далі, враховуючи першу і другу умови, при будь-яких $t \in C$ і $z \in C$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z)L(t)}{(t-\lambda_n)L'(\lambda_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(t)\lambda_n^k}{(t-\lambda_n)L'(\lambda_n)} \right) z^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (tz)^k = f(tz),$$

внаслідок чого

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z)}{2\pi i L'(\lambda_n)} \int_{|t|=2q} \frac{L(t)}{t-\lambda_n} \gamma(t)dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=2q} \gamma(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z)L(t)}{(t-\lambda_n)L'(\lambda_n)} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = F(z),$$

що завершує доведення теореми.

Зазначимо, що для будь-якої цілої функції $f(z)$ завжди можна підібрати цілу функцію $L(z)$ так, щоб виконувались перша і друга умови. Однак доведення цього не входить у мету нашого повідомлення.

УДК 517.518.6

Я.Г.Притула, І.С.Сютрик

УМОВИ НАЛЕЖНОСТІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМ КЛАСАМ ЛІПШИЦА І ЗІГМУНДА

Нехай $f: R \to C$ – рівномірна майже періодична /РМП/ функція з рядом Фур"є

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x},$$

де $$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_k x} dx = M\{f(x)e^{-i\lambda_k x}\}.$$

Нехай $\varphi: R_+ \to R$ – додатна і монотонно неспадна функція. Означимо класи майже періодичних функцій $Lip(\varphi)$, $Z(\varphi)$, $Lip(\varphi, p)$, $Z(\varphi, p)$. $/\varphi(0)=0/$

$$f \in Lip(\varphi) \overset{df}{\iff} \sup_{t>0\,x} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{\varphi(t)} < \infty,$$

$$f \in Z(\varphi) \overset{df}{\iff} \sup_{t>0\,x} \frac{|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|}{\varphi(t)} < \infty,$$

$$f \in Lip(\varphi; p) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \sup_{t>0} \left[M\left\{ \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} \right|^p \right\} \right]^{1/p} < \infty,$$

$$f \in Z(\varphi, p) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$$

$$\sup_{t>0} \left[M\left\{ \left| \frac{f(x+t)-2f(x)+f(x+t)}{\varphi(t)} \right|^p \right\} \right]^{1/p} < \infty$$

Будемо вважати, що функція φ задовольняє умови

$$\int_0^t [\varphi(u)]^s u^{-1} du \le A[\varphi(t)]^s, \qquad /I/$$

$$\int_t^1 [\varphi(u)]^l u^{-r} du \le B[\varphi(t)]^l t^{1-r} \qquad /2/$$

при деяких A і B. Значення s, l, r дальше будуть уточнюватись.

Теорема I. Для того щоб РМП функція, коефіцієнти Фур"є якої задовольняють умову

$$\sup_{n,k\in Z} |\arg A_n - \arg A_k| = \beta < \pi, \qquad /3/$$

належала класу $Z(\varphi)$, де φ задовольняє умову /I/ при S =I і /2/ при l=I, r =3, необхідно і достатньо, щоб

$$\exists D \, \forall n \sum_{1/n \le |\lambda_k| < n} |A_k| \le D\varphi(1/n). \qquad /4/$$

Доведення необхідності. З умови /3/ випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ ([1]), тому можемо записати

$$|f(t)-2f(0)+f(-t)| = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k(1-\cos\lambda_k t)\right| =$$

$$= 4\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin^2 \frac{\lambda_k t}{2}\right|.$$

Враховуючи умову /3/, запишемо

$$|f(t)-2f(0)+f(-t)| > C_1 \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k t}{2} \ge$$

$$\ge C_1 \sum_{1/2t \le |\lambda_k| < 1/t} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k t}{2} \ge C_2 \sum_{1/2t \le |\lambda_k| < 1/t} |A_k|.$$

Якщо приймемо $t = 1/n$ і врахуємо, що $f \in Z(\varphi)$, то одержимо умову /4/.

Доведення достатності.

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)| = 4|\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} e^{i\lambda_k x}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} \leq$$

$$\leq 4 \left[\sum_{|\lambda_k|<1} |A_k| \frac{h^2}{2} + \sum_{|\lambda_k|\geq 1} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} \right].$$

Не зменшуючи загальності можемо вважати, що існує C_3, при якому $t^2 < C_3 \varphi(t)$. У протилежному випадку простір, який ми розглядаємо, містить лише тотожно сталі функції. Тому існує D_1, що

$$\sum_{|\lambda_k|<1} |A_k| h^2 \leq D_1 \varphi(h). \qquad /5/$$

Виберемо N натуральне таке, що $2^N \leq 1/h < 2^{N+1}$. Тоді

$$\sum_{|\lambda_k|\geq 1} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} = \sum_{1\leq|\lambda_k|<2^N} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} +$$

$$+ \sum_{|\lambda_k|\geq 2^N} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} \leq$$

$$\leq D_2 \left[h^2 \sum_{1\leq|\lambda_k|<2^N} |A_k| \lambda_k^2 + \sum_{|\lambda_k|\geq 2^N} |A_k| \right] \leq$$

$$\leq D_3 \left[h^2 \sum_{\nu=0}^{N-1} 2^{2\nu+2} \sum_{2^\nu\leq|\lambda_k|<2^{\nu+1}} |A_k| + \sum_{\nu=N}^{\infty} \sum_{2^\nu\leq|\lambda_k|<2^{\nu+1}} |A_k| \right] \leq$$

$$\leq D_4 \left[h^2 \sum_{\nu=0}^{N-1} 2^{2\nu+2} \varphi(1/2^{\nu+1}) + \sum_{\nu=N}^{\infty} \varphi(1/2^{\nu+2}) \right] \leq$$

$$\leq D_5 \left[h^2 \int_h^1 \varphi(u) u^{-3} du + \int_0^h \varphi(u) u^{-1} du \right] \leq$$

$$\leq D_6 \varphi(h).$$

Звідси і з /5/ отримуємо, що $f \in Z(\varphi)$.

