УДК 517.926

І.П.Пустомельников

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Одним з методів сучасної математичної і теоретичної фізики є апарат узагальнених функцій [7,6]. Вивченню дій над ними присвячено багато робіт. Відомо [3], що нормальна лінійна однорідна система звичайних диференціальних рівнянь з нескінченно диференційованими коефіцієнтами не має інших розв"язків в узагальнених функціях, крім класичних. Але для рівнянь з особливостями в коефіцієнтах можуть з"являтися нові розв"язки в узагальнених функціях.

У цій замітці розроблено метод знаходження розв"язків рівняння

$$t\,\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\,\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0 \qquad /1/$$

у класі узагальнених функцій з точковим носієм

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} x_k\,\delta^{(k)}(t). \qquad /2/$$

Усі функції розглядаютья в області дійсної змінної t. Число m називається порядком розподілення /2/, якщо $x_m \neq 0$.

<u>Теорема I.</u> Нехай $p(t)$ і $q(t)$ неперервно диференційовані відповідно $m+1$ і m – раз у деякому околі початку координат. Для існування узагальненого розв"язку порядку m рівняння /1/ необхідно і достатньо виконання сукупності умов:

$$p(0) = m+2; \qquad /3/$$

система

$$n(n+1-p_0)X_{n-1} + \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k \left[q_{k-1} - (n+k)p_k\right] X_{n+k-1} = 0 \qquad /4/$$

$$\left(n=0,\ldots,m+1;\; p_k = \frac{1}{k!}\,p^{(k)}(0),\;\; q_k = \frac{1}{k!}\,q^{(k)}(0)\right)$$

має нетривіальний розв"язок відносно невідомих $X_0,\ldots,X_m$.

Доведення. Припустимо, що узагальнена функція /2/, для якої $x \neq 0$ є розв"язком рівняння /I/. Для знаходження невідомих коефіцієнтів x_k підставимо /2/ в /I/. Оскільки

$$t^n \delta^{(k)}(t) = \begin{cases} (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!}\, \delta^{(k-n)}(t), & n \le k \\ 0, & k < n, \end{cases} \qquad /5/$$

то можна замінити $p(t)$ і $q(t)$ поліномами

$$p_{m+1}(t) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} t^k, \qquad q_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{q^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Внаслідок цього одержуємо рівняння

$$t \sum_{k=0}^{m} x_k \delta^{(k+2)}(t) + \sum_{n=0}^{m+1} p_n t^n \sum_{k=0}^{m} x_k \delta^{(k+1)}(t) + \\ + \sum_{n=0}^{m} q_n t^n \sum_{k=0}^{m} x_k \delta^{(k)}(t) = 0.$$

Звідси з врахуванням формули /5/ випливає

$$-\sum_{k=0}^{m} (k+2) x_k \delta^{(k+1)}(t) + \sum_{n=0}^{m+1} (-1)^n p_n \sum_{k=0}^{m} \frac{(k+1)!}{(k+1-n)!} x_k \delta^{(k+1-n)}(t) + \\ + \sum_{n=0}^{m} (-1)^n q_n \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{(k-n)!} x_k \delta^{(k-n)}(t) = 0.$$

Зміна порядку сумування приводить до співвідношення

$$-\sum_{n=1}^{m+1} (n+1) x_{n-1} \delta^{(n)}(t) + \sum_{n=0}^{m+1} \frac{1}{n!} \delta^{(n)}(t) \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k (n+k)!\, p_k x_{n+k-1} + \\ + \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \delta^{(n)}(t) \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} (n+k-1)!\, q_{k-1} x_{n+k-1} = 0.$$

Збираючи коефіцієнти при однакових похідних $\delta^{(n)}(t)$ і прирівнюючи до нуля, запишемо

$$(p_0 - n - 1) x_{n-1} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \left[q_{k-1} - (n+k) p_k \right] \cdot (n+k-1)!\, x_{n+k-1} = 0. \qquad /6/$$

Залишається ввести позначення

$$X_n = n!\, x_n, \qquad /7/$$

щоб прийти до системи рівнянь /4/.

