циальные уравнения, 1975, II, № 6. 4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958. 5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971. 6. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М., Мир, 1965.

УДК 517.926

І.П.Пустомельников

ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Відомо [3], що розв"язана відносно похідних лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з нескінченно диференційованими коефіцієнтами не має інших розв"язків в узагальнених функціях, крім класичних. Але в рівняннях з особливостями в коефіцієнтах можуть появлятися нові розв"язки в узагальнених функціях [1,2]. У цій роботі викладена методика знаходження розв"язків виду скінченої лінійної комбінації дельта-функції та її похідних лінійних систем диференціальних рівнянь. Виявлена ознака існування зводиться до розв"язання деякої системи матричних рівнянь і дає змогу досить просто обчислити шуканий розв"язок.

Теорема 1. Нехай у системі

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)x, \qquad /1/$$

де $x(t) \in N$ – мірний вектор; $A(t), B(t)$ – матриці порядку $(N \times N)$, неперервно диференційовані відповідно $m+1$ і m-раз у деякому околі точки t_0, $A(t_0) = 0$. Тоді, якщо існує розв"язок

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} x_k \delta^{(k)}(t-t_0), \quad x_m \neq 0, \qquad /2/$$

то матриця $B(t_0) + (m+1)A'(t_0)$ – вироджена. Обернено, якщо $m+1$ – найменший цілий додатний корінь рівняння

$$\det\left(B(t_0)+\lambda A'(t_0)\right)=0, \qquad /3/$$

то розподіл /2/ є розв"язком системи /I/.

Доведення. Припустимо, що узагальнена вектор-функція /2/ є розв"язком системи /I/. Підставивши її в /I/, знайдемо невідомі вектори x_k. Запишемо $A(t)$ і $B(t)$ за формулою Тейлора в околі точки t_0

$$A(t)=\sum_{n=1}^{m+1} A_n (t-t_0)^n + R_{m+1}(A),$$
$$B(t)=\sum_{n=0}^{m} B_n (t-t_0)^n + R_m(B).$$

Сумування у першій з цих формул починається з $n=1$, оскільки $A(t_0)=0$. Тому що залишкові члени $R_{m+1}(A)$ і $R_m(B)$ обертаються в нуль у точці t_0 разом з усіма своїми похідними до порядків $m+1$ і m включно

$$(t-t_0)^n\,\delta^{(k)}(t-t_0)=0, \quad k<n,$$

то для будь-якої функції $x(t)$ виду /2/

$$R_m(B)\,x(t)=0, \quad R_{m+1}(A)\,x'(t)=0. \qquad /4/$$

Підставляючи шуканий розв"язок /2/ у рівняння /I/ і враховуючи співвідношення /4/, одержуємо

$$A_{m+1}(t)\frac{dx}{dt}=B_m(t)x, \qquad /5/$$

де

$$A_{m+1}(t)=\sum_{n=1}^{m+1} A_n (t-t_0)^n, \quad B_m(t)=\sum_{n=0}^{m} B_n (t-t_0)^n.$$

Обчислимо тепер похідні розподілу $\delta^{(k)}(t-t_0)$ на будь-яку нескінченно диференційовану функцію $a(t)$. Для цього розглянемо значення функціонала $a(t)\delta^{(k)}(t-t_0)$ на фінітній нескінченно диференційованій функції $\varphi(t)$. Маємо

$$\langle a(t)\delta^{(k)}(t-t_0), \varphi(t)\rangle=\langle \delta^{(k)}(t-t_0), a(t)\varphi(t)\rangle,$$
$$\langle \delta^{(k)}(t-t_0), a(t)\varphi(t)\rangle=(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\left[a(t)\varphi(t)\right]\Big|_{t=t_0}$$

Застосовуючи формулу Лейбніца для похідної добутку функцій, знаходимо

$$\langle a(t)\delta^{(k)}(t-t_0), \varphi(t)\rangle = (-1)^k \sum_{n=0}^{k} C_k^n a^{(k-n)}(t_0)\varphi^{(n)}(t_0).$$

