1970, 3. Masako and Shin-ichi Izumi Lipschitz classes and Fourier coefficients. - J. of Math. and Mech., 1969, 18, №9.

УДК 539.3

Д.Г.Хлєбніков, О.М.Паращак

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ЗГИН КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ ГЛАДКИМ ШТАМПОМ

Задача про дію штампа на пластинку в рамках класичної теорії Кірхгофа розв"язана Л.А.Галіним [3]. У роботах [7,8] дається розв"язок осесиметричної задачі згину пластинок жорстким штампом, що базується на врахуванні деформацій поперечного зсуву в пластинці. Всі ці розв"язки, однак, приводять до ряду фізичних невідповідностей.

Операторним методом ми одержуємо розв"язок, що не має цих недоліків і добре узгоджується з розв"язком [2], знайденим на основі тривимірної теорії пружності. Наближений розв"язок задачі іншим шляхом одержано у роботі [9].

Нехай на шарнірно оперту по краю $r = c$ круглу плиту товщини $2h$ діє з силою P центрально прикладений гладкий штамп, основа якого описується рівнянням $z = f(r) + h$. Контакт штампа з пластинкою відбувається по кругу $|r| \leq b$. Умова контакту має вигляд $w(r,h) =$

$$= f(r) - h\delta \quad \text{при} \quad |r| \leq b, \qquad /1/$$

де $w(r,h)$ – вертикальне переміщення поверхні контакту $z = h$; δ – безрозмірна осадка штампа.

Використовуючи розв"язок А.І.Лур'є [5] для нескінченного шару, маємо

$$w(r,h) = (1-\nu)\left[(1+\cos 2h\sqrt{\Delta})\psi + (1-\cos 2h\sqrt{\Delta})\chi\right], \qquad /2/$$

де $\Delta = \Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$; ν – коефіцієнт Пуассона; χ, ψ – функції напружень у задачах стиску та згину шару, які задовольняють рівняння

$$F_A \Delta \chi = q/(4Gh), \quad F_B \Delta \psi = q/(4Gh). \qquad /3/$$

Тут q – контактний риск, G – модуль зсуву, а

$$F_A = 1 + \frac{\sin 2h\sqrt{\Delta}}{2h\sqrt{\Delta}}; \quad F_B = 1 - \frac{\sin 2h\sqrt{\Delta}}{2h\sqrt{\Delta}}.$$

Оскільки оператори F_A і F_B є цілими функціями лапласіана Δ, то існують [I] праві обернені оператори F_A^{-1}, F_B^{-1}. Їх розклади в ряд по степенях Δ наведено у роботі [6,с.490]. Тому з умови /I/ для визначення контактного тиску q одержується диференціальне рівняння нескінченно високого порядку

$$\frac{1-\nu}{4Gh}\left[(1+\cos 2h\sqrt{\Delta})\Delta^{-1}F_B^{-1} + (1-\cos 2h\sqrt{\Delta})\Delta^{-1}F_A^{-1}\right]q = f(t) - h\delta. \qquad /4/$$

Якщо у рівнянні /4/ утримати члени до h^4, то після дворазового застосування оператора Δ прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{D}\left(1 - \frac{4}{5}h^2\Delta + \frac{256}{525}h^4\Delta^2\right)q = \Delta^2 f(t), \qquad /5/$$

де D – циліндрична жорсткість.

Зауважимо, що утримання у /4/ лише членів, не залежних від h, приводить до співвідношень теорії Кірхгофа, а утримання членів до h^2 відповідає прикладним теоріям, які враховують лише деформації поперечного зсуву.

Розв"язок рівняння /5/ після переходу до безрозмірних величин з урахуванням обмеженості напружень при $t = 0$ записуємо [4]

$$q(t) = \frac{P}{\pi b^2}\bar{q}(\rho) = \frac{P}{\pi b^2}\left[A_1 \tilde{u}_0(\rho) + A_2 \tilde{v}_0(\rho) + q_*(\rho)\right], \qquad /6/$$

де $q_*(\rho)$ – частинний розв"язок /5/, що має вигляд

$$q_*(\rho) = \frac{\pi^2 b^2 D}{2P\sin 2\varphi}\int_0^{\rho}\Delta^2 f(a_0 ht)t\left[\tilde{u}_0(t)\tilde{f}_0(\rho) - \tilde{v}_0(t)\tilde{g}_0(\rho) - \tilde{f}_0(t)\tilde{u}_0(\rho) + \tilde{g}_0(t)\tilde{v}_0(\rho)\right]dt; \qquad /7/$$

а

$$\rho = \frac{r}{a_0 h}\ ;\quad a_0 = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt[4]{21}}\ ;\quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{13}{21}}\ ; \qquad /8/$$
$$\tilde{u}_0(\rho) + i\,\tilde{v}_0(\rho) = J_0(\rho e^{i\varphi});\ \tilde{f}_0(\rho) + i\tilde{g}_0(\rho) = H_0^{(1)}(\rho e^{i\varphi});$$

$J_0, H_0^{(1)}$ – функції Бесселя та Ханкеля першого ряду.

