УДК 517.913

М.П.Карпа

# АСИМПТОТИКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$y''' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad /1/$$

з початковими умовами

$$y(t)\big|_{t=\tau} = q_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma),\quad y'_t(t)\big|_{t=\tau} = q_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma),$$
$$y''_{t^2}(t)\big|_{t=\tau} = q_3(\tau,\alpha,\beta,\gamma), \qquad /2/$$

де $q(t)$ – неперервна, а $p(t)$ і $\xi(t)$ – неперервно диференційовані на інтервалі $t_0 \le t < \infty$ відповідно один і три рази. Вважаємо: параметри $\alpha, \beta, \gamma$ задовольняють умову $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Відомо [2], що існує фундаментальна система розв"язків $y_1(t,t_0)$ $y_2(t,t_0)$, $y_3(t,t_0)$ рівняння /1/, асимптотичне представлення яких при $t \to \infty$ має вигляд

$$y_1(t,t_0) = \xi(t)\left[\cos\sqrt{\mu}\,\varphi(t,t_0) + o(1)\right],\ t \to \infty,$$
$$y_2(t,t_0) = \xi(t)\left[\sin\sqrt{\mu}\,\varphi(t,t_0) + o(1)\right],\ t \to \infty, \qquad /3/$$
$$y_3(t,t_0) = \xi(t)(1 + o(1)),\ t \to \infty,$$

якщо виконуються умови

$$\int_{t_0}^{\infty} B(t)\,dt < \infty,\ \lim_{t\to\infty} P(t)\xi^2(t) = 0,\ \lim Q(t)\xi^2(t) = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,t_0) = \infty,\ \lim_{t\to\infty} (A_1(t) - p(t))\xi^2(t) = 0, \qquad /4/$$

де

$$A_1(t) = \xi^{-2}(t)\left[\mu - 2\xi''(t)\xi(t) - \xi'^2(t)\right],\ \mu > 0;$$
$$P(t) = \frac{1}{\mu}\left[\xi'(t)(A_1(t) - p(t)) + \xi(t)\left(\frac{A_1'(t)}{2} - p'(t) + q(t)\right)\right],$$
$$Q(t) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}(A_1(t) - p(t)), \qquad /5/$$
$$B(t) = 3|\xi(t)|\max_t\left[|P(t)|, |Q(t)|\right];$$
$$\varphi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \xi^{-1}(s)\,ds.$$

Використовуючи формули /3/, знайдемо асимптотичну поведінку розв"язку $y(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ задачі /1/, /2/. Вдосконалюючи методику робіт [1,3,4], виявили :

<u>Лема 1.</u> Розв"язок задачі /1/, /2/ записуємо у вигляді

$$y(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\mu^{-\frac{1}{4}}\xi(t)\{(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\sin\gamma)\cdot\cos(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)- \quad /6/$$
$$-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\cos\gamma+o(1)\},\ t\to\infty$$

$$y'_t(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\mu^{-\frac{1}{4}}\{\xi'(t)[(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{3/4}\sin\gamma)\cdot\cos(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-$$
$$-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\cos\gamma\,]- \quad /7/$$
$$-\sqrt{\mu}(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\sin\gamma)\cdot\sin(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+o(1)\},\ t\to\infty$$

$$y''_{t^2}(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\mu^{-\frac{1}{4}}\{(\xi''(t)+\mu\xi^{-1}(t))(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{3/4}\sin\gamma)\cdot\cos(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-$$
$$-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})-\sqrt{\mu}\,\xi'(t)\xi^{-1}(t)(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{3/4}\sin\gamma)\times$$
$$\times\sin(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+\xi''(t)(C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+ \quad /8/$$
$$+\mu^{3/4}\cos\gamma)+o(1)\},\ t\to\infty.$$

Крім того,

$$\lim_{\tau\to\infty}A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=0;\ \lim_{\tau\to\infty}\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=0;\ \lim_{\tau\to\infty}C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

