

Список літератури: 1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974. 2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М., Наука, 1971. 3. Джеффрис Г., Свирло Б. Методы математической физики. Т.3. М., Мир, 1970.

УДК 517.948

М.И. Михалюк, Є.М.Парасюк

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ЗІ ЗМІННОЮ ГУСТИНОЮ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв'язну область T , при заповненні якої речовиною зі змінною густиною $\mu(x,y)$ породжується заданий зовнішній потенціал $V_0(x,y)$.

Припустимо, що

$$V_0(x,y) = \alpha_0 \left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + V(x,y) \right), \quad /1/$$

де α_0 — дійсне додатне число; $V(x,y)$ — гармонійна зовні нуля і зникає на нескінченності.

Нехай D — обмежена, однозв'язна область на площині $z = x + iy$. Розглянемо введений у роботі [2] клас $A(D)$ функцій $\mu(z, \bar{z})$ таких, що функція $\mu(z, w)$ двох незалежних комплексних змінних аналітична в області $D \times D_*$ і неперервна в $\overline{D \times D_*}$, де D_* — область симетрична D відносно дійсної осі.

Введемо допоміжну функцію $z(t)$, яка відображає конформно круг $|t| < 1$ комплексної площини t на область $T \subset D$ площини $z = x + iy$, що містить початок координат, причому $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$. Функцію

$z(t)$ назвемо розв'язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_0(x, y)$ і густини $\mu(z, \bar{z}) \in A(D)$.

Нехай

$$U_0(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial V_0}{\partial z}, \quad U_i(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial V_i}{\partial z}, \quad /2/$$

де

$$V_i(x, y; T) = \iint_T \mu(\xi, \bar{\xi}) \ln \frac{1}{|\xi - z|} d\xi d\eta; \quad /3/$$

$\xi = \xi + i\eta$, $z = x + iy$ - внутрішній потенціал, що породжується областю $T \subset D$ в густиную $\mu(z, \bar{z}) \in A(D)$.

Оскільки V_{02} аналітична функція зовні нуля і зникає на нескінченності, тобто

$$U_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad \text{де } b_1 = \frac{\alpha_0}{\pi},$$

а функція $U_i(z)$ записується

$$U_i(z) = M(z, \bar{z}) + g(z), \quad /4/$$

$$M(z, \bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \mu(z, w) dw, \quad /5/$$

де $g(z)$ - регулярна всередині T і неперервна включно до границі, то з огляду на неперервність перших похідних потенціалу на границі ∂T області T існує рівність

$$U_0(z) = M(z, \bar{z}) + g(z), \quad z \in \partial T. \quad /6/$$

Інтегруючи /6/ по границі ∂T області $T \subset D$, одержуємо

$$\iint_T \mu(z, \bar{z}) dS_z = \alpha_0. \quad /7/$$

Таким чином, існує така лема.

Лема. Область $T \subset D$, що є розв'язком оберненої задачі для потенціалу /1/ і густини $\mu(z, \bar{z}) \in A(D)$ задовольняє умову /7/.

Нехай дійсна строго додатна функція $\mu(z, \bar{z}) \in A(|z| < R)$, де R - довільне додатне число.

Звернемося тепер до рівняння /6/, що дає рівність частинних похідних внутрішнього $V_i(x, y; T)$ і зовнішнього $V_e(x, y)$ потенціалів на границі ∂T області T . Спираючись на результати роботи [2], отримемо, що функція $z(t)$ є цілою функцією, оскільки $U_e(z)$ аналітична зовні нуля. Таким чином, $z = z(e^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ – аналітична крива. Звідси випливає, що в точках кривої $z = z(e^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ існує рівність радіальних похідних внутрішнього $V_i(x, y; T)$ і зовнішнього $V_e(x, y)$ потенціалів.

Користуючись елементарними обчисленнями і враховуючи результати попередньої леми, неважко показати, що радіальна похідна внутрішнього $V_i(x, y; T)$ потенціалу в точках границі області T , яка є розв'язком оберненої задачі для потенціалу $V_e(x, y)$ і густини $\mu(z, \bar{z}) \in A(|z| < R)$, рівномірно обмежена константою, що залежить від потенціалу $V_e(x, y)$ і густини $\mu(z, \bar{z})$.

Радіальна похідна зовнішнього $V_e(x, y)$ потенціалу має особливість у початку координат. Звідси випливає таке твердження.

Теорема. Будь-який розв'язок $z = z(t)$, $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$ оберненої задачі для потенціалу V_e і дійсної строго додатної густини $\mu(z, \bar{z}) \in A(|z| < R)$, $R > 0$ – довільне число, задовольняє умову

$$|z(e^{i\varphi})| \geq z_0(V_e, \mu) > 0,$$

де постійна $z_0(V_e, \mu)$ визначається потенціалом $V_e(x, y)$ і густиною $\mu(z, \bar{z})$.

Список літератури: І. Михалюк М.І.
Про локальну єдність розв'язку оберненої задачі логарифмічного потенціалу для змінної густини. – Математична фізика, 1974, №2. 2. Чередиченко В.Г. Обратные задачи логарифмического потенциала с аналитической плотностью. – Дифференциальные уравнения, 1973, т.9, № 2.