Але

$$\varphi^{(n)}(t_0) = (-1)^n \langle \delta^{(n)}(t-t_0), \varphi(t)\rangle.$$

Тому

$$a(t)\delta^{(k)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n a^{(k-n)}(t_0)\delta^{(n)}(t-t_0).$$

Використання цієї рівності дає

$$A_{m+1}(t)\delta^{(k+1)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{k+1-n} C_{k+1}^n A_{m+1}^{(k+1-n)}(t_0)\delta^{(n)}(t-t_0),$$

$$B_m(t)\delta^{(k)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n B_m^{(k-n)}(t_0)\delta^{(n)}(t-t_0).$$

Таким чином, після підстановки виразу /2/ в систему /I/ маємо

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{k+1-n} C_{k+1}^n A_{m+1}^{(k+1-n)}(t_0) x_k \delta^{(n)}(t-t_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n B_m^{(k-n)}(t_0) x_k \delta^{(n)}(t-t_0).$$

Оскільки

$$\frac{A_{m+1}^{(k+1-n)}(t_0)}{(k+1-n)!} = A_{k+1-n}, \quad \frac{B_m^{(k-n)}(t_0)}{(k-n)!} = B_{k-n}, \text{ то}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{k+1-n}(k+1) \frac{A_{k+1-n}}{n!} x_k \delta^{(n)}(t-t_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} \frac{B_{k-n}}{n!} x_k \delta^{(n)}(t-t_0).$$

При $n = k+1$ у лівій частині рівності містяться доданки з коефіцієнтом A_0, який дорівнює нулеві. Отже, останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{k-n}}{n!} (B_{k-n} + (k+1)A_{k+1-n}) x_k \delta^{(n)}(t-t_0) = 0.$$

Тут зручно поміняти порядок сумування

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(t-t_0) \sum_{k=n}^{m} (-1)^k (B_{k-n} + (k+1)A_{k+1-n}) x_k = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при всіх похідних $\delta^{(n)}(t-t_0)$, прийдемо до системи матричних рівнянь для знаходження невідомих векторів x_k

$$
\begin{gathered}
(B_0+A_1)x_0-(B_1+2A_2)x_1+(B_2+3A_3)x_2-\dots+(-1)^m(B_m+(m+1)A_{m+1})x_m=0\\
(B_0+2A_1)x_1-(B_1+3A_2)x_2+\\
+(B_2+4A_3)x_3+(-1)^{m-1}(B_{m-1}+(m+1)A_m)x_m=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(B_0+mA_1)x_{m-1}-(B_1+(m+1)A_2)x_m=0,\\
(B_0+(m+1)A_1)x_m=0
\end{gathered}
\qquad /6/
$$

У зв"язку з тим, що $x_m \neq 0$, матриця $B_0+(m+1)A_1$ повинна бути особливою. Необхідність доведена. Достатність встановлюється просто. Якщо число $m+1$ є найменшим цілим додатним коренем співвідношення /3/, то останнє рівняння системи /6/ має нетривіальний розв"язок x_m.

Підставляючи x_m в передостаннє рівняння, можемо знайти вектор x_{m-1}, оскільки матриця B_0+mA_1 не вироджена. Продовжуючи цей процес, визначимо усі вектори x_m, $x_{m-1},\dots,x_1,x_0$. Розв"язання відповідних рівнянь забезпечується умовою

$$\det(B_0+kA_1)\neq 0,\quad k=1,2,\dots,m.$$

Залишається зауважити, що, якщо матриця $B(t)$ стала і $A(t)=(t-t_0)E$, система /6/ розпадається на незалежні рівняння

$$(B+E)x_0=0,\quad (B+2E)x_1=0,\dots,$$

$$(B+(m+1)E)x_m=0.$$

У цьому випадку необхідною і достатньою умовою існування розв"язку порядку m системи /I/ є виродженість матриці $B+(m+1)E$.

Доведена теорема узагальнює результати статті [2].