Останнє з них

$$(m+2-p_0) X_m = 0$$

повинно мати ненульовий розв"язок, оскільки порядок розв"язку /2/ дорівнює m . Отже, необхідність умов /3/ і /4/ доведена.

Достатність встановлюється просто: обираючи нетривіальний розв"язок системи /4/, складаємо узагальнену функцію

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} X_k \delta^{(k)}(t).$$

Підставляючи її у рівняння /1/, переконуємося в тому, що вона дійсно є розв"язком. Залишається показати, що його порядок дорівнює m, тобто $X_m \neq 0$. Нехай $X_m = 0$.

Оскільки

$$n+1+\rho_0 \neq 0 , \quad n = m, m-1, \ldots , 0,$$

то просуваючись від останнього рівняння системи /4/ до попередніх, виявляємо, що $X_{m-1} = 0$, $X_{m-2} = 0, \ldots, X_0 = 0$. Таким чином, у нетривіальному розв"язку системи /4/ $X_m \neq 0$.

Теорема 2. Вироджене гіпергеометричне рівняння [5,с.388]

$$t \frac{d^2x}{dt^2} + (b-t) \frac{dx}{dt} - ax = 0 \qquad /8/$$

має розв"язок скінченного порядку з носієм $t=0$ у тому і лише в тому випадку, коли коефіцієнти a, b – цілі додатні числа і $b > a+1$.

Доведення. Система /6/, яка відповідає рівнянню /8/, має вигляд

$$(a-1)x_0 = 0, \quad (b-n)x_{n-2} - (a-n)x_{n-1} = 0,$$

$$n = 2, \ldots, m+1, \quad (b-m-2)x_m = 0.$$

Для існування узагальненого розв"язку порядку m необхідно і достатньо, щоб ця система мала нетривіальний розв"язок, в якому $x_m \neq 0$. Тому повинна виконуватись умова

$$b = m+2. \qquad /9/$$

Це означає, що параметр b є натуральним числом, причому $b \geq 2$.

Обираючи довільне $x_m \neq 0$, визначаємо решту невідомих величин

$$x_{m-k} = \frac{(a-m-1)(a-m)\dots(a-m+k-2)}{k!}\, x_m, \quad k \geq 1.$$

Оскільки $(a-1)x_0 = 0$, то розглянемо два випадки: $a=1$ і $a \neq 1$. У першому з них можна прийняти $x_0 \neq 0$. Тоді всі інші коефіцієнти $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1$ також відмінні від нуля. Якщо ж $a \neq 1$, то $x_0 = 0$ і

$$(a-m-1)(a-m)\dots(a-2)x_m = 0.$$

Тому що $x_m \neq 0$, то параметр a повинен дорівнювати одному з чисел 2, 3, ..., m, $m+1$. Отже, у будь-якому випадку a – натуральне число і

$$a \leq m+1. \qquad /10/$$

З порівняння /9/ і /10/ одержуємо $b \geq a+1$. Повертаючись до величин x_{m-k}, можна записати

$$x_{m-k} = (-1)^k \binom{b-a-1}{k} x_m, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Таким чином, шуканий розв"язок вдається записати у явній формі

$$x(t) = C\left(\frac{d}{dt} - 1\right)^{b-a-1} \delta^{(a-1)}(t), \quad C = const \neq 0.$$

У застосуваннях трапляються рівняння [5,с.386]

$$t\,\frac{d^2x}{dt^2} + a\,\frac{dx}{dt} + btx = 0. \qquad /11/$$

Воно споріднене з рівнянням Бесселя, зводиться до нього за допомогою деякої підстановки.

