2/ існує

$$\lim_{d(R)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\Delta^2\left(f, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right|,$$

де $d(R) = \max_i |x_i - x_{i+1}|$.

Тоді множина

$$\tilde{A} = \left\{x \in [a,b], \exists \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2(f,x)}{h}\right\}$$

є повної міри, тобто $m\tilde{A} = b-a$.

Список літератури: I. Песін І.М. Вимірність майже всюди симетрично-неперервних функцій. – Доповіді та повідомлення Львів. держ. ун-ту, 1961, ч.2, вип.9. 2. Пономарьов С.П. Про деякі питання симетричної неперервності і симетричної диференційованості. Автореф.дис. ... канд.фіз.-мат.наук. Львів, 1966.

УДК 517.913

Ю.В.Жерновий, В.Г.Костенко

ЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ П"ЯТОГО ПОРЯДКУ, ІНТЕГРОВАНІ У ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Мета нашої роботи полягає в тому, щоб з усіх лінійних звичайних диференціальних рівнянь п"ятого порядку виділити сукупність тих, фундаментальну систему розв"язків яких можна знайти у замкнутій формі і дати їх схему визначення.

Відомо [2] , що рівняння

$$y^{(V)} + A(x)y''' + B(x)y'' + C(x)y' + D(x)y = 0 \qquad /1/$$

може бути інваріантним лише відносно групи перетворень з операторами виду

$$X_1 = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + 2\xi'(x)y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad /2/$$

$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial y},$$

а коефіцієнти рівняння /I/ при цьому повинні визначатися співвідношеннями

$$A(x)=\xi^{-2}(x)\left[c_1-10\xi''(x)\xi(x)+5\xi'^2(x)\right],\quad B(x)=c_2\xi^{-3}(x)+1{,}5A'(x),$$
$$C(x)=\left(c_3-3c_2\xi'(x)\right)\xi^{-4}(x)+0{,}9A''(x)+\left(0{,}4A(x)\right)^2,$$
$$D(x)=\left[c_4-2c_3\xi'(x)+2c_2\left(2\xi'^2(x)-\xi''(x)\xi(x)\right)\right]\xi^{-5}(x)+0{,}2A'''(x)+0{,}16A(x)A'(x), \qquad /3/$$

де $\xi(x)$ – довільна достатньо гладка функція; c_1, c_2, c_3, c_4 – довільні сталі.

Зауважимо, що виділена сукупність рівнянь /I/ з умовами /3/ містить лінійні рівняння п"ятого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо $\xi(x)=const$, і рівняння Ейлера, якщо $\xi(x)=x$.

Рівняння /I/ з умовами /3/ у канонічних змінних

$$\varphi=\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt,\qquad \chi=\ln\frac{y}{\xi^2(x)} \qquad /4/$$

групи перетворень /2/ набере вигляду

$$\chi^{(V)}+5\chi'\chi^{(IV)}+10\left(\chi''\chi'''+\chi'^2\chi'''+\chi'^3\chi''\right)+15\chi'\chi''^2+$$
$$+c_1\left(\chi'''+3\chi'\chi''+\chi'^3\right)+c_2\left(\chi''+\chi'^2\right)+\chi'^5+c_3\chi'+c_4=0.$$

Провівши в останньому послідовно заміну

$$\frac{d\chi}{d\varphi}=u(\varphi),\quad \frac{du}{d\varphi}=p(u),$$

матимемо

$$p^3p'''+4p^2p'p''+5up^2p''+pp'^3+5upp'^2+10p\left(pp'+upp'+u^2\right)+$$
$$+15up^2+c_1\left(pp'+3up+u^3\right)+c_2\left(p+u^2\right)+u^5+c_3u+c_4=0. \qquad /I'/$$

Шукаючи розв"язок рівняння /I'/ у вигляді $p(u)=\alpha u^2+\beta u+\gamma$, одержимо для визначення α, β, γ систему алгебраїчних рівнянь

$$24\alpha^4+50\alpha^3+35\alpha^2+10\alpha+1=0,\quad \left(6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1\right)\beta=0,$$
$$50\alpha^2\beta^2+40\alpha^3\gamma+75\alpha\beta^2+80\alpha^2\gamma+50\alpha\gamma+10\gamma+25\beta^2+2c_1\alpha^2+3c_1\alpha+c_1=0, \qquad /5/$$
$$60\alpha^2\beta\gamma+15\alpha\beta^3+100\alpha\beta\gamma+15\beta^3+40\beta\gamma+3c_1\alpha\beta+3c_1\beta+c_2\alpha+c_2=0,$$

$$16\alpha^2\gamma^2+22\alpha\beta^2\gamma+\beta^4+30\alpha\gamma^2+25\beta^2\gamma+15\gamma^2+2c_1\alpha\gamma+c_1\beta^2+3c_1\gamma+c_2\beta+c_3=0;$$

$$8\alpha\beta\gamma^2+\beta^3\gamma+10\beta\gamma^2+c_1\beta\gamma+c_2\gamma+c_4=0.$$