якщо

$$q_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\xi(\tau)(\cos\alpha+\cos\gamma),$$
$$q_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\xi'(\tau)(\cos\alpha+\cos\gamma)+\sqrt{\mu}\cos\beta, \quad /9/$$
$$q_3(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=(\xi''(\tau)-\mu\xi^{-1}(\tau))\cos\alpha+\sqrt{\mu}\,\xi'(\tau)\xi^{-1}(\tau)\cos\beta+\xi''(\tau)\cos\gamma.$$

<u>Лема 2.</u> Для достатньо малих $\Delta$ справедлива тотожність

$$y(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=h(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)\,y(t,\tau+\Delta,\alpha^*,\beta^*,\gamma^*), \quad /10/$$

це

$$h(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)=\{\mu^{-2}M^2(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)+[\mu^{-\frac{1}{2}}(y'(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\xi'(\tau+\Delta)\xi^{-1}(\tau+\Delta)\times \quad /11/$$
$$\times y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma))]^2+(\xi^{-1}(\tau+\Delta)\,y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\mu^{-1}M(\tau,\alpha,\beta,\gamma))^2\}^{1/2};$$

$$\cos\alpha^* = h^{-1}(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)\cdot\mu^{-1}M(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta), \qquad /12/$$

$$\cos\beta^* = h^{-1}(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)\,\mu^{-\frac{1}{2}}(y'(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\xi'(\tau+\Delta)\xi^{-1}(\tau+\Delta)y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)), \qquad /13/$$

$$\cos\gamma^* = h^{-1}(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)(\xi^{-1}(\tau+\Delta)y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\mu^{-1}M(\tau,\alpha,\beta,\gamma)), \qquad /14/$$

$$M(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta) = -\xi(\tau+\Delta)y''(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\xi'(\tau+\Delta)y'(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)+$$
$$+(\xi''(\tau+\Delta)-\xi'^2(\tau+\Delta)\xi^{-1}(\tau+\Delta))\,y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma). \qquad /15/$$

Крім того, при $\Delta\to 0$

$$h(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta) = 1+\Delta\, z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta);\ \alpha^* = \alpha+\Delta\cdot l(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta);$$
$$\beta^* = \beta+\Delta\cdot\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta);\ \gamma^* = \gamma+\Delta f(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta), \qquad /16/$$

де

$$z(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = -\sqrt{\mu}\,\xi^{-1}(\tau)\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sqrt{\mu}\,\xi^{-1}(\tau)\cos\beta+\mu^{-1}(\cos\alpha-\cos\gamma)N(\tau,\alpha,\beta,\gamma), \qquad /17/$$

$$l(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\sin\alpha}\left(z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\alpha-\mu^{-1}N(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\right), \qquad /18/$$

$$\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\sin\beta}\left(z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\beta+\mu^{\frac{3}{2}}\xi^{-1}(\tau)\cos\alpha\right), \qquad /19/$$

$$f(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\sin\gamma}\left(z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\gamma-\sqrt{\mu}\,\xi^{-1}(\tau)+\mu^{-1}N(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\right); \qquad /20/$$

$$N(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = (\xi'''(\tau)+q(\tau)\xi(\tau)-2\xi^{-1}(\tau)\xi'(\tau)\xi''(\tau)+\xi'^3(\tau)\xi^{-2}(\tau))\xi(\tau)(\cos\alpha+\cos\gamma)+$$
$$+(2\xi''(\tau)+p(\tau)\xi(\tau)-\xi^{-1}(\tau)\xi'^2(\tau))(\xi'(\tau)\cos\alpha+\sqrt{\mu}\cos\beta+\xi'(\tau)\cos\gamma). \qquad /21/$$

<u>Лема 3.</u> Функції $A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ задовольняють рівняння у частинних похідних