Приклад I. Для системи

$$t\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}x$$

з особливою точкою $t_0 = 0$ маємо

$$B + (m+1)E = \begin{pmatrix} m-4 & 4 \\ -3 & m+3 \end{pmatrix}.$$

Рівняння

$$\det\left(B + (m+1)E\right) = m^2 - m = 0$$

має цілі невід"ємні корені $m = 0,\ m = 1$. Тому існує розв"язок

$$x(t) = x_0 \delta(t) + x_1 \delta'(t),$$

в якому x_0 і x_1 – власні вектори матриці $B + (m+1)E$, що відповідають власним значенням $m = 0$ і $m = 1$. Обчислення дають

$$x_0 = C_0 \binom{1}{1}, \quad x_1 = C_1 \binom{4}{3},$$

де C_0, C_1 – довільні сталі.

Приклад 2. Диференціальне рівняння

$$\sin t \frac{dx}{dt} = -x \cos t$$

має зчисленну множину особливих точок

$$t_n = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Виписуємо величини

$$A(t) = \sin t, \qquad B(t) = -\cos t,$$

$$A'(t_n) = (-1)^n, \qquad B(t_n) = (-1)^{n+1}.$$

Характеристичне рівняння $B(t_n) + (m+1)A'(t_n) = 0$ має єдиний цілий невід"ємний корінь $m = 0$. Отже, вихідне рівняння має розв"язок

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t - n\pi)$$

з довільними сталими коефіцієнтами C_n.

Теорема 2. Система диференціальних рівнянь [4, с.535]

$$t\frac{dx}{dt} = -2x, \quad t\frac{dy}{dt} = (t+2)x + ty$$

має розв"язок

$$x = c\delta'(t), \quad y = -c\delta'(t),$$

де c – довільна стала.

Доведення. Особливою точкою системи є $t_0=0$. Обчислимо матриці

$$A_1 = A'(0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B_0 = B(0) = \begin{pmatrix}-2&0\\2&0\end{pmatrix},$$

$$B_1 = B'(0) = \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad A_k = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B_k = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad k>1$$

Єдиним цілим невід"ємним коренем рівняння

$$\det\left(B_0 + (m+1)A_1\right) = 0$$

є $m=1$. Тому система /7/ має своїм розв"язком розподілення першого порядку

$$x(t) = a_1\delta(t) + b_1\delta'(t),$$

$$y(t) = a_2\delta(t) + b_2\delta'(t).$$

Для знаходження векторів

$$x_0 = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\quad x_1 = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

звернемося до системи /6/, яка має у цьому випадку вигляд

$$(B_0 + A_1)x_0 - B_1 x_1 = 0,\quad (B_0 + 2A_1)x_1 = 0.$$

Друге з цих рівнянь дає $b_2 = -b_1$. Переходячи до першого рівняння, одержуємо

$$\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\-b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

звідки $a_1 = a_2 = 0$. Теорема доведена.

На закінчення, наведемо приклад системи [4,с.540]

$$at\frac{dx}{dt} = bc(y-z),$$

$$bt\frac{dx}{dt} = ca(z-x),$$

$$ct\frac{dx}{dt} = ab(x-y),$$

який не має розв"язків типу /2/, не зважаючи на наявність особливої точки $t_0=0$. Справді, рівняння

$$\det\left(B(0) + \lambda A'(0)\right) = \begin{vmatrix}\lambda a & bc & -bc\\ -ca & \lambda b & ca\\ ab & -ab & \lambda c\end{vmatrix} = 0,$$

яке перетворюється до виду

$$abc\,s(s^2+a^2+b^2+c^2)=0,$$

не має цілих додатних коренів. Тому, згідно з першою теоремою, розв"язки в класі розподілу скінченного порядку відсутні.

С п и с о к   л і т е р а т у р и: 1. А л и е в Ф.С. О решениях некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций. - Вестн.Москов. ун-та, сер. матем., механ., 1975, II, № 6. 2. В и н е р И.Я. Решение линейных систем в обобщенных функциях. - Дифференциальные уравнения, 1975, т.II, № 6. 3. Г е л ь ф а н д И.М., Ш и л о в Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958. 4. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971.