Після визначення контактного тиску q функції ψ та χ знаходимо з рівнянь /3/, які з прийнятою точністю можна записати у вигляді

$$\Delta\Delta\psi = g_1(r),\quad \Delta\chi = g_2(r), \qquad /9/$$

де

$$g_1(r) = \frac{1}{2D(1-\nu)}\left(1 + \frac{1}{5}h^2\Delta + \frac{11}{525}h^4\Delta^2\right)q\ ; \qquad /10/$$
$$g_2(r) = \frac{h^2}{6D(1-\nu)}\left(1 + \frac{1}{3}h^2\Delta\right)q\ .$$

Розв"язок рівнянь /9/, обмежений при $\rho = 0$ у безрозмірних координатах має вигляд

$$\psi(\rho) = B_0 h + Bh\rho^2 - \frac{a_0^4 h^4}{4}\int_0^\rho \alpha(\rho, t)\, g_1(a_0 h t)\,dt,$$
$$\chi(\rho) = C_0 h + \int_0^\rho t\ln\frac{\rho}{t}\, g_2(a_0 h t)\,dt, \qquad /11/$$

де

$$\alpha(\rho, t) = t^3\left[\ln\frac{t}{\rho} - 1 + \left(\frac{\rho}{t}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{t}\right)^2\ln\frac{t}{\rho}\right]. \qquad /12/$$

Для визначення сталих A_1, A_2, B_0, B та осадки δ, крім граничних умов та умови рівноваги штампа

$$[\tilde{u}_0'(\beta)\cos 2\varphi + \tilde{v}_0'(\beta)\sin 2\varphi]\,A_1 +$$
$$+ [\tilde{v}_0'(\beta)\cos 2\varphi - \tilde{u}_0'(\beta)\sin 2\varphi]\,A_2 = \frac{\beta}{2} + K,\ \left(\beta = \frac{\beta}{a_0 h},\ K = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta \rho q_*(\rho)\,d\rho\right), \qquad (13)$$

використовуємо рівності, що забезпечують повне виконання умови /1/ у зоні контакту. Для їх одержання підставимо функції /11/ з врахуванням /10/ у /2/ і далі в /1/. Після перетворень з утриманням членів відповідного порядку та використанням тотожностей

$$\Delta_\rho \int_0^\rho \alpha(\rho,t) g(t)\,dt = \int_0^\rho \alpha(\rho,t)\,\Delta_t g(t)\,dt - \rho^2 g(0),$$

$$\Delta_\rho \Delta_\rho \int_0^\rho \alpha(\rho,t) g(t)\,dt = \int_0^\rho \alpha(\rho,t)\,\Delta_t \Delta_t g(t)\,dt - 4g(0) - \rho^2 \Delta g(0)$$

одержимо, що підінтегральний вираз внаслідок /5/ дорівнює нулеві, а порівняння коефіцієнтів при ρ^2 і ρ^0 дає

$$8(1-\nu)B - \frac{\varkappa}{\pi a_0^2 \beta^2}\left[\left(a_0^2 + \frac{7}{15}\cos 2\varphi\right)A_1 + \frac{7}{15}A_2 \sin 2\varphi\right] = \frac{\Delta_\rho f(0)}{h}, \qquad /14/$$

$$2(1-\nu)B_0 - \frac{8(1-\nu)}{a_0^2}B + \frac{2}{3}\frac{\varkappa}{\pi a_0^2 \beta^2}A_1 + \delta = \frac{f(0)}{h}; \qquad /15/$$

причому $\varkappa = Ph/D$.

Умова рівності нулеві згинних моментів при $t = c$ на основі формул А.І.Лур"є [5] має вигляд

$$\frac{16\pi\beta^2(1-\nu^2)}{a_0^2}\,\frac{B}{\varkappa} = \int_0^\beta t\left[\left(\frac{t^2}{\gamma^2} - 1\right)(1-\nu) + 2(1+\nu)\ln\frac{t}{\gamma} + \frac{2}{5}\frac{\nu}{a_0^2\gamma^2}\right]\bar{q}(t)\,dt +$$
$$+ \frac{2(1+\nu)}{5a_0^2}\bar{q}(0) + \frac{11(1+\nu)}{128}\Delta\bar{q}(0), \qquad /16/$$

де $\gamma = \frac{c}{a_0 h}$.

