

$$C(t, \alpha, \beta, r) = \int_t^\infty \left\{ \tilde{q}_2[s, \theta(s, t, \alpha, \beta, r), F(s, t, \alpha, \beta, r), E(s, t, \alpha, \beta, r)] \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left[\int_t^s \tilde{z}(t, \theta(t, \tau, \alpha, \beta, r), F(t, \tau, \alpha, \beta, r), E(t, \tau, \alpha, \beta, r)) \alpha \tau \right] \right\} \alpha s,$$

де $\tilde{z}(s, \theta, F, E)$, $\tilde{L}(s, \theta, F, E)$, $\tilde{K}(s, \theta, F, E)$, $\tilde{f}(s, \theta, F, E)$, $\tilde{q}_1(s, \theta, F, E)$, $\tilde{q}_2(s, \theta, F, E)$ визначені формулами /17/, /18/, /19/, /20/, /25/, /26/, а $\theta(s, t, \alpha, \beta, r)$, $F(s, t, \alpha, \beta, r)$, $E(s, t, \alpha, \beta, r)$ – розв'язки задачі /27/.

Список літератури: І. Бурим В.М.,

- Павлюк І.А. Асимптотика розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку. – УМЖ, 1974, т.26, № 6.
2. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. – Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 3. Ning Y.M. Invariant Imbedding and the Asymptotic Behavior of Solution to Initial Value Problems. – J. Math. Anal. Appl., 1964, № 9. 4. Nagin G.Y. Some Asymptotic Behavior Results for Initial Value Problems: An Application of Invariant Imbedding. – J. Math. Anal. Appl. 1967, № 20.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ШОСТОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

У прямокутнику $D: \{0 < x < l, 0 < t \leq T\} (0 < l < \infty, 0 < T < \infty)$ розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = f(x, t) \quad /1/$$

з початковими

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad /2/$$

і граничними умовами

$$u(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = u(l, t) = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad /3/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий дійсний параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ в області $\bar{D}$ існують неперервні й обмежені похідні

$$\frac{\partial^i f(x, t)}{\partial x^j \partial t^{i-j}} \quad (i = 0, \dots, N+1; j = 0, \dots, i),$$

$$2/ \quad \frac{\partial^i f(0, 0)}{\partial x^j \partial t^{i-j}} = \frac{\partial^i f(l, 0)}{\partial x^j \partial t^{i-j}} = 0 \quad (i = 0, \dots, N+1; j = 0, \dots, i).$$

Методом М.І.Вішика - Л.А.Лустерніка [1] побудуємо асимптотичний розклад по степенях параметра ε розв'язку задачі /1/ - /3/.

Розклад шукаємо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon^i Q_i(\eta, t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N+1} \bar{u}_i(x, t, \varepsilon), \quad /4/$$

де $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, $\eta = \frac{l-x}{\varepsilon}$ - регуляризуючі перетворення.

Функції $\bar{u}_i(x, t)$ визначаються з першого ітераційного процесу, як розв'язки змішаних задач для хвильових рівнянь

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{i-1}}{\partial x^2} \quad (i = 0, \dots, N); \quad /5/$$

$$\bar{u}_i(x, 0) = \frac{\partial \bar{u}_i(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad /6/$$

$$\bar{u}_i(0, t) = -\Pi_{i-1}(0, t); \quad \bar{u}_i(l, t) = -Q_{i-1}(0, t). \quad /7/$$

Тут і далі вважатимемо $\bar{u}_j(x, t) = \Pi_j(\xi, t) = Q_j(\eta, t) \equiv 0$, коли $j < 0$, $\bar{u}_{N+1}(x, t) \equiv 0$.

Функції примежового шару в околі границі прямокутника отримують як розв'язки звичайних диференціальних рівнянь.

Отже, функції примежового шару в околі лівої границі прямокутника D є розв'язками таких задач:

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^6 \Pi_i}{\partial \xi^6} = \frac{\partial^2 \Pi_{i-2}}{\partial t^2} \quad (i=0, \dots, n+1), \quad /8/$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{U}_i(0,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Pi_i(0,t)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \bar{U}_{i-1}(0,t)}{\partial x^2} \quad /9/$$

при умовах $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Pi_i(\xi, t) = 0$ в D .

Функції примежового шару в околі правої границі прямокутника D є розв'язками

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^6 Q_i}{\partial \eta^6} = \frac{\partial^2 Q_{i-2}}{\partial t^2} \quad (i=0, \dots, n+1); \quad /10/$$

$$\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{U}_i(l,t)}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 Q_i(0,t)}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 \bar{U}_{i-1}(l,t)}{\partial x^2} \quad /11/$$

при умовах $\lim_{\eta \rightarrow \infty} Q_i(\eta, t) = 0$ в D .

Виродження – регулярне, бо серед коренів характеристичних рівнянь для рівнянь /8/, /10/ є рівно два корені, а саме $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$, з від'ємними дійсними частинами, що збігається з кількістю граничних умов, які випадають при переході до виродженої задачі. Методом математичної індукції легко показати, що всі $\Pi_i(\xi, t)$, $Q_i(\eta, t)$ ($i=0, \dots, n+1$) мають характер примежового шару. Легко побачити з /5/ – /6/, /8/ – /9/, /10/ – /11/, що, коли рекурентні процеси вести одночасно, то можна знайти всі $\bar{U}_i(x, t)$ ($i=0, \dots, n$), $\Pi_i(\xi, t)$, $Q_i(\eta, t)$ ($i=0, \dots, n+1$).

Валишковий член $Z_N(x, \varepsilon, t)$ є розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 Z_N}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z_N}{\partial x^2} - \varepsilon^4 \frac{\partial^6 Z_N}{\partial x^6} = \bar{f}(x, t), \quad /12/$$

$$Z_N(x, 0) = \frac{\partial Z_N(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad /13/$$

$$Z_N(0, t) = -\Pi_N(0, t) - \varepsilon \Pi_{N+1}(0, t), \quad Z_N(l, t) = -Q_N(0, t) - \varepsilon Q_{N+1}(0, t),$$

$$\frac{\partial Z_N(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial Z_N(l, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 Z_N(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z_N(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad /14/$$

$$\text{де } \tilde{f}(x, t) = \frac{\partial^6 \bar{u}_{N-3}}{\partial x^6} + \varepsilon \frac{\partial^6 \bar{u}_{N-2}}{\partial x^6} + \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \bar{u}_{N-1}}{\partial x^6} + \varepsilon^3 \frac{\partial^6 \bar{u}_N}{\partial x^6} - \\ - \frac{\partial^2 \Pi_N(\xi, t)}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi_{N+1}(\xi, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q_N(\eta, t)}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 Q_{N+1}(\eta, t)}{\partial t^2}.$$

Методом інтегралів енергії [2] одержана оцінка залишкового члена Z_N у метриці L_2 , що доводить асимптотичну коректність розкладу /4/. Результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виконуються умови 1/, 2/. Тоді розв'язок задачі /1/ - /3/ : запишемо у вигляді /4/, де

$$\bar{u}_i(x, t) \quad (i=0, \dots, N), \quad \Pi_i(\xi, t), \quad Q_i(\eta, t) \quad (i=0, \dots, N+1)$$

знаходяться рекурентно відповідно з /5/ - /7/, /8/ - /9/, /10/ - /11/, причому $\Pi_i(\xi, t), Q_i(\eta, t)$ - функції типу примежового шару. Розклад /4/ асимптотично коректний у метриці L_2 .

Список літератури: І. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - УМН, 1957, № 5. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964.