УДК 517.917

С.П.Лавренюк

ПРО СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ n РІВНЯНЬ

Розглянемо систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n) a_{ij}(x_j), \ i = 1, \ldots, n, \qquad /1/$$

де функції p_{ij}, a_{ij} неперервні в $R^n \times J_q^+, J_q^+ = \{t / q < t < \infty\}$ і задовольняють умови

$$\begin{cases} a_{ij}(0) = 0, \ i, j = 1, \ldots, n; \\ 0 \le b_{ij} \le p_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n) \dfrac{a_{ij}(x_j)}{x_j} \le B_{ij}, \\ x_j \ne 0, \ i, j = 1, \ldots, n, \ i \ne j; \\ -B_{ii} \le p_{ii}(t, x_1, \ldots, x_n) \dfrac{a_{ii}(x_i)}{x_i} \le -b_{ii}, \\ x_i \ne 0, \ i = 1, \ldots, n, \ b_{ii} > 0. \end{cases} \qquad /2/$$

Введемо допоміжні кусково-лінійні системи

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_j, \ i = 1, \ldots, n, \qquad /3/$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ij} x_j, \ i = 1, \ldots, n, \qquad /4/$$

де

$$F_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & x_j < 0, \\ B_{ij}, & x_j > 0, \end{cases} \qquad f_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & x_j < 0, \\ b_{ij}, & x_j > 0, \end{cases}$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \ i \ne j;$$

$$\mathcal{F}_{ii} = \begin{cases} -B_{ii}, & x_i < 0, \\ -b_{ii}, & x_i > 0, \end{cases} \qquad f_{ii} = \begin{cases} -b_{ii}, & x_i < 0, \\ -B_{ii}, & x_i > 0, \end{cases}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

і лінійні системи з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -B_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \ldots + b_{1n} x_n, \\ \dot{x}_2 = b_{21} x_1 - B_{22} x_2 + \ldots + b_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \ldots - B_{nn} x_n \end{cases} \qquad /5/$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -b_{11} x_1 + B_{12} x_2 + \ldots + B_{1n} x_n, \\ \dot{x}_2 = B_{21} x_1 - b_{22} x_2 + \ldots + B_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = B_{n1} x_1 + B_{n2} x_2 + \ldots - b_{nn} x_n . \end{cases} \qquad /6/$$

Теорема. Нехай функції ρ_{ij}, a_{ij} неперервні в $R^n \times J_q^+$ і задовольняють умови /2/. Якщо тривіальні розв"язки систем /5/ і /6/ асимптотично стійкі в цілому, то і нульовий розв"язок системи /I/ стійкий в цілому.

Доведення. Оскільки за умовою нульовий розв"язок системи /5/ стійкий, то існує визначено додатна квадратична форма $V(x), x \in R^n$ [I], похідна якої, згідно з системою /5/, знаковід"ємна. Використаємо $V(x)$ для системи /3/ на множині

$$M_1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) / \; x_i > 0, \; i = 1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, на множині M_1 система /3/ збігається системою /5/. Далі, всі траєкторії системи /3/, які потрапляють в M_1, або там починаються, не можуть вийти за межі M_1. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що $|x(t; t_0, x^0)| < \varepsilon$ для всіх $t \in J_{t_0}^+$, як тільки $|x^0| < \delta$, де $x^0 \in M_1$ ($x(t; t_0, x^0)$ - розв"язок системи /3/ з початковими даними t_0, x^0).

Крім того,

$$\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, a) = 0$$

для всіх $a \in M_1$. Аналогічно, використавши стійкість у цілому нульовому розв"язку системи /6/, можна показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що з нерівності $|x^0| < \delta$, $x^0 \in M_2$ буде випливати нерівність $|x(t; t_0, x^0)| < \varepsilon$ для всіх $t \in J^+_{t_0}$

$$\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, a) = 0$$

і

для всіх $a \in M_2$. Тут

$$M_2 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i < 0,\ i = 1, \dots, n\},$$

а $x(t; t_0, \xi)$ – розв"язок системи /3/.

Нехай тепер по заданому $\varepsilon > 0$ вибрано $\delta > 0$ таке, що справедливі нерівності

$$|x(t; t_0, \tilde{x}^0)| < \varepsilon,\quad t \in J^+_{t_0},$$

$$|x(t; t_0, \bar{x})| < \varepsilon,\quad t \in J^+_{t_0},$$

як тільки

$$|\tilde{x}^0| < \delta,\quad \tilde{x}^0 \in M_2,$$

$$|\bar{x}^0| < \delta,\quad \bar{x}^0 \in M_1.$$

Приймемо $\bar{x}_i^0 = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $\tilde{x}_i^0 = -\frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $i = 1, \dots, n$.

Тоді для довільного

$$\tilde{x}_i^0 \le x_i^0 \le \bar{x}_i^0,\quad i = 1, \dots, n,$$

за теоремою про диференціальні нерівності [2], маємо

$$|x(t; t_0, x^0)| < \varepsilon,\quad t \in J^+_{t_0},$$

і для будь-якого $a \in R^n$

$$\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, a) = 0.$$

Тут $x(t; t_0, \xi)$ – розв"язок системи /3/ з початковими даними t_0, ξ. Тобто нульовий розв"язок системи /3/ стійкий в цілому.

Аналогічними міркуваннями доводиться стійкість у цілому нульового розв"язку системи /4/. Оскільки будь-який розв"язок системи /1/

можна помістити у вилку розв"язків систем /3/ і /4/, то і нульовий розв"язок системи /I/ стійкий у цілому.

Список літератури: I. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., Наука, 1970. 2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970.

УДК 517.944

М.Г.Шіпка

ПРО ДЕЯКІ ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Розглянемо еліптичне рівняння четвертого порядку

$$\mathcal{L}[u] \equiv (\Delta + k_1^2)(\Delta + k_2^2)u = 0, \quad k_i = const, \; i = 1, 2, \qquad /I/$$

яке є частинним випадком метагармонійного рівняння [I].

Теорема I. Функція

$$\omega(P, Q) = \frac{1}{4\pi(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(k_1^n - k_2^n)}{n!} r^{n-1}, \qquad /2/$$

де $r = |PQ|$ – фундаментальний розв"язок рівняння /I/.

Доведення цієї теореми полягає у перевірці рівномірної збіжності ряду /2/ для всіх $r \neq 0$ і безпосередній підстановці /2/ у рівняння /I/. При цьому одержується рівність

$$\mathcal{L}[\omega] = \delta(P - Q),$$

яка і доводить теорему [2].

Теорема 2. Нехай D – обмежена область у просторі E_3 з гладкою границею типу Ляпунова. Тоді довільна функція $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ зображається в області D у вигляді

$$u(P) = \frac{1}{4\pi(k_1^2 - k_2^2)} \iint_S \Big[\Delta u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_1 r} - e^{ik_2 r}}{r} - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{k_2^2 e^{ik_2 r} - k_1^2 e^{ik_1 r}}{r} +$$

$$+ u \frac{\partial}{\partial n} \frac{k_2^2 e^{ik_2 r} - k_1^2 e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_1 r} - e^{ik_2 r}}{r} \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial n} +$$