С п и с о к   л і т е р а т у р и: І. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов. - Математический сборник, 1945, т.17 /59/, вып. 2. 2. П а п к о в и ч П.Ф. Выражение общего интеграла уравнений теории упругости через гармонические функции. - Известия АН СССР, сер.мат. и ест.наук, 1932, № 10.

УДК 517. 917

Б.В.Ковальчук, Я.М.Середа

ПОВНОТА ПРОСТОРУ S^p- МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

У роботі [2] введено поняття S^p - майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ $(-\infty<x<+\infty)$ і визначена норма / S^p-норма/ за формулою

$$\|F\| = \|F\|_{S^p} = \sup \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad /1/$$

Існують такі властивості норми:

1/ $\|F\| \geq 0$, причому $\|F\|=0$ тоді і тільки тоді, коли $F(x)=0$;

2/ $\|\lambda F\| = |\lambda| \|F\|$, де λ - будь-яке комплексне число;

3/ $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$, де $F(x)$ і $G(x)$ - будь-які S^p - майже періодичні матриці одного і того ж виміру.

Перші дві властивості норми очевидні. Третю властивість можна довести на основі нерівності Мінковського. Справді, для двох S^p - майже періодичних матриць одного й того ж виміру $F(x)=[f_{jk}(x)]$ і $G(x)=[g_{jk}(x)]$ справедливо

$$\|F+G\| = \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)+g_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j,k} \left(\left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |g_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \right) \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |g_{jk}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|F\| + \|G\|.$$

Крім цього, відзначимо ще такі властивості норми (I):

4/ $\|f_{jk}\| \le \|F\|$ для всіх j, k;

5/ $\big|\|F\| - \|G\|\big| \le \|F-G\|$, де $F(x)$ і $G(x)$ – будь-які S^p – майже періодичні матриці одного і того ж виміру;

6/ $\|FG\|_S \le \|F\|_{S^p} \|G\|_{S^q}$, де $F(x)$ – S^p – майже періодична матриця, а $G(x)$ – S^q – майже періодична матриця, причому матриці $F(x)$ і $G(x)$ допускають множення.

Властивості 4/ і 5/ доводяться легко. Доведемо властивість 6/ для випадку квадратичних матриць одного й того ж порядку. Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)]$ і $G(x)=[g_{jk}(x)]$ – квадратичні матриці порядку k. На основі нерівності Гельдера одержуємо

$$\|F\cdot G\|_S = \sup_x \sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\Big|\sum_{i=1}^{k} f_{ji}(t)g_{ik}(t)\Big|dt\right\} \le$$

$$\le \sup_x \sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{ji}(t)g_{ik}(t)|dt\right\} \le$$

$$\le \sup_x \sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{ji}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|g_{ik}(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \sup_x \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{ji}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_x \sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|g_{ik}(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \|F\|_{S^p}\|G\|_{S^q}.$$

Увівши для матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ поняття модуля $|F| = \mathrm{mod}\,F = [|f_{jk}(x)|]$, відзначимо, що

$$\|F\| = \|\mathrm{mod}\,F\|. \qquad /2/$$

Позначаємо

$$|F|^2 = [|f_{jk}(x)|^2]. \qquad /3/$$

Множину Σ_p всіх S^p – майже періодичних матриць одного й того ж виміру називаємо простором S^p – майже періодичних матриць.

Легко зауважити, що Σ_p є лінійним нормованим простором, який перевіряється на основі властивостей S^p – майже періодичних матриць [2]. Норма у просторі Σ_p визначається за формулою /I/ і для неї виконуються умови /аксіоми норми/ I/...3/. Далі покажемо, що Σ_p є повним простором, а отже, і простором Банаха.

Будемо вважати, що послідовність S^p – майже періодичних матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p збігається за S^p -нормою до граничної матриці $F(x)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \| F_n - F \|_{S^p} = 0. \qquad /4/$$

У роботі [2] доведено, що послідовність матриць $\{F_n(x)\} = \{[f_{jk}^{(n)}(x)]\}$ збігається за S^p -нормою до матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ тоді і тільки тоді, коли послідовність функцій $\{f_{jk}^{(n)}(x)\}$ збігається до $f_{jk}(x)$ за цією ж нормою для всіх j, k. Гранична матриця $F(x) = [f_{jk}(x)]$ є також S^p – майже періодичною матрицею [2].

Теорема I. Послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p може збігатися тільки до однієї границі. Справді, нехай послідовність $\{F_n(x)\}$ із Σ_p збігається до двох граничних матриць $F(x)$ і $G(x)$. На основі властивості норми 3/ можна записати

$$\| F - G \| \leq \| F - F_n \| + \| F_n - G \| .$$

Перейшовши тепер до границі, коли $n \to \infty$, одержуємо

$$\| F - G \| = 0.$$

Звідси, згідно з властивістю норми I/ маємо, що $F(x) - G(x) = 0$, тобто $F(x) = G(x)$.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \| F_n - F \| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \| F_n \| = \| F \|$.

Це твердження доводиться на основі властивості норми 5/.

Наслідок I. Члени збіжної послідовності матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p обмежені за S^p-нормою.

Наслідок 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \| F_n - F \| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \| F_n \|^2 = \| F \|^2$.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n - F\| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\||F_n| - |F|\| = 0$.

Справді, на основі (2) можна одержати співвідношення

$$\|F_n - F\| = \|mod(F_n - F)\| \geq \||F_n| - |F|\|.$$

Звідси і випливає дане твердження.

Теорема 4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n - F\|_{S^2} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\||F_n|^2 - |F|^2\|_S = 0$.

