Список літератури: І. Бор Г. Почти периодические функции. М., Гостехиздат, 1934. 2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, І96І. 3. Мишковец У.А. Некоторые вопросы теории почти периодических функций. Автореф.дис... канд.физ.-мат.наук, Львов, 1972.

УДК 5І7.942+534.0І4.5

П.І.Тацуняк

РОЗВ"ЯЗОК РІВНЯННЯ ДЛЯ ОДНОГО ТИПУ АНГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa_1^2 x + \kappa_2^2 \left[(x - x_0)_+ + (x + x_0)_- \right] = 0, \qquad /І/$$

де для скорочення введемо позначення $(x-x_0)_+ = (x-x_0)\Theta(x-x_0)$; $(x+x_0)_- = (x+x_0)\Theta(-x-x_0)$, $\Theta(x)=\begin{cases} 1; & x>0 \\ 0; & x<0 \end{cases}$ – функція стрибка. Рівняння /І/ описує рух матеріальної точки одиничної маси під дією пружних сил: сили $f_1 = -\kappa_1^2 x$, визначеної на всьому інтервалі $-\infty < x < \infty$, та сили $f_2 = -\kappa_2^2 \left[(x-x_0)_+ + (x+x_0)_- \right]$, що включається на відстані $\pm x_0$ від положення рівноваги і визначена тим самим для $|x| > x_0$ /рис.І./. Така модель осцилятора має механічний зміст і може бути апроксимацією для більш загального виду ангармонічного осцилятора, відновлююча сила якого зображена на рис.І пунктиром /для його розв"язання застосовуються тільки наближені методи [І] /.

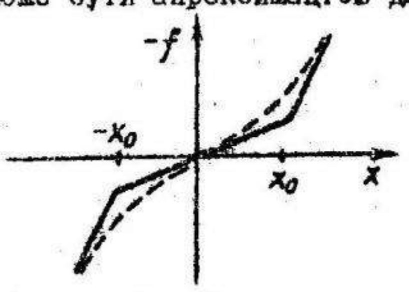

Рис.І.

Рух розглядуваного осцилятора повністю визначається коефіцієнтами пружності κ_1^2 та κ_2^2, критичним параметром відхилення $x_0 > 0$ та початковими умовами, які для конкретності виберемо

$$x(0)=0\,; \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=V_0\,, \qquad /2/$$

де V_0 – початкова швидкість матеріальної точки.

Введемо заміну

$$\frac{dx}{dt}=\rho\,; \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\rho}{dx}\,\frac{dx}{dt}=\frac{d\rho}{dx}\cdot\rho=\frac{1}{2}\,\frac{d\rho^2}{dx}\,, \qquad /3/$$

яка перетворює рівняння /I/ у рівняння I-го порядку

$$\frac{d\rho^2}{dx}=-2\kappa_1^2 x-2\kappa_2^2\left[(x-x_0)_+ +(x+x_0)_-\right]\,, \qquad /4/$$

що легко інтегрується

$$\rho^2=-\kappa_1^2x^2-2\kappa_2^2\left[\int t_1\theta(t_1)dt_1+\int t_2\theta(-t_2)dt_2\right],$$

де $t_1=x-x_0$; $t_2=x+x_0$. Зокрема, інтегруючи частинами і використовуючи властивість δ – функції Дірака

$$\int t_1\theta(t_1)dt_1=\int\theta(t)d\left(\frac{t_1^2}{2}\right)=\frac{t_1^2}{2}\theta(t_1)-\int\frac{t_1^2}{2}d\theta(t_1)=\frac{t_1^2}{2}\theta(t_1)-\int\frac{t_1^2}{2}\delta(t_1)dt_1=$$

$$=\frac{t_1^2}{2}\theta(t_1)=\frac{1}{2}(x-x_0)^2\theta(x-x_0)=\frac{1}{2}(x-x_0)_+^2\,,$$

аналогічно $\int t_2\theta(-t_2)dt_2=\frac{1}{2}(x+x_0)^2\,\theta(-x-x_0)=\frac{1}{2}(x-x_0)_-^2$

одержимо розв"язок рівняння /4/

$$\rho^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\kappa_1^2x^2-\kappa_2^2\left[(x-x_0)_+^2+(x+x_0)_-^2\right]+C^2,$$

а також перший інтеграл рівняння /I/

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{C_0^2-\kappa_1^2x^2-\kappa_2^2\left[(x-x_0)_+^2+(x+x_0)_-^2\right]} \qquad /5/$$

Підставляючи у /5/ початкові умови /2/, маємо $\frac{dx(0)}{dt}=V_0=C$.

