можна помістити у вилку розв"язків систем /3/ і /4/, то і нульовий розв"язок системи /I/ стійкий у цілому.

Список літератури: I. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., Наука, 1970. 2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970.

УДК 517.944

И.Г.Шіпка

ПРО ДЕЯКІ ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Розглянемо еліптичне рівняння четвертого порядку

$$\mathcal{L}[u] \equiv (\Delta + k_1^2)(\Delta + k_2^2)u = 0, \quad k_i = const, \ i = 1,2, \qquad /I/$$

яке є частинним випадком метагармонійного рівняння [I].

Теорема I. Функція

$$\omega(P,Q) = \frac{1}{4\pi(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(k_1^n - k_2^n)}{n!} r^{n-1}, \qquad /2/$$

де $r = |PQ|$ – фундаментальний розв"язок рівняння /I/.

Доведення цієї теореми полягає у перевірці рівномірної збіжності ряду /2/ для всіх $r \neq 0$ і безпосередній підстановці /2/ у рівняння /I/. При цьому одержується рівність

$$\mathcal{L}[\omega] = \delta(P-Q),$$

яка і доводить теорему [2].

Теорема 2. Нехай D – обмежена область у просторі E_3 з гладкою границею типу Ляпунова. Тоді довільна функція $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ зображається в області D у вигляді

$$u(P) = \frac{1}{4\pi(k_1^2 - k_2^2)} \iint_S \Big[\Delta u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_1 r} - e^{ik_2 r}}{r} - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{k_2^2 e^{ik_2 r} - k_1^2 e^{ik_1 r}}{r} +$$

$$+ u \frac{\partial}{\partial n} \frac{k_2^2 e^{ik_2 r} - k_1^2 e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_1 r} - e^{ik_2 r}}{r} \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial n} +$$

$$+(k_1^2+k_2^2)\left(u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ik_1 r}-e^{ik_2 r}}{r}-\frac{e^{ik_1 r}-e^{ik_2 r}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big]d s+ \qquad /3/$$

$$+\iiint_D \omega\cdot A[u]\,d\tau.$$

Приймемо $A_i[u]\equiv\Delta u+k_i^2 u$, $i=1,2.$

/4/

Використовуючи відому формулу Гріна, одержуємо

$$\iiint_D (uA_1[v]-vA_1[u])d\tau=\iint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d s.$$

Замінюємо в /4/ спочатку u на $A_2[u]$, а потім v на $A_2[v]$

$$\iiint_D (A_2[u]\cdot A_1[v]-vA[u])d\tau=\iint_S\left(A_2[u]\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial A_2[u]}{\partial n}\right)d s,$$

$$\iiint_D (uA[v]-A_2[v]\cdot A_1[u])d\tau=\iint_S\left(u\cdot\frac{\partial A_2[v]}{\partial n}-A_2[v]\frac{\partial u}{\partial n}\right)d s.$$

Звідси одержуємо

$$\iiint_D (u\cdot A[v]-vA[u])d\tau=\iint_S\Big[\Delta u\frac{\partial v}{\partial n}-\Delta v\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\partial\Delta v}{\partial n}-$$

$$-v\frac{\partial\Delta u}{\partial n}+(k_1^2+k_2^2)\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big]d s. \qquad /5/$$

Застосовуючи формулу /5/ до функції $v(P)=\omega(P,Q)$ і довільної функції $u(P)\in C^4(D)\cap C^3(\bar D)$, дістаємо після стандартних міркувань теорії потенціалу формулу /3/.

Якщо $u(P)$ є розв"язок рівняння /I/, то об"ємний інтеграл в /3/ зникає.

Теорема 3. Кожний розв"язок рівняння /I/ записується у вигляді $u=u_1+u_2$, де u_i є розв"язком рівняння $A_i[u]=0,\ i=1,2.$

Справді, формулу /3/ в цьому випадку можна записати таким чином:

$$u(P)=\frac{1}{4\pi(k_1^2-k_2^2)}\Big[\iint_S\left(u_1\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ik_1 r}}{r}-\frac{\partial u_1}{\partial n}\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)d s-$$

$$-\iint_S\left(u_2\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ik_2 r}}{r}-\frac{\partial u_2}{\partial n}\frac{e^{ik_2 r}}{r}\right)d s\Big].$$

Теорема 3 є частинним випадком відомої теореми І.Н.Векуа, одержаної іншим способом у роботі [I].

Список літератури: I. Векуа И.Н. О метагармонических функциях.– Труды/Тбилис. ин-т математики, 1943, т. I2. 2. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние. М., ИЛ, 1958.