нечные абелевы группы. Т.І. М., 1974. 5. Stenström B. Rings of quotients. Berlin, Springer Verlag, 1974.

УДК 513.193

О.Л.Горбачук, В.О.Оніщук

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ І РОЗШИРЕННЯ ПОЛІВ

Однією з найцікавіших класичних задач на побудову була задача "поділу кола", яка полягає у побудові циркулем і лінійкою правильного n-кутника при довільному натуральному n.

Гаусс вперше довів, що правильний n-кутник, де n -деяке просте число, тоді і лише тоді можна побудувати циркулем і лінійкою, якщо число n є числом виду $n=2^{2^k}+1$.

Тому, природно, виникає така задача: які правильні многокутники можна побудувати, ввівши додаткові прилади, аналогічні циркулю.

Як відомо, якщо коло може бути поділене на P_1 і на P_2 частин і якщо P_1 і P_2 - числа взаємно-прості, то коло можемо поділити і на $P_1 P_2$ частин [4]. Але оскільки довільне натуральне число розкладається в добуток простих чисел, то зрозуміло, що нам достатньо розглянути побудову правильних многокутників, число сторін яких є простим чи степенем простого числа.

Означення. P -сектором, де p -деяке просте число, назвемо такий приклад, за допомогою якого можна поділити довільний даний кут на p рівних частин і побудувати величину відрізка $x=\sqrt[p]{a}$, тобто будуться дійсна і уявна частина кореня двочленного рівняння p -го степеня $x^p-b=0$, де b - комплексне число.

Як відомо із геометрії, двосектор збігається з циркулем.

Доведемо, що за допомогою трисектора, циркуля та лінійки можна побудувати корені рівнянь третього і четвертого степеня. Це випливає з формули Кардано і з формули знаходження коренів рівнянь четвертого степеня /метод Феррарі/.

Теорема I. Якщо $n>3$ – просте число, то для того щоб побудувати правильний n -кутник за допомогою сукупності p_i -секторів $/p_i \geq 2,\ i=1,2,3,\dots,s$ / і лінійки необхідно, щоб n було числом виду

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i} + 1.$$

Доведення. Як відомо, многочлен поділу кола на n рівних частин має вигляд

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1. \qquad /I/$$

Полем розкладу многочлена /I/ є поле поділу кола $Q(\xi)$, де ξ – довільний первісний корінь степеня p із одиниці. Оскільки многочлен /I/ незвідний, то степінь $(Q(\xi):Q)$ поля $Q(\xi)$ над полем Q дорівнює $n-1$ /степеню многочлена /I//.

Нехай корінь ξ рівняння $x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1=0$ виражається в радикалах. А це означає, що його можна одержати, розв"язавши ланцюг двочленних рівнянь виду

$$x^{p_1}-\alpha_1=0,\ x^{p_2}-\alpha_2=0,\dots,\ x^{p_s}-\alpha_s=0,$$

де число α_1 належить основному полю Q, число α_2 – полю $Q=Q(\sqrt[p]{\alpha_1})$, число α_3 – полю $Q_2=Q_1(\sqrt[p]{\alpha_2})$ і т.д. $p_i,\ i=1,2,\dots,s$ – деякі дільники числа $n-1$ /. Прийнявши $Q_{(0)}=Q$, $Q_{(i)}=Q_{p_1 p_2 \dots p_i}$ / $i=1,2,\dots,s$ /, одержимо в полі $Q(\xi)$ ланцюжок послідовно вкладених одне в одне підполів

$$Q=Q_{(0)} \subset Q_{(1)} \subset Q_{(2)} \subset \dots \subset Q_{(s-1)} \subset Q_{(s)} = Q(\xi)$$

з тієї властивістю, що кожне підполе цього ланцюжка /крім поля $Q_{(0)}$/ має над попереднім підполем простий степінь / а саме поле $Q_{(i)}, i=1,2,\dots,s$ має над полем $Q_{(i-1)}$ степінь p_i /.

Степінь розкладу $Q(\xi)$ над полем Q $(Q(\xi):Q)=p_1 p_2 \dots p_s$ [7]. А звідси-висновок, що n повинно мати вигляд

$$n = p_1 p_2 \dots p_s + 1,$$

де $p_i,\ i=1,2,\dots,s$ можуть і повторюватися. Теорема доведена.

