УДК 517.521.6

М.М.Хом"як

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z=x+iy$ – ціла функція, задана абсолютно збіжним у всій площині рядом Діріхле

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_1=1, \qquad /I/$$

$M(x)=\sup\{|f(x+iy)|: |y|<\infty\}$ а $\mu(x)$ і $\nu(x)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /I/.

Н.Ф.Якуніна[*], вивчаючи клас функцій /I/, для яких

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = s < 1, \qquad /2/$$

виявила для цього класу функцій аналог теореми Вімана, довівши, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує послідовність (x_n), яка прямує до ∞ при $n\to\infty$ і така, що

$$M(x_n) \le \frac{(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}}{\ln(1/s)}\,\mu(x_n)\sqrt{\ln\mu(x_n)} \qquad /3/$$

/при $s=0$ в /3/ замість $(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}/\ln(1/s)$ слід брати ε /.

Неважко показати, що з умови /2/ випливає: при всіх досить великих x виконується $\ln M(x) < x\ln x$.

Ми розглянемо ширший клас функцій /I/, а саме функції, які задовольняють умову

$$\ln M(x) < A x^{\rho}, \quad 1<\rho<\infty, \quad 0<A<\infty \qquad /4/$$

при всіх досить великих x. На відміну від випадку, що розглядався Н.Ф.Якуніною, одержані нами оцінки значно відрізняються від класичної теореми Вімана, проте виявляються у певному розумінні точними, на що вказує наведений нижче приклад. Крім того, оцінки будуть

---

[*] Якунина Н.Ф. К теореме Вимана для рядов Дирихле.- Математический анализ и его приложение, 1975, т.7.

виконуватись зовні виняткових множин, для характеристики яких потрібне поняття верхньої щільності: якщо $E \subset (-\infty,\infty)$ - вимірна множина, то її верхньою щільністю dE називається величина

$$dE = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{m\{E\cap[0,x]\}}{x}, \quad mE = \int\limits_{E\cap[0,\infty]} dx.$$

Результати нашої статті одержані модифікацією методу Вімана- Валірона для випадку рядів Діріхле. При доведенні теорем необхідна лема.

Лема. Нехай $0<q<1$ і для функції /Т/ виконується умова /4/. Тоді для всіх $n \geq 1$ і та x зовні деякої виняткової множини, верхня щільність якої не перевищує q, виконується

$$|a_n| n^x \leq \mu(x) \exp\left\{-\frac{q}{2d}(\ln n - \ln \nu)^2 \min\left\{(\ln n)^{\frac{2-p}{p-1}}, (\ln \nu)^{\frac{2-p}{p-1}}\right\}\right\}, \quad /5/$$

де $d = (Ap^p)^{1/(p-1)}$.

Використовуючи нерівність $M(x) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| n^x$ і нерівність /5/, доводиться теорема.

Теорема I. Нехай $0<q<1$ і для функції /I/ виконується умова /4/. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ і для всіх x зовні деякої виняткової множини верхньої щільності щонайбільше q виконується

$$M(x) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2\pi d}{q}}\, \mu(x)\, \nu(x) (\ln \nu(x))^{\frac{p-2}{2p-2}} \exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{d}{2q}(\ln \nu(x))^{\frac{p-2}{p-1}}\right\}. \quad /6/$$

Використовуючи нерівність

$$\nu(x) \leq \exp\left\{\left(\frac{pd}{q(p-1)} \ln \mu(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\},$$

справедливу для всіх x зовні деякої виняткової множини верхньої щільності не вище q, з теореми I легко одержати іншу теорему.

Теорема 2. Нехай $0<q<1$ і для функції /I/ виконується умова /4/. Тоді, яке б не було число $B > \frac{1}{2}\left(q^{2-2p} A^2 p^{3p-2} (p-1)^{2-p}\right)^{1/p}$, для всіх x зовні деякої виняткової множини верхньої щільності щонайбільше q виконується

$$M(x) \le 2\sqrt{\pi B}\,\mu(x)\{\ln\mu(x)\}^{\frac{\rho-2}{2\rho}}\exp\left\{D(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-1}{\rho}}+B(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{\rho}}\right\}, \qquad /7/$$

де $D=(q^{1-\rho}A\rho^{2\rho-1}(\rho-1)^{2-\rho})^{1/\rho}$.

Приклад функції

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\tau(\ln n)^{\frac{1}{\rho-1}}-1} n^{z}, \ \rho>1,\ \tau>0, \qquad /8/$$

вказує на те, що оцінка /7/ з точністю до сталих B і D може досягатись.

Справді, для функції /8/ виконуються співвідношення

$$M(x)=(1+o(1))\sqrt{2\pi\rho(\rho-1)A_1}\,e^{A_1x^{\rho}}x^{\frac{\rho-2}{2}}, \quad A_1=\frac{1}{\rho^{\rho}}\left(\frac{\rho-1}{\tau}\right)^{\rho-1},$$

$$\nu(x)=e^{A_1\rho(x-1)^{\rho-1}}+\alpha(x), \quad |\alpha(x)|\le 1/2,$$

$$\mu(x)=(1+o(1))e^{A_1(x-1)^{\rho}}$$

і

$$M(x)=(1+o(1))\sqrt{2\pi\alpha(1-\tfrac{1}{\rho})}\,\mu(x)\nu(x)(\ln\nu)^{\frac{\rho-2}{2\rho-2}}\exp\left\{\frac{\alpha}{2}(1-\tfrac{1}{\rho})(1+o(1))(\ln\nu)^{\frac{\rho-2}{\rho-1}}\right\},$$

а також

$$M(x)=2(1+o(1))\sqrt{\pi B_1}\,\mu(x)\exp\left\{D_1(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-1}{\rho}}+B_1(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{\rho}}\right\}(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{2\rho}},$$

$$B_1=\frac{1}{2}A_1^{\frac{2}{\rho}}\rho(\rho-1), \quad D_1=\rho A_1^{1/\rho}.$$

Автор висловлює глибоку вдячність М.М.Шереметі за керівництво роботою.

УДК 517.5

Б.В.Винницький

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ РЯДАМИ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$

Нехай

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \qquad /1/$$

ціла функція, $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$. У багатьох працях /огляд