Як відомо [3], рівняння типу

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\varphi(x)}$$

має періодичні розв"язки, якщо в $\varphi(x)$ є прості нулі при $x=a$ та $x=b$ і якщо $a<x(0)<b$. Тоді період коливання можна визначити безпосередньо з виду самого рівняння за формулою

$$T=2\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\,. \qquad /7/$$

Для цього із /5/ знайдемо найближчі до $x=0$ корені $a<0<b$ функції $\varphi(x)$, що задовольняють нерівності $|x_{a,b}|>x_0$:

$$-\varphi(x)=(\kappa_1^2+\kappa_2^2)x^2\mp2\kappa_2^2x_0x+\kappa_2^2x_0^2-v_0^2=0,$$

звідки

$$x_a = a = -\frac{k_2^2 x_0 + \sqrt{\Delta'}}{k_1^2 + k_2^2} \; ; \; x_a < -x_0 ,$$

$$x_b = b = \frac{k_2^2 x_0 + \sqrt{\Delta'}}{k_1^2 + k_2^2} \; ; \; x_b > x_0 , \qquad /8/$$

де $\Delta' = v_0^2 (k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 k_2^2 x_0^2 > 0$.

Підставляючи x_a та x_b у /7/ та враховуючи парність підінтегрального виразу, одержуємо після інтеграції величину періоду

$$\frac{T}{4} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x^2}} + \int_{x_0}^{\frac{k_2^2 x_0 + \sqrt{\Delta'}}{k_1^2 + k_2^2}} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x^2 - k_2^2 (x - x_0)^2}} =$$

$$= \frac{1}{k_1} \arcsin \frac{k_1 x_0}{v_0} + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \arccos \frac{k_2^2 x_0}{\sqrt{\Delta'}} . \qquad /9/$$

Очевидно, що період коливань /9/ залежить від початкової швидкості v_0, тому що коливання ангармонічного осцилятора не ізохронні.

З огляду на періодичність розв"язок достатньо визначити в інтервалі $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи рівняння /5/, маємо відповідно до областей значень функції $x(t)$ три інтеграли

$$J = J_- + J_0 + J_+ = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x - k_2^2 [(x - x_0)_+^2 + (x + x_0)_-^2]}} = t + C ; \qquad /10/$$

$$J_0 = J \cdot [\theta(x + x_0) - \theta(x - x_0)] = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x^2}} = \frac{1}{k_1} \arcsin \frac{k_1 x}{v_0} + C_0 ; \qquad /11/$$

$$J_\pm = J \theta(\pm x - x_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x_0^2 \pm 2 k_2^2 x_0 x - (k_1^2 + k_2^2) x^2}} + C_\pm . \qquad /12/$$

Інтеграли $J_\pm$, а також /9/, беруть за формулою довідника [2]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}}$$

за умови $c < 0$ та $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ для дискримінанта

$$J_\pm = \frac{\theta(\pm x - x_0)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \arcsin \frac{(k_1^2 + k_2^2) x \mp k_2^2 x_0}{\sqrt{\Delta'}} + C_\pm , \qquad /12a/$$

де умова $c < 0$ виконується автоматично. Нерівність $\Delta' = \frac{1}{4} \Delta = v_0^2 (k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 k_2^2 x_0^2 > 0$ дає необхідну умову для коливного процесу, що зв"язує параметри k_1, k_2, x_0 осцилятора та початкову швидкість

$$|v_0| > \frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} x_0 . \qquad /13/$$

Враховуючи /II/ та /I2a/ перейдемо в /I0/ до обернених функцій, що дає розв"язок у кусковому вигляді

$$x(t)= \begin{cases} -\dfrac{k_2^2 x_0}{k_1^2+k_2^2} + \dfrac{\sqrt{\Delta'}}{k_1^2+k_2^2} \sin\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t+C_-); & x<-x_0 \\ \dfrac{v_0}{k_1} \sin k_1 (t+C_0) & ;-x_0<x<x_0 \\ \dfrac{k_2^2 x_0}{k_1^2+k_2^2} + \dfrac{\sqrt{\Delta'}}{k_1^2+k_2^2} \sin\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t+C_+); & x>x_0 \end{cases} \qquad /I4/$$

