УДК 512.4

О.Л.Горбачук, Р.І.Юрчишин

РОЗЩЕПЛЮВАННЯ І ПИСАННЯ РАДИКАЛІВ В АБЕЛЕВИХ ГРУПАХ

У цій роботі досліджуються радикали в абелевих групах, зокрема в групах без періодичних елементів рангу I і 2, а також дається достатній критерій нерозщеплюваності радикалів абелевих груп.

Всі означення, зв"язані з поняттям радикала, можна знайти у роботі [3].

Теорема I. Нехай задано довільний радикал $\mathfrak{r}$. Будь-яка абелева група рангу I без періодичних елементів або $\mathfrak{r}$ -радикальна, або $\mathfrak{r}$ – півпроста.

Доведення. Нехай G – довільна група без періодичних елементів рангу I.

Припустимо, що $\mathfrak{r}(G) \neq 0$. Тоді існує така радикальна група A , що $Hom(A, G) \neq 0$, тобто існує гомоморфізм $f: A \to G, f \neq 0$ [5]. Оберемо довільний елемент $a \in A$.

Тому що A – радикальна група, то $f(a) = h \in \mathfrak{r}(G)$.

Нехай $g \in G, g$ – довільне. Оскільки G група рангу I, то існують цілі m і n такі, що $mg = nh$. Розглянемо гомоморфізм $\alpha: G \to G$, де α – множення на число m , який індукує гомоморфізм α^* :

$Hom(A, G) \to Hom(A, G)$, де α^* – множення на число m [4, с.219].

Оскільки G – група без періодичних елементів, то і $Hom(A, G)$ – група без періодичних елементів [3, с.213], внаслідок чого

$$Hom(A, G) = Im\,\alpha^* = m\,Hom(A, G).$$

Звідси випливає, що існує гомоморфізм $\varphi \in Hom(A, G)$ такий, що $f = m\varphi$. Тоді маємо $f(na) = nh = mg$ і $f(na) = m\varphi(na)$, тобто $m\varphi(na)=mg$. Тому що група G – без періодичних елементів, то $\varphi(na)=g$, тобто $G\leq r(G)$, а отже, $r(G)=G$.

Таким чином, ми довели, що всі радикали на групах рангу і без періодичних елементів поводять себе тривіально.

З підвищенням рангу групи такої тривіальності вже не буде. Більше того, покажемо, що радикал групи рангу 2 не завжди виділяється прямим доданком. Для цього потрібна лема.

Лема. Нехай $\mathcal{T}$ – клас усіх p –цілимих груп. Тоді клас $\mathcal{T}$-радикальний. Лема доводиться простою перевіркою.

Вважатимемо, що група A розщеплюється, якщо існує розклад $A=r(A)\oplus A'$. Коли такий розклад існує для всіх груп, то радикал називається розщеплюваним.

Теорема 2. Нехай p – деяке просте число. Радикал r^p, що відповідає радикальному класу p –ділимих груп, не розщеплюється.

Доведення. Розглянемо групи G і H без періодичних елементів рангу I, де G – група раціональних чисел, знаменники яких у взаємності з простим числом q, а H – група раціональних чисел, знаменники яких степені числа q, причому $p\neq q$. Очевидно, що $r^p(G)=G$ і $r^p(H)=0$.

Щоб довести, що радикал не розщеплюється, досить показати, що існує нерозщеплюване розширення групи G за допомогою групи H, тобто, що $Ext(H,G)\neq 0$ [4].

Розглянемо точну послідовність $0\to G\to Q\to Z(q^\infty)\to 0$, де $Z(q^\infty)$- квазіциклічна група; Q – адитивна група раціональних чисел. Вона індукує точну послідовність

$$0\to Hom(A,G)\to Hom(A,Q)\to Hom(A,Z(q^\infty))\to$$
$$\to Ext(A,G)\to Ext(A,Q)\to Ext(A,Z(q^\infty))\to 0,$$

причому A – довільна група [4,с.254].

Візьмемо $A=H$. Якщо припустити, що $Ext(H,G)=0$, то одержимо точну послідовність

$$0 \to Hom(H,G) \to Hom(H,Q) \to Hom(H,Z(q^\infty)) \to 0.$$

Очевидно, що $Hom(H,G)=0$. Тому

$$Hom(H,Q) \simeq Hom(H,Z(q^\infty)).$$

Але $Hom(H,G) \simeq Q$ [4,с.2I4] і $Hom(H,Z(q^\infty)) \simeq G^*$, де Q^* – група q -адичних чисел [4,с.2I2]. Звідси випливає, що $Q \simeq Q^*$, а це неможливо. Отже, $Ext(H,G) \neq 0$. Теорема доведена.

Зауваження. З цієї теореми випливає, що на групах рангу 2 радикали поводять себе нетривіально. Справді, за теоремою існує група A рангу 2 без періодичних елементів, яка є нерозщеплюваним розширенням групи G за допомогою групи H. Причому $t(A)=G \dot{+} G$ не виділяється прямим доданком.

Визначимо тепер достатній критерій нерозщеплюваності радикалів в абелевих групах.

Теорема 3. Нехай маємо групи G і H рангу 1 без періодичних елементів. Нехай $\mathcal{P}_1$ – множина всіх простих чисел p, для яких група G є p – ділима, а $\mathcal{P}_2$ – таких простих чисел q, для яких група H – q – ділима, і нехай $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$.

Якщо група G – радикальна, а група H – півпроста для деякого радикалу t, то радикал не розщеплюється.

Доведення. Нехай $s \in \mathcal{P}_2$ і $s \notin \mathcal{P}_1$.

Розглянемо групу A без періодичних елементів рангу I, тип якої містить характеристику, в якій простому числу s відповідає 0, а всім іншим простим числам – символ ∞, а також групу B, тип якої містить характеристику, в якій числу s відповідає символ ∞, а всім іншим простим числам – символ 0 /детально про типи абелевих груп без періодичних елементів рангу I [2]/.

Очевидно, що тип групи G не більше типу групи A, а тип групи B не більше типу групи H. Виходячи з цього, маємо $G \simeq G' \leq A$ і $B \simeq H' \leq H$, а отже, і $t(A) = A$, $t(B) = 0$.

Доведемо тепер, що $Ext(B, A) \neq 0$. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to A \to Q \to Z(s^{\infty}) \to 0,$$

яка індикує точну послідовність

$$0 \to Hom(C, A) \to Hom(C, Q) \to Hom(C, Z(s^{\infty})) \to$$

$$\to Ext(C, A) \to Ext(C, Q) \to Ext(C, Z(s^{\infty})) \to 0,$$

причому C - довільна група.

Візьмемо $C = B$. Якщо припустити, що $Ext(B, A) = 0$, то одержимо точну послідовність

$$0 \to Hom(B, A) \to Hom(B, Q) \to Hom(B, Z(s^{\infty})) \to 0.$$

Як і в попередній теоремі, маємо

$$Hom(B, A) = 0;\ Hom(B, Q) \simeq Q;\ Hom(B, Z(s^{\infty})) \simeq Q^{*},$$

де Q^{*} - група s-адичних чисел. Звідси випливає, що $Q \simeq Q^{*}$, а це неможливо. Отже, $Ext(B, A) \neq 0$. Теорема доведена.

З теореми видно, що для всіх розщеплюваних радикалів групи без періодичних елементів рангу I, тип яких містить характеристику, в якій хоча б один символ дорівнює ∞, потрапляють в один клас: або радикальний, або півпростий, причому у другому випадку всі групи рангу 1 без періодичних елементів /крім групи Q/ півпрості.

С п и с о к л і т е р а т у р и: I. Г о р б а ч у к Е.Л. Расщепляемость кручения и перекручения в категории Λ -модулей. - Математические заметки, 1967, 2, № 6. 2. К у р о ш А.Г. Теория групп. М., Наука, 1967. 3. М и ш и н а А.П., С к о р н я к о в Л.А. Абелевы группы и модули. М., Наука, 1969. 4. Ф у к с Л. Бесконечные абелевы группы. Т.I. М., I974. 5. Stenström B. Rings of quotients. Berlin, Springer Verlag, 1974.

УДК 5I3.I93

О.Л.Горбачук, В.О.Оніщук

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ І РОЗШИРЕННЯ ПОЛІВ

Однією з найцікавіших класичних задач на побудову була задача "поділу кола", яка полягає у побудові циркулем і лінійкою правильного n-кутника при довільному натуральному n.

Гаусс вперше довів, що правильний n-кутник, де n -деяке просте число, тоді і лише тоді можна побудувати циркулем і лінійкою, якщо число n є числом виду $n=2^{2^k}+1$.

Тому, природно, виникає така задача: які правильні многокутники можна побудувати, ввівши додаткові прилади, аналогічні циркулю.

Як відомо, якщо коло може бути поділене на p_1 і на p_2 частин і якщо p_1 і p_2 - числа взаємно-прості, то коло можемо поділити і на $p_1 p_2$ частин [4]. Але оскільки довільне натуральне число розкладається в добуток простих чисел, то зрозуміло, що нам достатньо розглянути побудову правильних многокутників, число сторін яких є простим чи степенем простого числа.

Означення. p -сектором, де p -деяке просте число, назвемо такий приклад, за допомогою якого можна поділити довільний даний кут на p рівних частин і побудувати величину відрізка $x=\sqrt[p]{a}$, тобто будується дійсна і уявна частина кореня двочленного рівняння p -го степеня $x^p-b=0$, де b - комплексне число.

Як відомо із геометрії, двосектор збігається з циркулем.

Доведемо, що за допомогою трисектора, циркуля та лінійки можна побудувати корені рівнянь третього і четвертого степеня. Це випливає