$$y_1(x,x_0)=\xi^2(x)\exp\left[a\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_2(x,x_0)=\xi^2(x)\exp\left[-a\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_3(x,x_0)=\xi^2(x)\cos\left[\tilde{a}\varphi(x,x_0)\right]\exp\left[\tfrac{1}{2}\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_4(x,x_0)=\xi^2(x)\sin\left[\tilde{a}\varphi(x,x_0)\right]\exp\left[\tfrac{1}{2}\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_5(x,x_0)=\xi^2(x)\exp\left[-\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$

де $\varphi(x,x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt.$

<u>Список літератури</u>: 1. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка.- Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. Lie Sophus. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.913

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=f(x,y,y',y'',y''')$$

розглянемо задачу Коші у вигляді

$$y^{(IV)}+A(x)y''+A'(x)y'+C(x)y=(A(x)-p_1(x))y''+(A'(x)-p_2(x))y'+ \qquad /1/$$
$$+(C(x)-p_3(x))y+f(x,y,y',y'',y'''),$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ y'''(x_0)=y_0''', \qquad /2/$$

де $A(x)=\xi^{-2}(x)(\mu-5\xi''(x)\xi(x)+\frac{5}{2}\xi'^2(x))$; $C(x)=(0{,}3\mu)^2\xi^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+(0{,}3A(x))^2$.

Нехай функції $p_1''(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ і $\xi^{(IV)}(x)$ неперерві на інтервалі $x_0\le x<\infty$, $f(x,y,y',y'',y''')$ – неперервна в області D $(x_0\le x<\infty$, $|y|,|y'|,|y''|\,|y'''|\le m)$ і μ – довільний додатний параметр. За цих умов задача /1/, /2/ методом варіації довільних сталих і наступним інтегруванням частинами зведена до інтегро-диференціального рівняння [1]

$$y(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\Big\{C_1\cos a\varphi(x,x_0)+C_2\sin a\varphi(x,x_0)+C_3\cos^3 a\varphi(x,x_0)+$$
$$+C_4\sin^3 a\varphi(x,x_0)+\int_{x_0}^{x}\xi^{-\frac{1}{2}}(t)\big[\mathcal{P}_1(t)\cos a\varphi(x,t)+\mathcal{P}_2(t)\sin a\varphi(x,t)+\mathcal{P}_1(t)\cos^3 a\varphi(x,t)+ \qquad /3/$$
$$+\mathcal{P}_3(t)\sin^3 a\varphi(x,t)\big]y(t,x_0)dt+\frac{1}{6a^3}\int_{x_0}^{x}\xi^{\frac{3}{2}}(t)\sin^3 a\varphi(x,t)f(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))dt\Big\},$$

де

$$\mathcal{P}_1(x)=\frac{1}{a^2}\Big[\xi'(x)(A(x)-p_1(x))+\xi(x)\Big(\frac{A'(x)+p_2(x)}{2}-p_1'(x)\Big)\Big];\ \mathcal{P}_2(x)=\frac{1}{a}(A(x)-p_1(x));$$
$$\mathcal{P}_3(x)=\frac{1}{6a^3}\Big[\Big(\frac{3}{2}\xi''(x)\xi(x)+\frac{3}{4}\xi'^2(x)-9a^2\Big)(A(x)-p_1(x))+3\xi'(x)\xi(x)\Big(\frac{A'(x)+p_2(x)}{2}-p_1'(x)\Big)+$$
$$+\xi^2(x)\big(C(x)+p_2'(x)-p_3(x)-p_1''(x)\big)\Big];$$

$a=(0,1\mu)^{\frac{1}{2}}$; $\varphi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)dt$; C_1, C_2, C_3, C_4 залежать лише від y_0, y_0', y_0'', y_0''', $\xi(x_0)$, $\xi'(x_0)$, $\xi''(x_0)$, $\xi'''(x_0)$, $p_1(x_0)$ і $p_1'(x_0)$.

Якщо в $\mathcal{D}$

$$|f(x,y,y',y'',y''')|\le r(x)y^{\alpha},\quad r(x)>0, \qquad /4/$$

то для всіх розв"язків задачі /1/, /2/ із /3/ випливає нерівність

$$|y(x,x_0)\xi^{-\frac{3}{2}}(x)|\le C+\int_{x_0}^{x}(\kappa_1(t)|y(t,x_0)|+\beta_1(t)|y(t,x_0)|^{\alpha})dt, \qquad /5/$$

де $\kappa_1(x)=4\max_x[|\mathcal{P}_1(x)|,|\mathcal{P}_2(x)|,|\mathcal{P}_3(x)|]$; $\beta_1(x)=\frac{1}{6a^3}|\xi^{\frac{3}{2}}(x)|r(x)$;
$C=\max[|C_1|,|C_2|,|C_3|,|C_4|]$. Заміною

$$y(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)z(x,x_0) \qquad /6/$$

зводимо /5/ до

$$|z(x,x_0)|\le C+\int_{x_0}^{x}(\kappa(t)|z(t,x_0)|+\beta(t)|z(t,x_0)|^{\alpha})dt, \qquad /7/$$

де $\kappa(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\kappa_1(x)$; $\beta(x)=|\xi(x)|^{\frac{3\alpha}{2}}\beta_1(x)$.

