ISSN 0201—758X
0320—6572

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК 14

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

1979

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 14

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ
УНІВЕРСИТЕТІ ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1979

УДК 5I3

Математический анализ и его приложение, вып.I4. – Вестник Львов.ун-та. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, I979, с.II6+I0 /на укр.яз./.

В Вестнике помещены статьи по теории функций, алгебры, теории вероятностей, дифференциальных уравнений и теории упругости.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Відповідальний за випуск доц. Є.М.Парасюк.

Адреса редакційної колегії: 290000, м.Львів, вул.Університетська, I, кафедра диференціальних рівнянь.

В $\dfrac{20203\text{-}0I4}{М225/04/\text{-}79}$ I7020I0000

УДК 517.512

В.Й.Гукевич

РІВНІСТЬ ПАРСЕВАЛЯ І ТЕОРЕМА ФІШЕРА-РИСА ДЛЯ МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Як відомо [1, с.444], систему $\{\varphi_n(x)\}$ нормованих на $[a,b]$ функцій називаємо системою, майже ортогональною за Белманом /МОБ/, якщо $A=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2<\infty$, де

$$a_{ik}=\begin{cases}\int_a^b\varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx\,, & k\neq i\\ 0\,, & k=i\end{cases}\,. \qquad /1/$$

Надалі припускаємо, що

$$A<1\,. \qquad /2/$$

Лема. Нехай $\varphi(x)\in L_2[a,b]$ і $\{\varphi_k(x)\}$ МОБ система функцій, що задовольняє умову /2/.
Справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}^2\leq\frac{\int_a^b\varphi^2(x)\,dx}{1-\sqrt{A}}\,,$$

де α_{kn} – коефіцієнти найкращого середньоквадратичного наближення функції $\varphi(x)$ узагальненими многочленами виду $\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)$.

Доведення. Як відомо [1,с.91], для того щоб узагальнений многочлен $\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\varphi_k(x)$ був многочленом найкращого середньоквадратичного наближення функції $\varphi(x)$ агрегатами виду $\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)$, необхідно і достатньо задовольнити рівності

$$c_i=\alpha_{in}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}a_{ik}\,,\quad i=1,2,\ldots n,\ldots,\ldots, \qquad /3/$$

де $c_i=\int_a^b\varphi_i(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$

Але

$$0\leq\int_a^b\Big[\varphi(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\varphi_k(x)\Big]^2dx=\int_a^b\varphi^2(x)\,dx-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}c_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}^2+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\alpha_{sn}a_{ks}\,.$$

Беручи до уваги /3/, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}^{2} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} \alpha_{sn} a_{ks} \leq \int_a^b \varphi^2(x)\, dx.$$

Застосовуючи нерівність Шварца і нерівність /2/, маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}^{2} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{kn} \alpha_{ns} a_{ks} \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} (1-\sqrt{A}).$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}^{2} \leq \frac{\int_a^b \varphi^2(x)\, dx}{1-\sqrt{A}}.$$

Теорема I. Нехай $\{\varphi_i(x)\}$ повна система МОБ на $[a,b]$ функцій, що задовольняють умову /2/,

$$\varphi(x) \in L_2[a,b] \qquad і \quad c_i = \int_a^b \varphi(x) \varphi_i(x)\, dx, \quad i=1,2,\dots$$

Існує єдина послідовність $\{\alpha_i\} \in l_2$, яка є розв"язком безконечної системи

$$c_i = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_{ik}, \qquad k=1,2,\dots \qquad /4/$$

При цьому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ збігається в середньому до $\varphi(x)$ на $[a,b]$ і наявна рівність /типу/ Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i c_i = \int_a^b \varphi^2(x)\, dx.$$

Доведення. Оскільки система $\{\varphi_i(x)\}$ МОБ, то, як відомо [I,с.445], $\{c_k\} \in l_2$. Беручи це до уваги, а також нерівність /2/, та застосовуючи "принципи нерухомої точки" до системи /4/ [2,с.389], приходимо до висновку про існування єдиного, належного l_2, розв"язку системи /4/. Позначимо цей розв"язок через $\{\alpha_i\}$.