Справді, на основі нерівності Буняковського маємо

$$\||F_n|^2 - |F|^2\|_S = \sup_x \sum_{j,k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left||f_{jk}^{(n)}(t)|^2 - |f_{jk}(t)|^2\right|dt\right\} =$$

$$= \sup_x \sum_{j,k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left||f_{jk}^{(n)}(t)| - |f_{jk}(t)|\right|\cdot\left||f_{jk}^{(n)}(t)| + |f_{jk}(t)|\right|dt\right\} \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j,k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left||f_{jk}^{(n)}(t)| - |f_{jk}(t)|\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left||f_{jk}^{(n)}(t)| + |f_{jk}(t)|\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Використавши тепер обмеженість норми членів збіжних послідовностей S^p – майже періодичних функцій $\{f_{jk}^{(n)}(x)\}$, на основі теореми 3 одержуємо доведення цього твердження.

Послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p будемо називати фундаментальною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що як тільки $n > N$ і $m > N$, то

$$\|F_n - F_m\|_{S^p} < \varepsilon. \qquad /5/$$

Теорема 5. Якщо послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p збігається до граничної матриці $F(x)$, то вона є фундаментальною.

Справді, на основі властивості норми 3/ можемо записати

$$\|F_n - F_m\| \leq \|F_n - F\| + \|F - F_m\|,$$

звідки одержуємо твердження.

Існує і обернене твердження, яке виражає повноту простору Σ_p.

Теорема 6. Якщо послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p є фундаментальною, то вона збігається до граничної матриці $F(x)$ з цього ж простору.

Доведення. Нехай послідовність матриць $\{F_n(x)\} = \{[f_{jk}^{(n)}(x)]\}$ із Σ_p задовольняє умову (5). Прийнявши $\max\limits_{m,n\geq i}\|F_n - F_m\| = \varepsilon_i$, можна побудувати таку зростаючу збіжну послідовність індексів $\{n_i\}$, що для кожного i буде виконуватися нерівність

$$\|F_{n_i} - F_{n_{i+1}}\| < \varepsilon_{n_i}.$$

Але згідно властивості норми 4/ маємо

$$\|f_{jk}^{(n_i)} - f_{jk}^{(n_{i+1})}\| \leq \|F_{n_i} - F_{n_{i+1}}\|$$

для всіх j, k. А тому для всіх j, k справедлива нерівність

$$\|f_{jk}^{(n_i)} - f_{jk}^{(n_{i+1})}\| < \varepsilon_{n_i}.$$

Тепер на основі нерівності Гельдера одержуємо

$$\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f_{jk}^{(n_i)}(t) - f_{jk}^{(n_{i+1})}(t)|\,dt \leq \left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f_{jk}^{(n_i)}(t) - f_{jk}^{(n_{i+1})}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Отже, тим більше буде виконуватися нерівність

$$\sup_x \left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f_{jk}^{(n_i)}(t) - f_{jk}^{(n_{i+1})}(t)|\,dt\right\} < \varepsilon_{n_i}$$

для всіх j, k.

Далі показуємо [I], що в просторі S^p – майже періодичних функцій послідовність $\{f_{jk}^{(n)}(x)\}$ збігається до граничної функції $f_{jk}(x)$ для всіх j, k. А це означає, що послідовність матриць $\{F_n(x)\} = \{[f_{jk}^{(n)}(x)]\}$ у просторі Σ_p збігається до граничної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$. Теорема доведена.

Зауваження. Розглянемо тригонометричний матричний ряд

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu e^{i\lambda_\nu x} \qquad /6/$$

і його частинні суми

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} C_\nu e^{i\lambda_\nu x}. \qquad /7/$$

Теорема 7. Якщо $\lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha > 0$ і $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \|C_\nu\|^2 < \infty$, то послідовність матричних сум /7/ збігається за S^2 –нормою до граничної матриці.

Ця теорема узагальнює аналогічну теорему Степанова [I], одержану для випадку S^p – майже періодичних функцій, і доводиться таким самим методом.

Тепер на основі повноти простору Σ_2 можна довести справедливість твердження.

Теорема 8. Якщо $\lambda_{n+1}-\lambda_n>\alpha>0$ і $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\|C_\nu\|^2<\infty$, то в просторі Σ_2 існує S^2- майже періодична матриця $F(x)$, для якої ряд /6/ є її матричним рядом Фур"є.

Список літератури: І. Левитан Б.М. Почти периодические функции. М., Гостехиздат, 1953. 2. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. S^p – майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p- майже періодичною правою частиною. – Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, 1973, вип. 8. 3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ПРО КЛАС ДОДАТНИХ ВИПАДКОВИХ ЗМІННИХ, ЩО МАЮТЬ ЛИШЕ РОЗЩЕПНІ ФАКТОРИ

Визначимо такі чотири класи випадкових змінних:

1. Клас L додатних випадкових змінних ξ /для $\xi\in L$ функція розподілу ймовірностей $F(t)=0$ при $t\leq 0$ /.

2. Клас Φ цих змінних із класу L, що мають відбиття

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\,d\,F(t),\ 1-\alpha<Re\,z<1+\beta,\ (\alpha>0,\ \beta>0). \qquad /1/$$

/Класи L,Φ та відповідна термінологія з робіт [1, 2] /.

3. Клас B цих змінних із класу Φ, що при довільному натуральному $n=2,3,4,\dots$ можна записати як добуток n незалежних однаково розподілених випадкових змінних /для $\xi\in B$ відбиття є n -й степінь іншого відбиття/.