Теорема 2. Якщо коефіцієнти РМП функції f задовольняють умови /3/ і /4/, де функція φ задовольняє умови /1/ при s =І і /2/ при l =І, r =2, то $f \in Lip(\varphi)$

Теорема 3. Якщо РМП функція належить до класу $Z(\varphi, p)$ при $1<p\leq 2$, то її коефіцієнти Фур"є задовольняють умову

$$\Big(\sum_{n/2\leq|\lambda_k|<n}|A_k|^q\Big)^{1/q}\leq D\varphi(1/n),\quad 1/p+1/q=1.$$

Теорема 4. Нехай РМП функція f, коефіцієнти Фур"є якої задовольняють умову $|\lambda_k|\to\infty$ і

$$\exists D\forall n\ \Big(\sum_{n/2\leq|\lambda_k|<n}|A_k|^p\Big)^{1/p}\leq D\varphi(1/n).$$

Тоді

I/ $f\in Lip(\varphi, q)$ при $q\geq 2$, якщо φ задовольняє умови /I/ при $s=p$ і /2/ при $l=p$, $\tau=p+1$;

2/ $f\in Z(\varphi, q)$ при $q\geq 2$, якщо $q\geq 2$ задовольняє умови /I/ при $s=p$ і /2/ при $l=p$, $\tau=2p+1$.

Доведення теорем 2...4 проводиться так само, як і теореми I.

Відзначимо один наслідок: умова

$$\exists D\forall n\ \Big(\sum_{n/2\leq|\lambda_k|<n}|A_k|^2\Big)^{1/2}\leq D\varphi(1/n)$$

є необхідною і достатньою для того, щоб

I/ $f\in Lip(\varphi, 2)$, якщо φ задовольняє умовам /I/ при $s=2$ і /2/ при $l=2$, $\tau=3$

або

2/ $f\in Z(\varphi, 2)$, якщо φ задовольняє умовам /I/ при $s=2$ і /2/ при $l=2$, $\tau=5$.

Для випадку періодичної функції отримані результати частково перетинаються з результатами роботи [3]. Деякі достатні умови належності майже періодичних функцій до класів Ліпшіца та Зігмунда у випадку, коли функція $\varphi(t)=t^{\alpha}$, розглядались у роботі [2].

Список літератури: 1. Притула Я.Г. Про абсолютну збіжність рядів Фур"є майже періодичних функцій Бора. – ДАН УРСР, сер. А, 1967, № 4. 2. Притула Я.Г. Некоторые вопросы абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций одной и двух переменных. Автореф. дис. канд. физ-мат. наук. Львов,

1970. 3. Masako and Shin-ichi Izumi Lipschitz classes and Fourier coefficients. - J. of Math. and Mech., 1969, 18, №9.

УДК 539.3

Д.Г.Хлєбніков, О.М.Паращак

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ЗГИН КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ ГЛАДКИМ ШТАМПОМ

Задача про дію штампа на пластинку в рамках класичної теорії Кірхгофа розв"язана Л.А.Галіним [3]. У роботах [7,8] дається розв"язок осесиметричної задачі згину пластинок жорстким штампом, що базується на врахуванні деформацій поперечного зсуву в пластинці. Всі ці розв"язки, однак, приводять до ряду фізичних невідповідностей.

Операторним методом ми одержуємо розв"язок, що не має цих недоліків і добре узгоджується з розв"язком [2], знайденим на основі тривимірної теорії пружності. Наближений розв"язок задачі іншим шляхом одержано у роботі [9].

Нехай на шарнірно оперту по краю $r = c$ круглу плиту товщини $2h$ діє з силою P центрально прикладений гладкий штамп, основа якого описується рівнянням $z = f(r) + h$. Контакт штампа з пластинкою відбувається по кругу $|r| \le b$. Умова контакту має вигляд $w(r,h) =$

$$= f(r) - h\delta \qquad \text{при} \qquad |r| \le b, \qquad /1/$$

де $w(r,h)$ – вертикальне переміщення поверхні контакту $z = h$; δ – безрозмірна осадка штампа.

Використовуючи розв"язок А.І.Лур'є [5] для нескінченного шару, маємо

$$w(r,h) = (1-\nu)\left[(1+\cos 2h\sqrt{\Delta})\psi + (1-\cos 2h\sqrt{\Delta})\chi\right], \qquad /2/$$

де $\Delta = \Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$; ν – коефіцієнт Пуассона; χ, ψ – функції напружень у задачах стиску та згину шару, які задовольняють