Нехай $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} \varphi_k(x)$ – узагальнений многочлен найкращого середньоквадратичного наближення функції $\varphi(x)$ узагальненими многочленами виду $\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k(x)$.

Оскільки $\{\alpha_i\}$ – розв"язок системи /4/, який належить l_2, то беручи до уваги /3/, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} c_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} \Big(\alpha_k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ik}\Big) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big(\alpha_{kn} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} a_{ik}\Big) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_k \alpha_{in} a_{ik}.$$

І далі, з огляду на нерівність Шварца та леми,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_k\alpha_{in}a_{ik}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_{kn}a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{A}}{1-\sqrt{A}}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}c_k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad /5/$$

Але система $\{\varphi_i(x)\}$ повна, тому

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[\varphi(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}\varphi_k(x)\right]^2 dx = 0;$$

з останнього маємо

$$\int_a^b\varphi^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[2\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}c_k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\alpha_{kn}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}a_{ik}\right)\right],$$

що разом з /5/ завершує доведення теореми.

Розглянемо ще рівність Парсеваля для суми, різниці та добутку двох функцій.

Теорема 2. Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ повна на $[a,b]$ МОБ система функцій, що задовольняє умову /2/, $f_1(x)$, $f_2(x)$ належить $L_2[a,b]$,

$$c_k^{f_i} = \int_a^b f_i(x)\varphi_k(x)dx, \qquad \begin{matrix}k=1,2,\dots\\ i=1,2\end{matrix}$$

і $\{\alpha_k^{f_i}\}$ – розв"язок безконечної системи

$$c_k^{f_i} = x_k + \sum_{i=1}^{\infty}x_i a_{ki}, \qquad \begin{matrix}k=1,2,\dots\\ i=1,2.\end{matrix} \qquad /6/$$

Справедливі рівності

$$\int_a^b[f_1(x)+f_2(x)]^2dx = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{f_1}+\alpha_k^{f_2})(c_k^{f_1}+c_k^{f_2}); \qquad /7/$$

$$\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]^2dx = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{f_1}-\alpha_k^{f_2})(c_k^{f_1}-c_k^{f_2}); \qquad /8/$$

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{f_2} c_k^{f_1} + \alpha_k^{f_1} c_k^{f_2}). \qquad /9/$$

Доведення. Зупинимось на доведенні рівності /7/ /доведення /8/ аналогічне/ $f_1(x), f_2(x) \in L_2[a,b]$ система $\{\varphi_n(x)\}$ є МОБ на $[a,b]$, тому $\{C_k^{f_i}\}$ є l_2 $i=1,2$ [1,с.445], оскільки, крім цього, задовольняється нерівність /2/, то система /6/ має єдиний, приналежний l_2 розв"язок $\{\alpha_k^{f_i}\}$ $i=1,2$ [2,с.381].

Функція $f_1(x)+f_2(x)$ також належить $L_2[a,b]$ і тому $\{C_k^{f_1+f_2}\} \in l_2$, де $C_k^{f_1+f_2} = \int_a^b [f_1(x)+f_2(x)] dx$, $k=1,2,\dots$.

З останнього та нерівності $A<1$ знову випливає, що в просторі l_2 існує єдиний розв"язок безконечної системи

$$C_k^{f_1+f_2} = x_k + \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ik} \qquad k=1,2,\dots \quad /В/.$$

Але $C_k^{f_1+f_2} = C_k^{f_1} + C_k^{f_2}$ і $\{\alpha_k^{f_i}\}$ $(i=1,2)$ є розв"язком системи /6/.

Звідси одержуємо, що послідовність $\{\alpha_k^{f_1} + \alpha_k^{f_2}\}$ задовольняє систему /В/.

Але розв"язок системи /В/ єдиний в l_2, тому $\{\alpha_k^{f_1+f_2}\} = \{\alpha_k^{f_1} + \alpha_k^{f_2}\}$.

