6. Т р о с т, Э р н с т. Простые числа. М., Физматгиз, 1959.
7. Ш к о л ь н и к о в А.Г. Задача деления круга. 3-е изд. М., Учпедгиз, 1961.

УДК 517.9

Л.О.Старокадомский

ПРО ПОБУДОВУ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розв"язок u лінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними $\|B\|u=0$ часто шукають у вигляді $u=\|A\|v$, де v – розв"язок заданої /простішої/ системи $\|M\|v=0$ і називають загальним розв"язком системи $\|B\|u=0$. Тут $\|B\|, \|M\|, \|A\|$ – операторні матриці; u і v – вектор-стовпці. Наприклад, для рівнянь Ляме в теорії пружності

$$\|B\|=\|b_{ij}\|;\ b_{ii}=\Delta+\varkappa\partial_i^2;\ b_{ij}=\varkappa\partial_i\partial_j;\ i,j=1,2,3, \qquad /1/$$

де $\varkappa=\frac{1}{1-2\nu}$; /ν – коефіцієнт Пуассона/ відомі різні зображення $\|A\|$ і $\|M\|$, серед яких вкажемо на розв"язок Папковича [2]

$$\|A\|=\|a_{ij}\|;\ a_{ii}=-\frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}x_i\partial_i+\frac{2+\varkappa}{2(1+\varkappa)};\ a_{ij}=-\frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}x_j\partial_i,$$

$$\|M\|=\|m_{ij}\|;\ m_{ii}=\Delta,\ m_{ij}=0\ (i\neq j);\ i,j=1,2,3. \qquad /2/$$

де $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$; $x_i(i=1,2,3)$ – координати точки; ∂_i – оператор диференціювання по x_i .

Ми уточнимо поняття загального розв"язку та опишемо один загальний метод його побудови.

Зробимо необхідні попередні зауваження. Введемо позначення: K – кільце лівих операторів $\alpha=f_{k_1\dots k_n}\partial_1^{k_1}\dots\partial_n^{k_n}$ /повторення індекса тут і далі означатиме підсумовування за ним; $\partial_i^0=1$; $0\le k_1+\dots+k_n<\infty$, C , C_0 і P – відповідно кільце степеневих рядів зі змінними

$x_1, \ldots, x_n$, кільце степеневих рядів $f_{k_1 \ldots k_n}(x_0)(x_1 - x_{10})^{k_1} \ldots (x_n - x_{n0})^{k_n}$ та поле відношень степеневих рядів. Приймається $f_{k_1 \ldots k_n} \in P$; M - k - членний лівий модуль кільця K, тобто множина стрічок $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \alpha_i \in K$, причому $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \in M, \alpha\bar{\alpha} \in M, \alpha \in K$.

Відомо [I], що модуль M має скінченний базис, який записується деякою матрицею $\|M\|$, і навпаки, матриця $\|M\|$ породжує певний модуль M. $M : \|A\|$ - такий модуль, що $\bar{\lambda} \in M : \|A\|$ рівнозначно $\bar{\lambda}\|A\| \in M$, це стовпець, що одержується транспонуванням стрічки, $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ будемо позначати просто через v, тобто $v = \bar{v}'$, $v_i \in C_0$; $i = 1, \ldots, k$.

Означення. I. Інтегралом $\bar{\alpha}(\bar{\alpha} \in M)$ називається v, якщо $\bar{\alpha} v = 0$. 2. Множина всіх інтегралів $\bar{\alpha}$ називається інтегральним многовидом $\bar{\alpha}$. Аналогічно визначаються інтегральний многовид модуля M і матриці $\|M\|$. Якщо $\|M\|$ базис M, то, очевидно, їх інтегральні многовиди однакові.

3. Назвемо v загальним розв"язком системи $\|M\| v = 0$, розуміючи під цим, що v змінна, визначена на інтегральному многовиді модуля M, породженого матрицею $\|M\|$.

4. Нехай задані системи $\|B\| u = 0$ і $\|M\| v = 0$, причому v - загальний розв"язок системи $\|M\| v = 0$. Загальним розв"язком системи $\|B\| u = 0$ назвемо вираз $u = \|A\| v$, де u - змінна визначена на інтегральному многовиді модуля B, породженого матрицею $\|B\|$. Інакше кажучи, $u = \|A\| \cdot v$ є загальним A -розв"язком, якщо u пробігає весь інтегральний многовид модуля B, а v пробігає весь інтегральний многовид модуля M. Відомі дві теореми [I].

Теорема I. Якщо v пробігає інтегральний многовид модуля M, то $\|A\| v$ пробігає інтегральний многовид модуля $M : \|A\|$.

Теорема 2. Для того щоб $\bar{\alpha} \in M$, необхідно і достатньо, щоб інтегральний многовид $\bar{\alpha}$ містив інтегральний многовид M. З теорем I, 2 легко одержуємо як наслідок наступну теорему.

