яка очевидна при $t=\infty$

Теорема 2. Нехай функції Φ,φ і γ визначені, як в лемі 4. Тоді, якщо виконана умова /7/, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\varphi(n)}{-\ln R_n(f)}=1, \qquad /11/$$

а якщо $\gamma(x)\uparrow\infty$ при $x\to\infty$ і a_n/a_{n+1} зростає зі збільшенням n, то в /11/ існує границя, яка дорівнює одиниці.

Доведення. Перша частина цієї теореми доводиться аналогічно доведенню теореми I. Для доведення другої частини зауважимо, що з /3/, взявши $t=\varphi(n)$, одержимо $R_n(f)\le\exp\{-n(\varphi(n)-1)\}$, звідки

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\varphi(n)}{-\ln R_n(f)}\le 1. \qquad /12/$$

З іншого боку, за лемою 4 для довільного $\varepsilon > 0$ при $n \geq n_0$ маємо $a_n > \exp\left\{-\frac{n\varphi(n)}{1-\varepsilon/2}\right\}$. Тому за лемою 2 $R_n(t) \geq \exp\left\{-\frac{(n+1)\varphi(n+1)}{1-\varepsilon}\right\}$.

Внаслідок трансцендентності функції /I/ $\varphi(n+1) \sim \varphi(n)$ при $n \to \infty$. Тому з останньої нерівності одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\varphi(n)}{-\ln R_n(t)} \geq 1-\varepsilon. \qquad /13/$$

З /I2/ і /I3/ внаслідок довільності ε одержуємо справедливість другого твердження теореми 2.

Зауважимо, що лема I правильна для функцій виду /I/, аналітичних у крузі радіуса $R \geq 2$. Зауважимо також, що основним фактором при доведенні теорем I-2 є формули, які виражають ріст функції /I/ через коефіцієнти a_n.

Список літератури: I. Балашов С.К. О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней. - Известия вузов. Математика,1972, 2. Пьяныло Я.Д. Об обобщенных порядках роста целых функций. - Известия вузов. Математика, 1975, № 5. 3. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. - Известия вузов. Математика, 1967, № 2. 4. Шеремета М.Н. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений. - Известия вузов. Математика, 1968, № 6. 5. Шеремета М.Н. О коэффициентах степенного разложения целых функции. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1972, вып. 16. 6. Шеремета М.Н. О коэффициентах степенного разложения целых функций. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1973, вып. 17. 7. Bernstein S.N. Lecons sur le propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Gauthier-Villars, Paris, 1926.
8. Reddy A.R. Some results in Chebyshev rational approximation. J. Approxim. Theory, 1976, v. 18.