З останнього, застосовуючи теорему I, дістаємо рівність /7/.

Шляхом віднімання від рівності /7/ рівності /8/, отримуємо рівність /9/.

Теорема 3. Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ МОБ система функцій на $[a,b]$, яка задовольняє умову /2/.

Якщо для кожної функції $f(x) \in L_2[a,b]$ справедлива рівність Парсеваля, то система $\{\varphi_k(x)\}$ замкнена /а отже, і повна/ в $L_2[a,b]$.

Доведення. Нехай $f(x) \in L_2[a,b]$.

Розглянемо $\int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)]^2 dx$, де $C_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx$ і $\{\alpha_k\}$, приналежний l_2, розв"язок системи

$$C_k = x_k + \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ik}, \qquad k=1,2,\dots,$$

$$\int_a^b [f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \varphi_k(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\alpha_k + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{ki}) = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i a_{ki}.$$

Оцінимо суму $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i a_{ki}$. Застосовуючи нерівність Шварца, а також беручи до уваги, що $\{\alpha_k\} \in l_2$, $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}^2 < \infty$, одержуємо рівність $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i a_{ki} = 0$.

Таким чином, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \varphi_k(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k$.

Але для функції $f(x)$ справедлива рівність Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\alpha_k c_k.$$

Тому остаточно одержуємо $\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \varphi_k(x)]^2 dx = 0$.

Замкненість системи $\{\varphi_k(x)\}$ в $L_2[a,b]$ доведена.

Теорема 4. Нехай $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ і $\{\varphi_i(x)\}$ МОБ на $[a,b]$ система функцій, що задовольняє умову /2/.

Існує функція $f(x) \in L_2[a,b]$, для якої

$$c_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx \qquad i = 1, 2, \dots$$

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$c_k = x_k + \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ik} \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ і $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 = \lambda < 1$, то ця система має єдиний в l_2 розв"язок $\{\alpha_k\}$ [2,с.389]. Розглянемо $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \varphi_k(x)$ і покажемо, що $\| S_n(x) - S_m(x) \| \to 0$, коли $n, m \to \infty$. Дійсно, застосовуючи нерівність Шварца і беручи до уваги, що $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 = \lambda$, одержуємо

$$\left|\int_a^b \sum_{i=m}^{n}\alpha_i \varphi_i(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|\sum_{i=m}^{n}\alpha_i \varphi_i(x)\right| dx \leq \sqrt{b-a}\left(\sum_{i=m}^{n}\alpha_i^2 + \sum_{i=m}^{n}\sum_{k=m}^{n}\alpha_i\alpha_k a_{ki}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{b-a}\sqrt{\sum_{i=m}^{n}\alpha_i^2(1+\lambda)} \to 0, \text{ коли } n, m \to \infty.$$

Таким чином, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \| S_n - S_m \| = 0$. З цього випливає, що послідовність $\{ S_n(x) \}$ сильно збігається в $L_2\,[\alpha, \beta]$.

Але простір $L_2\,[\alpha,\beta]$ повний, тому існує функція $f(x) \in L_2\,[a,\beta]$ для якої

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = 0. \qquad /C/$$

Розглянемо $\int_a^b [f(x) - S_n(x)]\,\varphi_i(x)\,dx$,

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)\varphi_i(x)\,dx = \alpha_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_{ik} = C_i .$$

Беручи до уваги останнє, отримуємо

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx - C_i = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)]\varphi_i(x)\,dx - \int_a^b [\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)]\varphi_i(x)\,dx,$$

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx - C_i \right| \leq \| f(x) - S_n(x) \| \, \| \varphi_i(x) \| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k a_{ki} \right|.$$

Але з огляду на рівність /C/ $\| f - S_n \| \to 0,\ n\to\infty$; крім цього, $\{\alpha_k\} \in l_2$.

Тому

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k a_{ki} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{ki}^2} \leq A \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \text{ коли } n\to\infty.$$

Таким чином,

$C_i = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$, $i = 1, 2, \ldots$, що треба було довести.

