$$M(x) \le 2\sqrt{\pi B}\,\mu(x)\{\ln\mu(x)\}^{\frac{\rho-2}{2\rho}} \exp\{D(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-1}{\rho}} + B(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{\rho}}\}, \qquad /7/$$

де $D = (q^{1-\rho} A \rho^{2\rho-1}(\rho-1)^{2-\rho})^{1/\rho}$.

Приклад функції

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\tau(\ln n)^{\frac{1}{\rho-1}}-1} n^{z}, \ \rho > 1, \ \tau > 0, \qquad /8/$$

вказує на те, що оцінка /7/ з точністю до сталих B і D може досягатись.

Справді, для функції /8/ виконуються співвідношення

$$M(x) = (1+o(1))\sqrt{2\pi\rho(\rho-1)A_1}\, e^{A_1 x^{\rho}} x^{\frac{\rho-2}{2}}, \quad A_1 = \frac{1}{\rho^{\rho}}\left(\frac{\rho-1}{\tau}\right)^{\rho-1},$$

$$\nu(x) = e^{A_1\rho(x-1)^{\rho-1}} + \alpha(x), \quad |\alpha(x)| \le 1/2,$$

$$\mu(x) = (1+o(1))\, e^{A_1(x-1)^{\rho}}$$

і

$$M(x) = (1+o(1))\sqrt{2\pi\alpha(1-\tfrac{1}{\rho})}\,\mu(x)\nu(x)(\ln\nu)^{\frac{\rho-2}{2\rho-2}} \exp\left\{\frac{\alpha}{2}(1-\tfrac{1}{\rho})(1+o(1))(\ln\nu)^{\frac{\rho-2}{\rho-1}}\right\},$$

а також

$$M(x) = 2(1+o(1))\sqrt{\pi B_1}\,\mu(x)\exp\{D_1(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-1}{\rho}} + B_1(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{\rho}}\}(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{2\rho}},$$

$$B_1 = \frac{1}{2} A_1^{\frac{2}{\rho}} \rho(\rho-1), \quad D_1 = \rho A_1^{1/\rho}.$$

Автор висловлює глибоку вдячність М.М.Шереметі за керівництво роботою.

УДК 517.5

Б.В.Винницький

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ РЯДАМИ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$

Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \qquad /1/$$

ціла функція, $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. У багатьох працях /огляд див. у статті А.Ф.Леонтьев. Представление функций обобщенными рядами Дирихле. - *УМН*, 1969, 24, вып.2/Т46/). вивчалось питання про зображення функцій рядами

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z), \qquad /2/$$

де $\{\lambda_n\}$ - послідовність комплексних чисел таких, що $\lim \lambda_n=\infty$. А.Ф.Леонтьєв показав, коли $f(z)$ типу $\sigma<\infty$ порядку ρ , всі $a_n\neq 0$ і

$$\lim_{n\to\infty} n|a_n|^{\rho/n}>0,$$

то довільну цілу функцію $F(z)$ можна зобразити в усій площині рядом /2/. Ми доповнимо цей результат. Для цього введемо деякі позначення. Нехай $L(z)$ ціла функція, що має нескінченну множину нулів $\{\lambda_n\}$, причому всі вони прості. Позначимо через $A_f(q)$ клас цілих функцій $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ таких, що при деякому $q\in(0;\infty)$ виконується $|b_n|\leq|a_n|q^n$, $n=0,1,2,\ldots$. Очевидно, коли $F\in A_f(q)$, то функція

$$\gamma(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{a_n t^{n+1}}$$

аналітична в області $\{t:|t|>q\}$. Далі будемо говорити, що ряд /2/ збігається регулярно в усій площині, якщо при будь-якому $t\in[0;\infty)$ виконується $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|M_f(t|\lambda_n|)<\infty$.

<u>Теорема.</u> Нехай у ряді /1/ всі $a_n\neq 0$. Тоді для зображення кожної цілої функції $F\in A_f(q)$

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z),\quad d_n=\frac{1}{2\pi i L'(\lambda_n)}\int_{|t|=2q}\frac{L(t)}{t-\lambda_n}\gamma(t)\,dt, \qquad /3/$$

регулярно збіжним в усій площині, досить, щоб $L(z)$ задовольняла умови:

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} M_f(t|\lambda_n|)/|L'(\lambda_n)|<\infty$ при $t\in[0;\infty)$;

2/ при будь-якому $t\in C$ і $n\geq 0$ мало місце зображення $t^n=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^n L(t)/((t-\lambda_m)L'(\lambda_m))$.

<u>Доведення.</u> Оскільки $|L(t)/(t-\lambda_n)|\leq M_L(\rho+1)$ при $|t|\leq\rho$ і всіх $n\geq 1$, то внаслідок першої умови ряд /3/ збігається регулярно в усій площині.

далі, враховуючи першу і другу умови, при будь-яких $t \in C$ і $z \in C$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z)L(t)}{(t-\lambda_n)L'(\lambda_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(t)\lambda_n^k}{(t-\lambda_n)L'(\lambda_n)} \right) z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (tz)^k = f(tz),$$

внаслідок чого

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z)}{2\pi i L'(\lambda_n)} \int_{|t|=2q} \frac{L(t)}{t-\lambda_n} \gamma(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=2q} \gamma(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z)L(t)}{(t-\lambda_n)L'(\lambda_n)} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = F(z),$$

що завершує доведення теореми.

Зазначимо, що для будь-якої цілої функції $f(z)$ завжди можна підібрати цілу функцію $L(z)$ так, щоб виконувались перша і друга умови. Однак доведення цього не входить у мету нашого повідомлення.

УДК 517.518.6

Я.Г.Притула, І.С.Сютрик

УМОВИ НАЛЕЖНОСТІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМ КЛАСАМ ЛІПШИЦА І ЗІГМУНДА

Нехай $f: R \to C$ – рівномірна майже періодична /РМП/ функція з рядом Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x},$$

де $A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_k x} dx = M\{f(x)e^{-i\lambda_k x}\}$.

Нехай $\varphi: R_+ \to R$ – додатна і монотонно неспадна функція. Означимо класи майже періодичних функцій $Lip(\varphi)$, $Z(\varphi)$, $Lip(\varphi, p)$, $Z(\varphi, p)$. $/\varphi(0)=0/$

$$f \in Lip(\varphi) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \sup_{t>0x} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{\varphi(t)} < \infty,$$

$$f \in Z(\varphi) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \sup_{t>0x} \frac{|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|}{\varphi(t)} < \infty,$$