Умову опирання пластинки $w(c,-h) = 0$ записуємо

$$\frac{B_0}{\varkappa} + \left(\gamma^2 - \frac{4}{a_0^2}\right)\frac{B}{\varkappa} = \frac{a_0^2}{8\pi(1-\nu)\beta^2}\left[\int_0^\beta \left(\alpha(\gamma,t) - \frac{16}{5a_0^2}t\ln\frac{t}{\gamma}\right)\bar{q}(t)\,dt +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\gamma^2}{5a_0^2} - \frac{47}{32}\right)\bar{q}(0) + \frac{11}{256}\gamma^2\Delta\bar{q}(0)\right]. \qquad /17/$$

Якщо радіус області контакту b відомий /наприклад, для штампа з плоскою основою/, то з рівнянь /13/, /14/, /16/ визначаємо сталі A_1, A_2, B. Сталу B_0 знаходимо з умови /17/, а δ з /15/.

Коли область контакту наперед невідома, то для її визначення використовуємо умову рівності нулеві контактного тиску при $t = b$

$$A_1 \bar{u}_0(\beta) + A_2 \bar{v}_0(\beta) + q_*(\beta) = 0. \qquad /18/$$

У цьому випадку зручно, задаючись β, з рівнянь /13/ та /18/ знайти

$$A_1 = \frac{1}{\Delta(\beta)}\left[\frac{1}{2}k\bar{v}_0(\beta) + \left(\bar{v}_0'(\beta)\cos 2\varphi - \bar{u}_0'(\beta)\sin 2\varphi\right)q_*(\beta)\right],$$

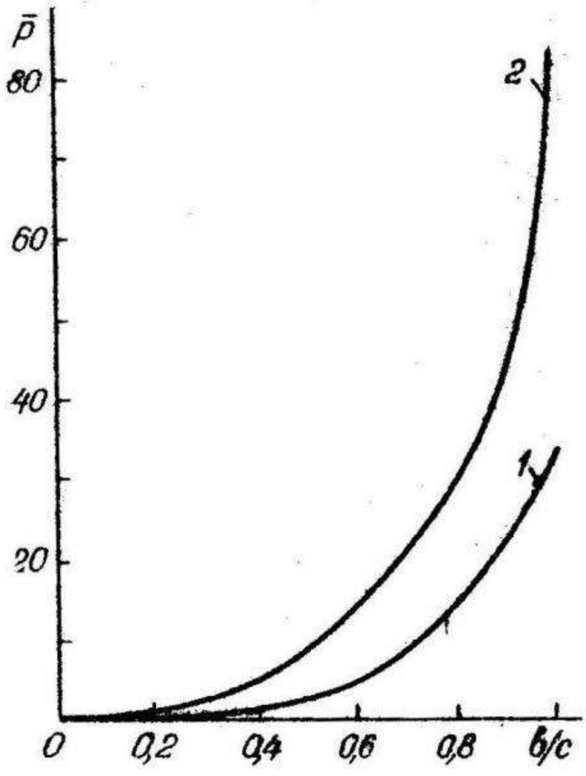

Рис.I.

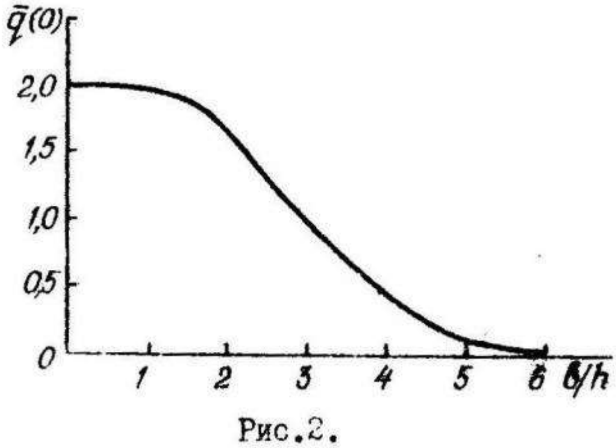

Рис.2.