Теорема 3. Рівняння /11/, в якому $b \neq 0$, має розв"язок виду /2/ тоді і лише тоді, коли коефіцієнт a є додатним парним числом.

Доведення. Рівняння /11/ належить до типу /1/ з коефіцієнтами

$$p_0 = a, \quad p_k = 0, \quad (k \geq 1),$$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = b, \quad q_k = 0, \quad (k \geq 2).$$

Визначаюча система /4/

$$
\begin{gathered}
bX_1 = 0, \\
(2-a)X_0 + bX_2 = 0, \\
2(3-a)X_1 + bX_3 = 0, \\
3(4-a)X_2 + bX_4 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(m-1)(m-a)X_{m-2} + bX_m = 0, \\
m(m+1-a)X_{m-1} = 0, \\
(m+2-a)X_m = 0.
\end{gathered}
$$

Перше рівняння дає $X_1 = 0$. Просуваючись далі вздовж рівнянь системи, знаходимо, що усі невідомі з непарними індексами дорівнюють нулеві. Таким чином, розв"язок $x(t)$ рівняння /II/ містить лише похідні парного порядку δ -функції. Отже, порядок m - парне число. Вимога $X_m \neq 0$ потребує рівності

$$a = m+2.$$

Але $m = 2n$. Тому $a = 2(n+1)$.

Застосування підстановки /7/ дає

$$
\begin{gathered}
(a-2)x_0 = 2bx_2, \quad (a-4)x_2 = 4bx_4, \\
(a-6)x_4 = 6bx_6, \dots, (a-m)x_{m-2} = mbx_m.
\end{gathered}
$$

Оскільки $a = m+2$, то

$$x_{m-2k} = \binom{\frac{m}{2}}{k} b^k x_m, \quad k = 0, \dots, \frac{m}{2}.$$

Підставляючи ці коефіцієнти у /2/, остаточно знайдемо формулу для розв"язку $x(t)$

$$x(t) = C\left(\frac{d^2}{dt^2} + b\right)^{\frac{a-2}{2}} \delta(t), \quad C = const \neq 0.$$

С п и с о к   л і т е р а т у р и : І. А л и е в Ф.С. О решениях некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций. - Вестн.Моск.ун-та, сер. матем., механ., 1973, № 3, 5. 2. Б о г о л ю б о в Н.Н., Ш и р о к о в Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1974. 3. В и н е р И.Я. Решения линейных систем в обобщенных функциях. - Дифференциальные уравнения, 1975, II, № 6. 4. Г е л ь ф а н д И.М., Ш и л о в Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958. 5. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971. 6. Ш в а р ц Л. Математические методы для физических наук. М., Мир, 1965.

УДК 517.926

І.П.Пустомельников

ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Відомо [3], що розв"язана відносно похідних лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з нескінченно диференційованими коефіцієнтами не має інших розв"язків в узагальнених функціях, крім класичних. Але в рівняннях з особливостями в коефіцієнтах можуть появлятися нові розв"язки в узагальнених функціях [1,2]. У цій роботі викладена методика знаходження розв"язків виду скінченої лінійної комбінації дельта-функції та її похідних лінійних систем диференціальних рівнянь. Виявлена ознака існування зводиться до розв"язання деякої системи матричних рівнянь і дає змогу досить просто обчислити шуканий розв"язок.

Теорема 1. Нехай у системі

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)x, \qquad /1/$$

де $x(t) \in N$ – мірний вектор; $A(t)$, $B(t)$ – матриці порядку $(N \times N)$, неперервно диференційовані відповідно $m+1$ і m–раз у деякому околі точки t_0, $A(t_0) = 0$. Тоді, якщо існує розв"язок

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} x_k \delta^{(k)}(t-t_0), \quad x_m \neq 0, \qquad /2/$$

то матриця $B(t_0) + (m+1)A'(t_0)$ – вироджена. Обернено, якщо $m+1$ – найменший цілий додатний корінь рівняння