Із перших двох рівнянь цієї системи випливає, що α може набувати значення: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ при довільних β і $-\frac{1}{4}$ при $\beta=0$. У зв"язку з цим система /5/ розпадається на три системи для визначення β і γ при $\alpha=-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ і на чотири системи для знаходження γ при $\alpha=-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ $і$ $\beta=0$.

Розв"язуючи кожну із цих систем і повертаючись до змінних x, y одержуємо в кожному випадку

$$y(x,x_0)=z^2(x)\exp\chi(\varphi(x,x_0)). \qquad /6/$$

У зображення функції $\chi(\varphi(x,x_0))$ входить певна кількість довільних сталих інтегрування, коефіцієнти при яких у /6/ дають, принаймні, два лінійно незалежних розв"язки рівняння /I/ з умовами /3/. Понижуючи порядок рівняння /I/ за допомогою цих розв"язків, одержимо лінійне рівняння не вище третього порядку, яке інтегрується у замкнутій формі [I]. Легко переконатись, що визначена таким чином сукупність п"яти розв"язків рівняння /I/ з умовами /3/ утворює фундаментальну систему розв"язків.

Залежно від співвідношень між сталими c_1, c_2, c_3, c_4, що входять в умови /3/, а також між коренями допоміжних алгебраїчних рівнянь, які виникають як наслідки системи /5/, одержано тридцять два різні випадки і їм відповідні фундаментальні системи розв"язків рівняння /I/ з умовами /3/.

Наприклад, якщо $\alpha=-1$, $\beta=0$, $c_4+c_2^2c_3-c_1c_2c_4=0$, $-\frac{c_4}{c_3}=a^2>0$ і корені $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ рівняння $\delta^3+(c_1+a^2)\delta-c_2=0$ задовольняють нерівність $\delta_2\delta_3-\frac{1}{4}\delta_1^2=\tilde{a}^2>0$, то фундаментальна система розв"язків відповідного рівняння /I/ з умовами /3/ має вигляд

$$y_1(x,x_0)=\zeta^2(x)\exp\left[a\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_2(x,x_0)=\zeta^2(x)\exp\left[-a\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_3(x,x_0)=\zeta^2(x)\cos\left[\tilde{a}\varphi(x,x_0)\right]\exp\left[\tfrac{1}{2}\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_4(x,x_0)=\zeta^2(x)\sin\left[\tilde{a}\varphi(x,x_0)\right]\exp\left[\tfrac{1}{2}\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_5(x,x_0)=\zeta^2(x)\exp\left[-\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$

це $\varphi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\zeta^{-1}(t)\,dt.$

Список літератури: 1. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка.- Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. Lie Sophus. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.913

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=f(x,y,y',y'',y''')$$

розглянемо задачу Коші у вигляді

$$y^{(IV)}+A(x)y''+A'(x)y'+C(x)y=(A(x)-p_1(x))y''+(A'(x)-p_2(x))y'+ \\ +(C(x)-p_3(x))y+f(x,y,y',y'',y'''), \qquad /1/$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ y'''(x_0)=y_0''', \qquad /2/$$

це $A(x)=\zeta^{-2}(x)(\mu-5\zeta''(x)\zeta(x)+\frac{5}{2}\zeta'^2(x))$; $C(x)=(0{,}3\mu)^2\zeta^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+(0{,}3A(x))^2$.

Нехай функції $p_1''(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ і $\zeta^{(IV)}(x)$ неперервні на інтервалі $x_0\le x<\infty$, $f(x,y,y',y'',y''')$ – неперервна в області D $(x_0\le x<\infty$, $|y|,|y'|,|y''|\,|y'''|\le m)$ і μ – довільний додатний параметр. За цих умов задача /1/, /2/ методом варіації довільних сталих і