Якщо врахувати неперервність руху точки у критичних значеннях $x=\pm x_0$, то із /I4/ можна побудувати схематичний графік коливання для одного періоду /рис.2/. З огляду на непарність $x(t)$ достатньо визначити на півперіоді. Критичному значенню $x=x_0$ на півперіоді відповідають два значення аргумента: t_1, та t_2 /рис.2/, які визначаються із /I4/ та /I9/

$$t_1=\frac{1}{k_1}\arcsin\frac{k_1}{v_0}x_0\,; \qquad /I5/$$

$$t_2=\frac{T}{2}-t_1=\frac{1}{k_1}\arcsin\frac{k_1}{v_0}+\frac{2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\arccos\frac{k_2^2 x_0}{\sqrt{\Delta'}} \qquad /I6/$$

Критичні значення t_1 та t_2 ділять період на три інтервали, $x(t)$ для яких одержимо, обчислюючи в /I4/ відповідні фазові константи C_0, C_+, C_0'. Із початкової умови $x(0)=0$ та другого рівняння /I4/ маємо $C_0=0$. Константи C_+ та C_0' можна визначити із неперервності руху в критичних точках t_1 та t_2, але простіше використати симетрію графіка, із

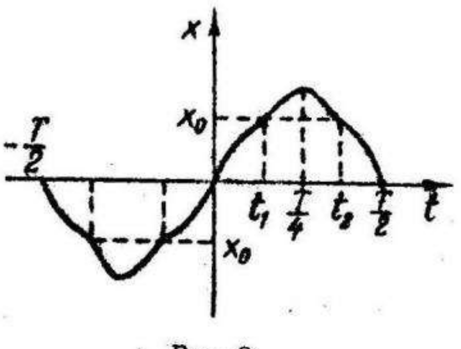

Рис.2.

якої випливає, що $x(t)$ має максимум у точці $t=\frac{T}{4}$, тому із третього рівняння /I4/ маємо

$$x'(t)\Big|_{t=\frac{T}{4}}=\frac{\sqrt{\Delta'}}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\cos\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t+C_+)\Big|_{t=\frac{T}{4}}=0. \qquad /I7/$$

Звідки, враховуючи /9/, одержимо константу C_+

$$C_+=\frac{\pi}{2\sqrt{k_1^2+k_2^2}}-\frac{T}{4}\,, \qquad /I7/$$

що підставлена в третє рівняння /I4/ визначає $x(t)$ на інтервалі $t_1<t<t_2$. Для знаходження $x(t)$ на інтервалі $t_2<t<\frac{T}{2}$ виконаємо з огляду на симетрію дзеркальне відображення $x(t)$ із інтервалу $0<t<t_1$ відносно точки $t=\frac{T}{4}$, що дає $x(t)=-\frac{v_0}{k_1}\sin k_1(t-\frac{T}{2})$. Остаточно розв"язок рівняння /I/ на півперіоді має вигляд

$$x(t)=\begin{cases}\frac{v_0}{k_1}\sin k_1 t & ;0\le t\le t_1\\ \frac{k_2^2 x_0}{k_1^2+k_2^2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{k_1^2+k_2^2}\cos\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t-\frac{T}{4}); & t_1\le t\le t_2\\ -\frac{v_0}{k_1}\sin k_1(t-\frac{T}{2}) & ;t_2\le t\le\frac{T}{2}\end{cases} \quad /I8/$$

або, враховуючи /I5/ та /I6/ у /I8/,

$$x(t)=\begin{cases}\frac{v_0}{k_1}\sin k_1 t & ;0\le t\le t_1\\ \frac{k_2^2 x_0}{k_1^2+k_2^2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{k_1^2+k_2^2}\cos\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t-\frac{t_1+t_2}{2}); & t_1\le t\le t_2\\ -\frac{v_0}{k_1}\sin k_1(t-t_1-t_2) & ;t_2\le t\le t_1+t_2\end{cases} \quad /I8a/$$

Це нелінійне неізохронне коливання, що повністю визначається чотирма параметрами / k_1, k_2, x_0, v_0 / та $x(0)=0$.

Зауваження. Із першого рівняння /I8/ з огляду на неперервність у критичних точках t_1 та t_2 випливає, що параметри осцилятора мусять задовольняти нерівність

$$|v_0|>k_1 x_0, \quad /I9/$$

яка порівняно з нерівністю /I3/ є більш сильною і тому визначальною. Якщо нерівність /I9/ не виконується, то сила f_2 не включається і маємо звичайне гармонічне коливання.