Теорема 2. Не існує скінченної кількості p_i -секторів /$p_i \geq 2, i=1,2,\dots,s$/, за допомогою яких і лінійки можна було б побудувати всі правильні многокутники.

Доведення. Якщо за допомогою p_i -секторів /$p_i \geq 2$, $i=1,2,\dots,s$/ і лінійки можна побудувати n -кутник, то n має вигляд

$$n = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} + 1,$$

де k, k_i, $i = 1, 2, \dots, s$ – цілі невід"ємні числа.

Розглянемо таке просте число p, яке більше за довільне p_i. Тоді арифметична послідовність $px+1$ $(x = 1, 2, 3, \dots)$ має нескінченно багато простих чисел /теорема Діріхле [6] /. Покажемо, що ні одного правильного многокутника з простим числом виду $px+1$ не можна побудувати за допомогою p_i -секторів / $p_i \geq 2$, $i=1,2,\dots,s$/ і лінійки.

Дійсно, нехай $px+1 = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} + 1$ або

$$px = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}.$$

Оскільки p не входить у праву частину, то за основною теоремою арифметики останнє рівняння не має розв"язку ні при якому цілому x. А це означає, що сукупності p_i -секторів /$p_i \geq 2$, $i=1,2,\dots,s$ / і лінійки недостатньо, щоб побудувати правильні многокутники, число сторін яких є простим числом з арифметичної послідовності $px+1$. Теорема доведена.

Список літератури: I. Артін Е. Теорія Галуа. К., Радянська школа, 1963. 2. Завало С.Т., Костарчук В.М. Алгебра і теорія чисел. Ч.2, К., Вища школа, 1976. 3. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки. К., Вища школа, 1972. 4. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. М.-Л., Гос. изд-во техн.-теорет. лит. 1949. 5. Постников М.М. Теория Галуа. М., Физматгиз, 1963.

6. Т р о с т, Э р н с т. Простые числа. М., Физматгиз, 1959.
7. Ш к о л ь н и к о в А.Г. Задача деления круга. 3-е изд. М., Учпедгиз, 1961.

УДК 517.9

Л.О.Старокадомский

ПРО ПОБУДОВУ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розв"язок u лінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними $\|B\|u=0$ часто шукають у вигляді $u=\|A\|v$, де v – розв"язок заданої /простішої/ системи $\|M\|v=0$ і називають загальним розв"язком системи $\|B\|u=0$. Тут $\|B\|$, $\|M\|$, $\|A\|$ – операторні матриці; u і v – вектор-стовпці. Наприклад, для рівнянь Ляме в теорії пружності

$$\|B\|=\|b_{ij}\|;\quad b_{ii}=\Delta+\varkappa\partial_i^2;\, b_{ij}=\varkappa\partial_i\partial_j;\; i,j=1,2,3, \qquad /1/$$

де $\varkappa=\frac{1}{1-2\nu}$; /$\nu$ – коефіцієнт Пуассона/ відомі різні зображення $\|A\|$ і $\|M\|$, серед яких вкажемо на розв"язок Папковича [2]

$$\|A\|=\|a_{ij}\|;\; a_{ii}=-\frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}x_i\partial_i+\frac{2+\varkappa}{2(1+\varkappa)};\; a_{ij}=-\frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}x_j\partial_i,$$

$$\|M\|=\|m_{ij}\|;\; m_{ii}=\Delta,\; m_{ij}=0\;(i\neq j);\quad i,j=1,2,3. \qquad /2/$$

де $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$; $x_i\,(i=1,2,3)$ – координати точки; ∂_i – оператор диференціювання по x_i.

Ми уточнимо поняття загального розв"язку та опишемо один загальний метод його побудови.

Зробимо необхідні попередні зауваження. Введемо позначення: K – кільце лівих операторів $\alpha=f_{k_1\ldots k_n}\partial_1^{k_1}\ldots\partial_n^{k_n}$ /повторення індекса тут і далі означатиме підсумовування за ним; $\partial_i^0=1$; $0\leq k_1+\ldots+k_n<\infty$, C, C_0 і P – відповідно кільце степеневих рядів зі змінними