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}+\frac{\partial A}{\partial\alpha}\cdot l(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial A}{\partial\beta}\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial A}{\partial\gamma}f(\tau,\alpha,\beta,\gamma) =$$
$$= -z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\tilde{q}_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma); \qquad /22/$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}l(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}f(\tau,\alpha,\beta,\gamma) =$$
$$= \frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2\gamma}\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2\gamma}l(\tau,\alpha,\beta,\gamma); \qquad /23/$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial \alpha} l(\tau,\alpha,\beta,\gamma) + \frac{\partial c}{\partial \beta} K(\tau,\alpha,\beta,\gamma) + \frac{\partial c}{\partial \gamma} f(\tau,\alpha,\beta,\gamma) =$$
$$= -z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot C(\tau,\alpha,\beta,\gamma) + \tilde{q}_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma), \qquad /24/$$

де

$$\tilde{q}_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = -\mu^{-\frac{1}{2}} z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\sin\gamma - \mu^{-\frac{1}{2}} f(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\gamma, \qquad /25/$$

$$\tilde{q}_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \mu^{-\frac{1}{2}} f(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\sin\gamma - \mu^{-\frac{1}{2}} z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\gamma. \qquad /26/$$

Лема 4. Нехай $\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ є розв"язками задачі Коші

$$\Theta_s'(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma) = l[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)],\ \Theta(\tau,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\alpha,$$
$$F_s'(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma) = K[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)],\ F(\tau,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\beta, \qquad /27/$$
$$E'(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma) = f[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)],\ E(\tau,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\gamma,$$

і кінець вектора $\bar{a}(\cos\Theta, \cos F, \cos E)$ не лежить між площинами

$$z+\delta=0, \quad z-\delta=0 \qquad /28/$$

при деякому фіксованому $\delta>0$.

Тоді

$$Q(s) = \exp\left[\int_\tau^s z(t,\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma))dt\right] \qquad /29/$$

обмежена при $s\to\infty$.

Основна теорема. При виконанні умов /4/, /5/, /9/, /28/ розв"язок задачі Коші /1/, /2/ зображається асимптотичними формулами /6/, /7/, /8/, при цьому

$$A(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = -\int_\tau^\infty \Big\{\tilde{q}_1[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)]\times$$
$$\times\exp\left[\int_\tau^s z(t,\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma))dt\right]\Big\}ds;$$

$$\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \int_\tau^\infty \Big[\sqrt{\mu}\, t^{-1}(t) + \frac{\sin\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot\cos F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}{\sin^2 E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}\, l(t,\Theta,F,E) -$$
$$-\frac{\cos\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot\sin F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}{\sin^2 E(\tau,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}\, K(t,\Theta,F,E);$$

$$C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\int_{\tau}^{\infty}\{\tilde{q}_2[s,\theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)]\times$$
$$\times\exp\left[\int_{\tau}^{s}z(t,\theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma))dt\right]\}ds,$$

де $z(s,\theta,F,E)$, $l(s,\theta,F,E)$, $K(s,\theta,F,E)$, $f(s,\theta,F,E)$, $\tilde{q}_1(s,\theta,F,E)$, $\tilde{q}_2(s,\theta,F,E)$ визначені формулами /I7/, /I8/, /I9/, /20/, /25/, /26/, а $\theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ – розв"язки задачі /27/.

Список літератури: I. Бурим В.М., Павлюк І.А. Асимптотика розв"язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку. – УМЖ, I974, т.26, № 6. 2. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. – Дифференциальные уравнения, I974, т.I0, № I0. 3. King J.M. Invariant Imbedding and the Asymptotic Behavior of Solution to Initial Value Problems.- J. Math. Anal. Appl., 1964, № 9. 4. Hagin F.G. Some Asymptotic Behavior Results for Initial Value Problems: An Application of Invariant Imbedding.- J. Math. Anal. Appl. 1967, № 20.

УДК 5I7.946

В.М.Цимбал

## АСИМПТОТИКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ШОСТОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

У прямокутнику $D:\{0<x<l,\ 0<t\leq T\}\ (0<l<\infty,\ 0<T<\infty)$ розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon^4\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}=f(x,t) \qquad /I/$$