Якщо прийняти $k_1=0$, то одержимо частинний випадок розглянутого ангармонічного осцилятора, рух якого відбувається тільки під дією сили f_2 і описується періодичною функцією вигляду

$$x(t)=\begin{cases}v_0 t\\ x_0+\frac{v_0}{k_2}\cos k_2(t-\frac{T}{4}),\\ -v_0(t-\frac{T}{2})\end{cases} \quad /20/$$

де період T визначається формулою

$$\frac{T}{4} = \frac{x_0}{|v_0|} + \frac{1}{\varkappa_2} \arcsin \varkappa_2 .$$

Необхідна умова руху: $|v_0| > 0$; випадок $v = 0$ виключається. Із /20а/ видно, що малим початковим швидкостям $|v_0| \ll x_0$ відповідає великий період. При великих швидкостях $|v_0| \gg x_0$ період прямує до $\frac{4}{\varkappa_2} \arcsin \varkappa_2$.

Аналіз руху даного осцилятора завершимо розглядом діаграми у фазовому просторі / x, $\dot{x}$ / /точка означає похідну по часу/. Із /5/ одержуємо рівняння фазової траєкторії

$$\varkappa_1^2 x^2 + \dot{x}^2 = v_0^2 , \quad (|x| < x_0), \qquad /21/$$

$$(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) x^2 \mp 2\varkappa_2^2 x_0 x + \dot{x}^2 = v_0^2 - \varkappa_2^2 x_0 ; \ (\pm x - x_0 > 0), \qquad /22/$$

що є частинами трьох еліпсів. Канонічна форма рівнянь еліпсів /21/ та /22/ є

$$\frac{x^2}{\frac{v_0^2}{\varkappa_1^2}} + \frac{\dot{x}^2}{v_0^2} = 1 , \quad (|x| < x_0) \qquad /23/$$

$$\frac{(x \mp x_1)^2}{\frac{\Delta'}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}} + \frac{\dot{x}^2}{\Delta'} = 1 , \ (\pm x - x_0 > 0), \qquad /24/$$

де $x_1 = \frac{\varkappa_2^2 x_0}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}$ – координата центра еліпса. Фазова траєкторія замкнута /рис.3/, що відповідає періодичному рухові. Координати центра еліпсів /24а/ лежать у межах $|x_1| \leq x_0$, причому випадок $|x_1| = x_0$ відповідає частинному випадку $\varkappa_1 = 0$, розглянутому вище /20/, $x_1 = 0$ відповідає випадку $\varkappa_1 \neq 0$; $\varkappa_2 = 0$, тобто гармонічному осцилятору.

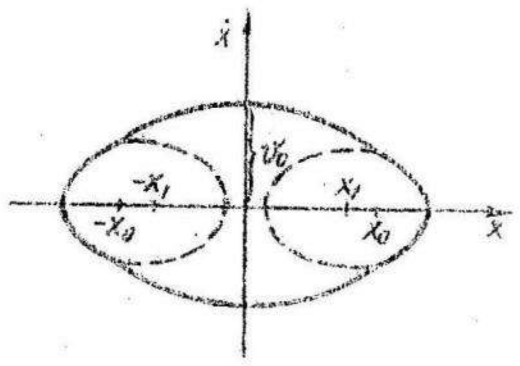

Рис. 3.

Висловлюємо щиру подяку И.М.Стахирі за постановку задачі.

Список літератури: I. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974. 2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М., Наука, 1971. 3. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т.3. М., Мир, 1970.

УДК 517.948

М.Й. Михалюк, Є.М.Парасюк

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ЗІ ЗМІННОЮ ГУСТИНОЮ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску одновз"язну область T, при заповненні якої речовиною зі змінною густиною $\mu(x,y)$ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Припустимо, що

$$V_e(x,y)=a_0 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+V(x,y), \qquad /1/$$

де a_0 – дійсне додатне число; $V(x,y)$ – гармонійна зовні нуля і зникає на нескінченності.

Нехай D – обмежена, одновз"язана область на площині $z=x+iy$. Розглянемо введений у роботі [2] клас $A(D)$ функцій $\mu(z,\bar z)$ таких, що функція $\mu(z,w)$ двох незалежних комплексних змінних аналітична в області $D\times D_*$ і неперервна в $\overline{D\times D_*}$, де D_* – область симетрична D відносно дійсної осі.

Введемо допоміжну функцію $z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область $T\subset D$ площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію