де $u(x,t)$ і $v(x,t)$ – розв"язки відповідно задач /6/-/7/ і /8/-/9/, константа C не залежить від ε .

Теорема доводиться методом інтегралів енергії [3].

Список літератури: І. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Т.І, М., ИЛ, 1949. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.-УМН, 1957, т.12, № 5. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964. 4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1970. 3. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, 1957.

УДК 517.946

Л.С.Парасюк, Є.М.Парасюк

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЄТЬСЯ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + x_n^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \lambda x_n^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} - k^2 u = 0, \qquad /І/$$

де α, λ і k – сталі параметри.

Рівняння /І/ розглядається у півпросторі $x_n > 0$, для якого ставиться перша крайова задача: знайти обмежений і два рази неперервно диференційований розв"язок рівняння /І/ у півпросторі $x_n > 0$, який би задовольняв умову

$$\lim_{x_n \to 0} u(x', x_n) = f(x'), \qquad /2/$$

де $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Зауважимо, що гіперплощина $x_n=0$, на якій вироджується рівняння /I/, є одночасно його характеристикою.

Доведемо теорему існування і єдності розв"язку задачі /I/, /2/ залежно від параметрів α і λ.

Розв"язок задачі шукаємо у вигляді перетворення Фур"є

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{u}(\alpha',x_n)e^{i(x,\alpha')}d\alpha', \qquad /3/$$

це $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(x',\alpha')=x_1\alpha_1+\dots+x_{n-1}\alpha_{n-1}$, $d\alpha'=d\alpha_1\dots d\alpha_{n-1}$ – елемент об"єму в $(n-1)$ -мірному дійсному просторі.

Для трансформанти $\bar{u}(\alpha',x_n)$ одержуємо задачу

$$x_n^{\alpha}\frac{d^2\bar{u}}{dx_n^2}+\lambda x_n^{\alpha-1}\frac{d\bar{u}}{dx_n}-\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2+\kappa^2\right)\bar{u}=0, \qquad /4/$$

$$\bar{u}(\alpha',0)=\bar{f}(\alpha'), \qquad /5/$$

це $$\bar{f}(\alpha')=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y')e^{-i(y',\alpha')}dy'. \qquad /6/$$

Легко показати, що загальний розв"язок рівняння /4/ має вигляд

$$\bar{u}(\alpha',x_n)=C_1x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}J_\nu(z)+C_2x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}K_\nu(z), \qquad /7/$$

це $J_\nu(z)$ і $K_\nu(z)$ – модифіковані циліндричні функції з показником $\nu=\frac{1-\lambda}{2-\alpha}$ дійсного аргументу

$$z=\frac{2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2+\kappa^2\right)^{1/2}}{2-\alpha}x_n^{\frac{2-\alpha}{2}}. \qquad /8/$$

Оскільки функція $J_\nu(z)$ зі збільшенням аргумента необмежено зростає, а розв"язок шукається обмеженим, то $C_1=0$ і, отже,

$$\bar{u}(\alpha',x_n)=C_2x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}K_\nu(z). \qquad /9/$$

Для визначення сталої C_2 використовуємо асимптотику функції $K_\nu(z)$ /функції Магдональда/

$$K_\nu(z)\sim\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{z^\nu}, \quad \nu>0,\ z\to 0. \qquad /10/$$

Якщо прийняти $\lambda<1$, $\alpha<2$, то в формулі /9/ $\nu>0$, і ми можемо скористатися цією оцінкою.

Використавши умову /5/, із /9/ одержимо

$$C_2 = \frac{2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2+\kappa^2\right)^{1/2}}{\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{\nu}}\ \tilde{f}(\alpha'). \qquad /II/$$

Співвідношення /3/, /9/, /II/ дають змогу записати розв"язок задачі /I/, /2/ у вигляді

$$u(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(x'-y',x_n)f(y')dy', \qquad /I2/$$

де

$$G(\gamma',x_n)=\frac{2x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}}{(2\pi)^{n-1}\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{\nu}}\int_{-\infty}^{+\infty}K_\nu(z)e^{i(\gamma',\alpha')}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2+\kappa^2\right)^{1/2}d\alpha', \qquad /I3/$$

а через γ' позначено різницю $x'-y'$.

Використовуючи таку ж методику, як і в роботі [3] , вираз для функції $G(\gamma',x_n)$ можна спростити до вигляду

$$G(\gamma',x_n)=\frac{x_n^{1-\lambda}\kappa^{1+\nu+\mu}K_{1+\nu+\mu}(\kappa\sqrt{R})}{2^{\mu-\nu}\pi^{\mu+1}\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{2\nu}R^{\frac{1+\nu+\mu}{2}}}, \qquad /I4/$$

де

$$R=\frac{4x_n^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i)^2, \quad \mu=\frac{n-3}{2}.$$

Простою перевіркою легко переконатись, що функція /I2/ задовольняє рівняння /I/. Покажемо, що вона задовольняє і умову /2/.

Позначимо через D гіперплощину $x_n=0$, а через D_ε - $(n-1)$ - мірну кулю радіуса ε з центром у точці $x'\in D$.

Легко переконатись у справедливості рівностей [3]

$$\lim_{x_n\to 0}\int_{D\setminus D_\varepsilon} G(x'-y',x_n)dy'=0, \qquad /I5/$$

$$\lim_{x_n\to 0}\int_{D_\varepsilon} G(x'-y',x_n)dy'=1. \qquad /I6/$$

Виберемо число $r>0$ настільки малим, щоб при $|x'-y'|\leq r$ коливання функції f не перевищували заданого ε. Тоді в області D_r маємо

$$f(y')=f(x')+\varphi(y'), \quad |\varphi(y')|<\varepsilon.$$

Отже,

$$u(x)=\int_{D_r} G(x'-y',x_n)f(x')dy'+ \int_{D_r} G(x'-y',x_n)\varphi(y')dy'+\int_{D\setminus D_r} G(x'-y',x_n)f(y')dy'. \qquad /17/$$

Звідси на основі /I5/, /I6/ і довільності ε із /I2/ випливає, що

$$\lim_{x_n\to 0} u(x',x_n)=f(x').$$

Єдиність побудованого розв"язку задачі /I/, /2/ випливає з принципу екстремальних значень розв"язків рівняння /I/: у півпросторі $x_n>0$ ці розв"язки не можуть досягти ні додатного максимуму, ні від"ємного мінімуму. Справді, якщо, наприклад, припустити, що у деякій точці M_0 півпростору $x_n>0$ розв"язок u рівняння /I/ досягає додатного максимуму, то, оскільки в цій точці $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}<0$, $i=1,2,\dots,n$, $\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$, а $x_n>0$, маємо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+x_n^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}<0.$$

Це суперечить рівнянню /I/.

Таким чином, доведена така теорема. Якщо у рівнянні /I/ вважати $\alpha<2$, $\lambda<1$, то задача /I/, /2/ має єдиний розв"язок /I2/.

Ця теорема охоплює аналогічні результати із робіт [3, 4] як частинні випадки по параметрах α, λ і K.

С п и с о к   л і т е р а т у р и : I. В а т с о н Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч.I.М,ИЛ,I949. 2. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эклиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. УМЖ,I953, т.5, № 2. 3. П а р а с ю к Л.С. Граничні задачі для еліптичних диференціальних рівнянь, що вироджуються на границі області.-Наукові записки УПІ,I96I,т.I3. 4. П а р а с ю к Л.С. Краевые задачи для некоторых самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, вырождающихся на границе области.-УМЖ,I96I,т.I3, №3.