УДК 517.512

У.А.Мишковець

КРИТЕРІЙ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР"Є В ТЕРМІНАХ ЗГОРТКИ

У роботі [3] наводиться побудова гільбертового простору майже періодичних функцій. Цей клас функцій позначаємо через Q^2-м.п.

Теорема. Ряд Фур"є

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_R(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$$

майже періодичної функції $R(x)$ збігається абсолютно тоді і лише тоді, коли $R(x)$ може бути зображена у вигляді згортки

$$R(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{g(t)}\,dt,$$

де

$$f(t) \in Q^2\text{-м.п.}, \quad g(t) \in Q^2\text{-м.п.}$$

Доведення. Необхідність. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ збігається. Тоді

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\lambda_n x}$$

є майже періодичною функцією Бора [1]. Приймемо

$$A_n = \sqrt{|C_n|}\ , \quad B_n = \sqrt{|C_n|}\, e^{-i\alpha_n},$$

де $\alpha_n = \arg C_n$. Тоді ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^2$$

збігаються. На основі теореми Фішера-Рісса існують функції $f(x)$ і $g(x)$, які належать до Q^2-м.п., і такі, що

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|C_n|}\, e^{i\lambda_n t},$$

$$g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{i\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|C_n|}\, e^{-i\alpha_n} e^{i\lambda_n t}.$$

Для функції $F(x)$, яка визначається за формулою

$$F(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{g(t)}\,dt,$$

ряд Фур"є матиме вигляд

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|e^{i\alpha_n}e^{i\lambda_n x}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\lambda_n x}$$

Оскільки функції $F(x)$ і $R(x)$ майже періодичні функції Бора, у яких коефіцієнт і показники Фур"є збігаються, то $F(x)\equiv R(x)$ на всій числовій осі. Функція $R(x)$ зображається у вигляді згортки.

Достатність. Для загального випадку допускаємо, що показники Фур"є λ_n функцій $f(t)$ і $g(t)$ збігаються

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_f(\lambda_n)e^{i\lambda_n t}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{i\lambda_n t},$$

$$g(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}B_g(\lambda_n)e^{i\lambda_n t}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{i\lambda_n t}.$$

Тоді

$$R(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+t)\overline{g(t)}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\lambda_n x},$$

де $C_n=A_n\bar{B}_n$.

Оскільки $f(t)$ і $g(t)$ функції з класу Q^2-м.п, то

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2<\infty;\ \|g\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|B_n|^2<\infty.$$

З нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n\bar{B}_n|\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|A_n|^2+|B_n|^2\right)$$

одержуємо абсолютну збіжність ряду Фур"є

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\lambda_n x}=R(x).$$

Теорема доведена. Вона узагальнює відому теорему М.Рісса [2] для чисто періодичного випадку.

У класі майже періодичних функцій Безіковича / B^2-м.п / не було введено поняття скалярного добутку та згортки. З цієї причини теорема М.Рісса не піддавалась узагальненню. Побудований клас Q^2-м.п функцій дає змогу одержувати нові результати з теорії майже періодичних функцій. Зокрема, вдалося ввести поняття скалярного добутку і згортки для B^2-м.п функцій і показати, що простір B^2-м.п функцій гільбертовий. У роботі [3] дається співвідношення між класами Q^2-м.п і B^2-м.п.

Список літератури: I. Бор Г. Почти периодические функции. М., Гостехиздат, 1934. 2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961. 3. Мишковец У.А. Некоторые вопросы теории почти периодических функций. Автореф.дис... канд.физ.-мат.наук, Львов, 1972.

УДК 517.942+534.014.5

П.І.Тацуняк

РОЗВ"ЯЗОК РІВНЯННЯ ДЛЯ ОДНОГО ТИПУ АНГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1^2 x + k_2^2 \left[(x - x_0)_+ + (x + x_0)_- \right] = 0, \qquad /I/$$

де для скорочення введемо позначення $(x-x_0)_+ = (x-x_0)\Theta(x-x_0)$; $(x+x_0)_- = (x+x_0)\Theta(-x-x_0)$, $\Theta(x) = \begin{cases} 1; & x>0 \\ 0; & x<0 \end{cases}$ – функція стрибка. Рівняння /I/ описує рух матеріальної точки одиничної маси під дією пружних сил: сили $f_1 = -k_1^2 x$, визначеної на всьому інтервалі $-\infty < x < \infty$, та сили $f_2 = -k_2^2 [(x-x_0)_+ + (x+x_0)_-]$, що включається на відстані x_0 від положення рівноваги і визначена тим самим для $|x| > x_0$ /рис.I./. Така модель осцилятора має механічний зміст і може бути апроксимацією для більш загального виду ангармонічного осцилятора, відновлююча сила якого зображена на рис.I пунктиром /для його розв"язання застосовуються тільки наближені методи [I] /.

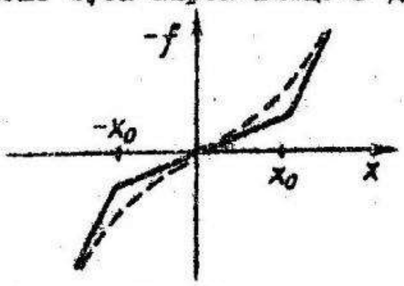

Рис.I.

Рух розглядуваного осцилятора повністю визначається коефіцієнтами пружності k_1^2 та k_2^2, критичним параметром відхилення $x_0 > 0$ та початковими умовами, які для конкретності виберемо