УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

У прямокутнику $Q\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}+b(t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

з умовами

$$u(x,0)=u(0,t)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ малий дійсний параметр.

Припустимо, що виконуються умови: 1/ $b(t)>0$ при $t\in[0,T]$, 2/ існують неперервні й обмежені похідні $\frac{d^i b(t)}{dt^i}$, $\frac{\partial^{i+j} f(x,t)}{\partial t^i\partial x^j}$ $(i+j=0,\dots,N)$,
3/ $\frac{\partial^i f(0,0)}{\partial t^i}=0\ (i=0,\dots,N)$.

Методом М.І.Вішика – Л.А Люстерника [2] побудуємо асимптотичний розклад по степенях параметра ε розв"язку задачі /1/ –/2/. Розклад шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\xi)+\varepsilon^{N+1}Z_N(x,t), \qquad /3/$$

де $\xi=\frac{t}{\varepsilon}$ – регуляризуюче перетворення.

Функції $v_i(x,t)$ визначаємо з першого ітераційного процесу як розв"язки задач Коші для рівнянь першого порядку; $v_i(x,t)$ знаходимо у явному вигляді [4]

$$v_i(x,t)=\int_0^x \varphi_i(\alpha,t)\,e^{b(t)(\alpha-x)}\,d\alpha \quad (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $\varphi_0(x,t)=f(x,t)$, $\varphi_i(x,t)=-\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x\,\partial t}$ $(i=1,\dots,N)$.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\xi)$ є розв"язками задач Гурса для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Методом Рімана [5] $\Pi_i(x,\xi)$ знаходимо у явному вигляді

$$\Pi_i(x,\xi)=-e^{-\xi}\int_0^x J_0\left(2\sqrt{b(0)(x-\alpha)\xi}\right)v_i'(\alpha,0)\,d\alpha+ \qquad /5/$$

$$+ e^{-\xi}\int_0^{\xi}\int_0^{x} J_0\left(2\sqrt{b(\omega)(x-\alpha)(\xi-\eta)}\right)\Phi_i(\alpha,\eta)\,d\alpha\,d\eta,$$

де J_0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку [I];

$$\Phi_0(x,\xi)\equiv 0;\quad \Phi_i(x,\xi) = -\sum_{j=1}^{i}\frac{b^{(j)}(0)\xi^j}{j!}\Pi_{i-j}(x,\xi)\ (i=1,\dots,N).$$

Функції $V_i(x,t)$, $\Pi_i(x,\xi)$ рекурентно виражаються /4/, /5/, причому $\Pi_i(x,\xi)$ має характер примежового шару. Методом інтегралів енергії [3] одержана оцінка залишкового члена $Z_N(x,t)$ у L_2 нормі в Q. Результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема I. Нехай виконуються I/, 2/, 3/. Тоді розв"язок задачі /I/, /2/ зображаємо у вигляді /3/, де $V_i(x,t)$ і $\Pi_i(x,\xi)$ знаходяться рекурентно, відповідно з /4/ і /5/. Залишковий член $Z_N(x,t)$ оцінюється у L_2 нормі в Q.

У тій же області Q розглянемо задачу Гурса

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = f(x,t), \qquad /6/$$

$$u(0,t) = u(x,0) = 0 \qquad /7/$$

і мішану задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial v}{\partial x} + c(x,t)v = f(x,t), \qquad /8/$$

$$v(0,t) = v(x,0) = 0. \qquad /9/$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

I/ $a(x,t) > 0$ в Q;

2/ $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ – двічі неперервно диференційовані по сукупності аргументів і, як вони самі, так і їхні похідні, до другого порядку обмежені в Q;

3/ $f(0,0)=0$, $f'_t(0,0) - a(0,0)f'_x(0,0) = 0$.

Тоді існує оцінка

$$\iint_Q |u-v|^2\,dQ \le \varepsilon C,$$

це $u(x,t)$ і $v(x,t)$ – розв"язки відповідно задач /6/–/7/ і /8/–/9/, константа C не залежить від ε .

Теорема доводиться методом інтегралів енергії [3].

Список літератури: I. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Т.I, М., ИЛ, 1949. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.-УМН, 1957, т.12, № 5. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964. 4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1970. 5. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, 1957.

УДК 517.946

Л.С.Парасюк, Є.М.Парасюк

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЄТЬСЯ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + x_n^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \lambda x_n^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} - k^2 u = 0, \qquad /I/$$

де α, λ і k – сталі параметри.

Рівняння /I/ розглядається у півпросторі $x_n > 0$, для якого ставиться перша крайова задача: знайти обмежений і два рази неперервно диференційований розв"язок рівняння /I/ у півпросторі $x_n > 0$, який би задовольняв умову

$$\lim_{x_n \to 0} u(x', x_n) = f(x'), \qquad /2/$$

де $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.