Застосовуючи лему Перова [2] до нерівності /7/, одержуємо:

1/ якщо $0\le\alpha<1$, то для всіх $x\ge x_0$

$$|z(x,x_0)|\le R_1(x), \qquad /8/$$

де

$$R_1(x)=\{c^{1-\alpha}\exp\left[(1-\alpha)\int_{\tau}^{x}\kappa(s)ds\right]+$$
$$+(1-\alpha)\int_{x_0}^{x}b(\tau)\exp\left[(1-\alpha)\int_{\tau}^{x}\kappa(s)ds\right]d\tau\}^{\frac{1}{1-\alpha}}; \qquad /9/$$

2/ якщо $\alpha>1$ і початкові умови /2/ такі, що

$$c<\left[(\alpha-1)\int_{x_0}^{x_0+h}b(s)ds\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\exp\left(-\int_{x_0}^{x_0+h}\kappa(s)ds\right)=R_2(h), \qquad /10/$$

то на відрізку $x_0\le x\le x_0+h$

$$|z(x,x_0)|\le R_3(x), \qquad /11/$$

де

$$R_3(x)=c\{\exp\left[(1-\alpha)\int_{x_0}^{x}\kappa(s)ds\right]-$$
$$-c^{\alpha-1}(\alpha-1)\int_{x_0}^{x}b(\tau)\exp\left[(1-\alpha)\int_{\tau}^{x}\kappa(s)ds\right]d\tau\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad /12/$$

Враховуючи заміну /6/, для розв"язків задачі /1/, /2/ маємо оцінки: якщо $0\le\alpha<1$, то

$$|y(x,x_0)|\le|\xi(x)|^{\frac{1}{2}}R_1(x), \quad x\ge x_0; \qquad /13/$$

якщо $\alpha>1$ і $c<R_2(h)$, то

$$|y(x,x_0)|\le|\xi(x)|^{\frac{1}{2}}R_3(x), \quad x_0\le x\le x_0+h; \qquad /14/$$

за лемою Гронолла-Беллмана [2], якщо $\alpha=1$, то

$$|y(x,x_0)|\le c|\xi(x)|^{\frac{1}{2}}\exp\int_{x_0}^{x}(\kappa(t)+b(t))dt, \quad x\ge x_0 \qquad /15/$$

Праві частини /13/, /15/, якщо вони необмежені при $x\to\infty$, дають оцінку зверху для тих швидкостей, з якими розв"язки задачі /1/, /2/ $(0\le\alpha\le1)$ прямують до ∞ при $x\to\infty$.

Знайдемо достатні умови, за яких розв"язки задачі /1/, /2/ будуть обмеженими при $x\to\infty$. Нехай

$$\int_{x_0}^{\infty}\kappa(t)dt=\kappa_0<\infty, \quad \int_{x_0}^{\infty}b(t)dt=b_0<\infty. \qquad /16/$$

Тоді за $\alpha>1$ $R_2(\infty)=\exp(-\kappa_0)\left[(\alpha-1)b_0\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}=S_0<\infty$. Якщо початкові умови /2/ такі, що нерівність /10/ існує для $h\le\infty$, то оцінка /11/ також має місце для $x\ge x_0$ і, крім того, /9/ та /12/ за умов /16/ будуть обмеженими при $x\to\infty$.

З аналізу оцінок /I3/ – /I5/ випливає таке твердження.

Теорема. Нехай $f(x,y,y',y'',y''')$ неперервна в області $\mathcal{D}(x_0 \le x < \infty,$ $|y|,|y'|,|y''|,|y'''| \le m)$, $p_1''(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ неперервні на інтервалі $x_0 \le x < \infty$. Крім того, нехай мають місце умови /4/ і/I6/, якщо $0 \le \alpha \le 1$, або /4/, /I6/ і $c < R_2(\infty)$, коли $\alpha > 1$.

Тоді всі розв"язки задачі /I/, /2/ будуть обмеженими, якщо функція $\xi(x)$ залишається обмеженою при $x \to \infty$, або прямує до нуля, коли $\xi(x)$ прямує до нуля при $x \to \infty$.

Приклад. Легко переконатись, що в інтервалі $x_0 \le x < \infty$ для рівняння

$$y^{(IV)} + \mu x^2 y'' + a x^{\gamma} y' + 0{,}18 \mu^2 x^4 y = x^{-\beta} y^{\alpha} \sin f(x,y,y',y'',y''') \qquad /17/$$

всі умови теореми задовольняються, якщо вибрати $\gamma < \frac{5}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, $\alpha \ge 0$ і $\xi(x) = \frac{1}{x}$. Таким чином, за відповідних початкових умов розв"язки рівняння /I7/ прямуватимуть до нуля зі швидкістю, не меншою від швидкості прямування до нуля функції $\xi^{\frac{3}{2}}(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ при $x \to \infty$.

Список літератури: I. Костенко К.С. Лінійні звичайні диференціальні рівняння четвертого порядку, інтегровані в замкнутій формі. – Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, I974, вип.9. 2. Павлюк І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київського ун-ту, I970.