Теорема 3. Для того щоб $u = \|A\| v$, де v – загальний розв"язок системи $\|M\| v = 0$, було загальним A-розв"язком системи $\|B\| u = 0$ необхідно і достатньо, щоб модуль $M : \|A\|$ дорівнював модулю B, породженим матрицею $\|B\|$.

На основі названих теорем можна зробити перевірку загальності і побудови загальних A-розв"язків.

Зупинимось на побудові загальних A-розв"язків. Опишемо загальний метод цієї побудови на конкретному прикладі рівнянь Ляме. Нехай матриці $\|B\|$ і $\|M\|$ задаються формулами /I/, /2/, необхідно побудувати $\|A\|$. Обмежимося для простоти випадком, коли елементи матриці $\|A\|$ залежать лінійно як від x_i, так і від ∂_i /i=I,2,3/. Таким чином, кожний з трьох стовпців матриці $\|A\|$ матиме вигляд

$$z = \bar{z}' = (z_1, z_2, z_3)',$$
$$z_i = f_{ij} \partial_j + f_i, \quad f_{ij} = a_{ijk} x_k + a_{ij}, \quad f_i = b_{ik} x_k + b_i, \qquad /3/$$

де a_{ijk}, a_{ij}, b_{ik}, b_i – деякі невизначені постійні.

Надалі застосовуватимемо алгоритм Евкліда ділення операторів, що виражаються поліномами по степенях ∂_i з фіксованим i. Зафіксуємо, наприклад, $i = 1$. Тоді доцільно записати $z_i = z_{i1} \partial_1 + z_{i0}$. Користуючись алгоритмом Евкліда, покажемо елемент $\xi \in M : \|A\|$ у вигляді $\bar{\xi} = \bar{\mu} \|B\| + \bar{\delta}$, де $\bar{\mu}$ – деяка стрічка з елементами $\mu_i \in K$; $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$; $\delta_i = \delta_{i1} \partial_1 + \delta_{i0}$; /$i$= I,2,3/, причому δ_{i1}, δ_{i0} не залежать від ∂_1. Умова $\xi \in M : \|A\|$ рівнозначна тому, що

$$(\bar{\mu} \|B\| + \bar{\delta}) \|A\| = \bar{\nu} \|M\|, \qquad /4/$$

де $\bar{\nu}$ – деяка стрічка з елементами $\nu_i \in K$.

З теореми 3 випливає, що модуль B повинен дорівнювати модулю $M : \|A\|$, отже, матриця $\|A\|$ повинна задовольняти рівняння /4/, крім того, $\bar{\delta} = 0$. Для кожного стовпця $\|A\|$ одержимо

$$\mu_1 [(\Delta + \varkappa \partial_1^2)(z_{11} \partial_1 + z_{10}) + \varkappa \partial_1 \partial_2 (z_{21} \partial_1 + z_{20}) + \varkappa \partial_1 \partial_3 (z_{31} \partial_1 + z_{30})] +$$
$$+ \mu_2 [\ldots] + \mu_3 [\ldots] + \ldots + (\delta_{31} \partial_1 + \delta_{30})(z_{31} \partial_1 + z_{30}) = \nu \Delta. \qquad /5/$$

Коефіцієнти при μ_i повинні ділитися на Δ по ∂_1, що дає рівняння, які встановлюють залежності між постійними $a_{ijk}, a_{ij}, b_{ik}, b_i$.

Частина з цих постійних залишається невизначеною, чим можна скористатися, щоб забезпечити єдиність розв"язку цілком визначеної однорідної системи рівнянь відносно δ_{ij}, $i = 1,2,3$; $j = 1,0$. Ці рівняння випливають з виразу /5/ після виділення з $\bar{\delta}_{\mathfrak{z}}$ тієї частини, яка ділиться на Δ /по ∂_1/ справа, і прирівнювання залишку вигляду $P_k\partial_1 + Q_k$ /для k -го стовпця матриці $\|A\|$/ до нуля, тобто

$$P_k(\delta_{11}, \ldots, \partial_2, \partial_3) = 0, \quad Q_k(\delta_{11}, \ldots, \partial_2, \partial_3) = 0. \qquad /6/$$

Зауважимо, що для єдиності розв"язку однорідної системи /6/ потрібно, щоб число незалежних рівнянь було не менше шести, отже, ранг матриці $\|M\|$ повинен бути не менше трьох. Таким чином, u має виражатися не менше як через три гармонічних функції v.

При здійсненні описаної схеми знаходження $\mathfrak{z}$ не виникає принципових труднощів, хіба що викладки будуть дещо громіздкішими. Кінцевий результат можна описати формулами /для зручності постійні a_{ijk}, b_{ij}, ... перепозначені на a_i, b_i і т.п./.