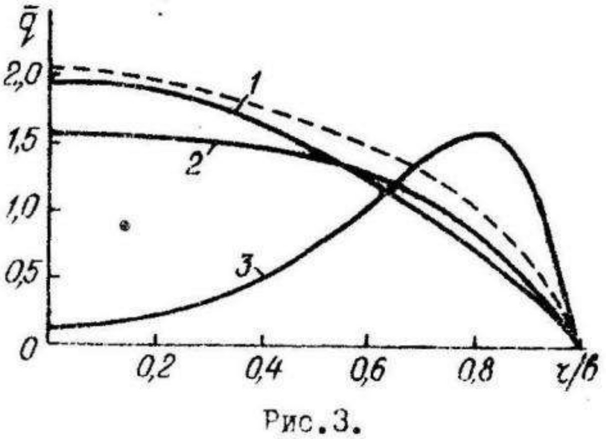

Рис.3.

$$A_2 = \frac{1}{\Delta(\beta)}\left[\left(\frac{\beta}{2} + K\right)\bar{U}_o(\beta) + \left(U_o'(\beta)\cos 2\varphi + \bar{v}_o'(\beta)\sin 2\varphi\right) q_*(\beta)\right] \qquad /19/$$

$$\Delta(\beta) = \bar{v}_o(\beta)\left[\bar{U}_o'(\beta)\cos 2\varphi + \bar{v}_o'(\beta)\sin 2\varphi\right] + \bar{U}_o(\beta)\left[\bar{U}_o'(\beta)\sin 2\varphi + \bar{v}_o'(\beta)\cos 2\varphi\right].$$

Тепер з рівняння /16/ визначаємо $B/\varkappa$, а /14/ використовуємо для знаходження безрозмірного зусилля $\varkappa$, що відповідає даному β. Сталі B_o і δ дістаємо, як і раніш, з рівнянь /17/ і /15/.

Числові результати для штампа, у якого $f(r) = r^2/(2R)$ показані на рис.1–3. На рис. 1 зображено залежність між безрозмірною силою $\bar{P} = PR/(a_o^2 D)$ та відносним радіусом зони контакту b/c. Криві 1,2 побудовано відповідно для c/h =2 та c/h =3,33.

На рис.2. показано розподіл контактного тиску під штампом при b/h =0,6; 2; 5; /криві 1–3/. Штрихова лінія відповідає розв"язку [2] при b/h =0,6 c/h =10.

Рис.3 ілюструє залежність тиску в центрі зони контакту від параметра b/h. При збільшенні цього параметра відбувається перерозподіл контактного тиску під штампом – максимум тиску зсувається до краю зони контакта, а тиск в центрі падає. При $b/h \geq$ 6,131 відбувається відрив центральної частини штампа від пластинки.

С п и с о к л і т е р а т у р и: 1. А г а р е в В.А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости К., Изд-во АН УССР, 1963. 2. В о р о в и ч И.И., К о п а с е н к о В.В. Контактная задача для оснований, работающих в условиях изгиба.- В кн.: Труды IУ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Ереван, 1964. 3. Г а л и н Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.,Гостехиздат, 1953. 4. К о р е н е в Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., Наука, 1971. 5. Л у р ь е А.И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955. 6. Л у р ь е А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970.

7. П е л е х Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., Наукова думка, 1973. 8. Р о з е н б е р г Л.А. О давлении твердого тела на пластинку. – Инженерный сборник, 1955, т.21.
9. Ш в а б ю к В.И., М у р з а в е ц к и й П.Т. Контактная задача для трансверсально изотропных балок и плит с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. – Строительная механика и расчет сооружений, 1977, вып.9.

УДК 517.512

М.Й.Михалюк

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ОБМЕЖЕНУ ДРУГУ ВАРІАЦІЮ

Означення. Нехай на проміжку $[a,b]$ визначена функція $f(x)$. Функцію $f(x)$ назвемо функцією з обмеженою другою варіацією, якщо суми

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta^2\left(f,\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_k)+f(x_{k+1})-2f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|$$

залишаються обмеженими при будь-якому розбитті $[a,b]$ точками

$$x_k,\ k=0,1,\dots n,\quad x_0=a,\ x_n=b.$$

Користуючись елементарними міркуваннями й обчисленнями, не важко показати, що є такі леми:

Лема 1. Якщо $f(x)$ має обмежену другу варіацію на проміжку $[a,b]$, то майже всюди існує співвідношення

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{\Delta^2(f,x)}{h}\right|=\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}\right|<\infty.$$

Лема 2. Нехай для функції $f(x)$, визначеній на $[a,b]$, виконується умова

$$\lim_{d(\Pi)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x_i)+f(x_i+1)-2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|=0,$$

де $$d(\Pi)=\max_i|x_{i+1}-x_i|.$$