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} A\partial_1 - B\partial_2 - C\partial_3 - D \\ B\partial_1 + A\partial_2 - E\partial_3 - F \\ C\partial_1 + E\partial_2 + A\partial_3 - G \end{pmatrix}. \qquad /7/$$

де

$$\begin{aligned} A &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4; & D &= ma_1 + nb_2; \\ B &= -b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4; & F &= ma_2 + nb_1; \\ C &= -c_1x_1 - b_3x_2 + b_2x_3 + c_2; & G &= ma_3 + nc_1; \\ E &= b_3x_1 - c_1x_2 + b_1x_3 + d_1; & m &= \frac{2+\varkappa}{\varkappa}, \\ & & n &= \frac{2(1+\varkappa)}{\varkappa}, \end{aligned} \qquad /8/$$

формули /8/ одержані без врахування /6/.

Інші два стовпці матриці $\|A\|$ можна дістати, фіксуючи відповідно $i=2$, $i=3$, що привело б знов до формул виду /7/, /8/ з відповідною заміною ∂_1 на ∂_2 і т.д., бо всі ∂_i входять у $\|B\|$ і $\|M\|$ рівноправно і симетрично. Але простіше одержати всі три стовпці з формул /7/, /8/, фіксуючи у них три різних набори постійних.

Приймемо всі постійні у виразах /8/ рівними нулю, крім a_1, a_2, a_3, для відповідно I,2,3-го стовпців матриці $\|A\|$, і кожного разу $a_i = -\frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}$. Тоді одержимо матрицю $\|A\|$, що відповідає розв"язку Папковича [2]. Рівняння /6/ при цьому матимуть лише нульовий розв"язок $\delta_{ij}=0$. Це означає, що розв"язок Папковича буде загальним A-розв"язком, який виражається через три гармонічні функції.

Приймемо тепер відмінними від нуля лише постійні $a_4 = b_4 = c_2 = 1$ відповідно для I,2,3-го стовпців $\|A\|$. Тоді, очевидно, одержимо при

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -\partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{pmatrix},$$

що $u = \|A\| v$ є розв"язком системи $\|B\| u = 0$. Але чи u -загальний A -розв"язок? Одержимо рівняння /6/ і дослідимо їх

$$\delta_{31}(\partial_2^2 + \partial_3^2) + \delta_{10}\partial_3 = 0, \qquad \delta_{20} - \delta_{11}\partial_2 = 0,$$

$$\delta_{21}(\partial_2^2 + \partial_3^2) + \delta_{10}\partial_2 = 0, \qquad \delta_{30} - \delta_{11}\partial_3 = 0,$$

$$\delta_{11}(\partial_2^2 + \partial_3^2) - \delta_{20}\partial_2 - \delta_{30}\partial_3 = 0, \qquad \delta_{31}\partial_3 + \delta_{21}\partial_2 + \delta_{10} = 0.$$

З 4-го і 5-го рівнянь маємо $\delta_{20} = \delta_{11}\partial_2$; $\delta_{30} = \delta_{11}\partial_3$. Помноживши справа ці рівності на ∂_2, ∂_3 відповідно і підставивши у третє рівняння, одержимо $\delta_{11} \cdot 0 = 0$. Це означає, що одержані рівняння мають не лише нульовий розв"язок. Отже, вираз $u = \|A\| v$ не є загальний A -розв"язок системи $\|B\| u = 0$.

С п и с о к   л і т е р а т у р и: I. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов. – Математический сборник, 1945, т.17 /59/, вып. 2. 2. П а п к о в и ч П.Ф. Выражение общего интеграла уравнений теории упругости через гармонические функции. – Известия АН СССР, сер.мат. и ест.наук, 1932, № 10.

УДК 517. 917

Б.В.Ковальчук, Я.М.Середа

ПОВНОТА ПРОСТОРУ S^p- МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

У роботі [2] введено поняття S^p – майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ $(-\infty<x<+\infty)$ і визначена норма / S^p-норма/ за формулою

$$\|F\| = \|F\|_{S^p} = \sup \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad /1/$$

Існують такі властивості норми:

1/ $\|F\| \geq 0$, причому $\|F\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $F(x) = 0$;

2/ $\|\lambda F\| = |\lambda| \|F\|$, де λ – будь-яке комплексне число;

3/ $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$, де $F(x)$ і $G(x)$ – будь-які S^p – майже періодичні матриці одного і того ж виміру.

Перші дві властивості норми очевидні. Третю властивість можна довести на основі нерівності Мінковського. Справді, для двох S^p – майже періодичних матриць одного й того ж виміру $F(x)=[f_{jk}(x)]$ і $G(x)=[g_{jk}(x)]$ справедливо

$$\|F+G\| = \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)+g_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j,k} \left(\left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |g_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \right) \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |g_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|F\| + \|G\|.$$