Зауваження. Якщо система $\{\varphi_i(x)\}$ повна, то функція $f(x)$, існування якої гарантує теорема 4 , буде єдиною в $L_2\,[\alpha,\beta]$. Теорема 4 є узагальненням теореми Фішера–Риса на майже ортогональні за Белманом системи.

Список літератури: I. Качмах С. Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1956. 2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Физматгиз, 1950.

УДК 517.512

В.И. Гукевич

ПРО РОЗПОДІЛ ДОДАТНИХ І ВІД"ЄМНИХ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ ПОВНОЇ МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Відома така теорема В.Я.Козлова [3]:

якщо система $\{f_n(x)\}$ ортогонормована та повна на [0,1], то ряди $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n^+(x)]^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n^-(x)]^2$, де

$$f_n^+(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{коли } f_n(x)\geq 0, \\ 0, & \text{коли } f_n(x)<0, \end{cases}$$

і $f_n^-(x)=f_n(x)-f_n^+(x)$,

збігаються майже всюди на [0,I].

Розглянемо узагальнення цієї теореми на системи, майже ортогональних за Белманом /МОБ/ функцій.

Як відомо [2,с.444], систему $\{\varphi_n(x)\}$ нормованих на $[a,b]$ функцій називаємо системою МОБ, якщо $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2<\infty$, де

$$a_{ik}=\begin{cases} \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_i(x)dx, & k\neq i \\ 0, & k=i \end{cases} \qquad /1/$$

Далі припускаємо, що система $\{\varphi_n(x)\}$ задовольняє умову

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}^2=A<1. \qquad /2/$$

Розглянемо деякі означення і твердження. Нехай $\mathcal{P}$ - зведена, досконала множина додатної міри; $\bar{M}(\mathcal{P})$ - множина обмежених функцій, які задані на $\mathcal{P}$ і для яких множина точок, де M - коливання [I] додатне, є множиною другої категорії.

Лема I. Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ неперервних на $\mathcal{P}$ функцій збігається по нормі L_2 до $f(x)$, де $f(x)$ є $\bar{M}(\mathcal{P})$, то ця послідовність є розбіжною на $\mathcal{P}$ на множині другої категорії.

Лема 2. Нехай $\{\varphi_n(x)\}$ повна, МОБ на $[a,b]$ система функцій, що задовольняє нерівність /2/, $\varphi(x)\in L_2[a,b]$ і

$$c_i=\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_\kappa(x)dx\,, \quad i=1,2,\dots$$

Існує єдина в просторі l_2 послідовність, яка є розв"язком безконечної системи

$$c_i=x_i+\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa a_{i\kappa}\,, \quad i=1,2,\dots \qquad /3/$$

При цьому ряд $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\alpha_\kappa\varphi_\kappa(x)$ збігається в середньому до $\varphi(x)$ і наявна рівність Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i c_i=\int_a^b\varphi^2(x)dx\,.$$

Доведення леми I див. у [3], а леми 2 в [I].

Теорема. Нехай $\{\varphi_n(x)\}$ МОБ система функцій, що задовольняє умову /2/. Тоді ряди $\sum_{\kappa=1}^{\infty}[\varphi_\kappa^+(x)]^2$ і $\sum_{\kappa=1}^{\infty}[\varphi_\kappa^-(x)]^2$, де

$$\varphi_\kappa^+(x)=\begin{cases}\varphi_\kappa(x), & \text{коли } \varphi_\kappa(x)\geq 0\,,\\ 0\,, & \text{коли } \varphi_\kappa(x)<0\,,\end{cases}$$

і $\varphi_\kappa^-(x)=\varphi_\kappa(x)-\varphi_\kappa^+(x)$, розбігаються майже всюди на $[0,I]$.

Зупинимось на доведенні розбіжності майже всюди ряду $\sum_{\kappa=1}^{\infty}[\varphi_\kappa^+(x)]^2$. Доведення розбіжності ряду $\sum_{\kappa=1}^{\infty}[\varphi_\kappa^-(x)]^2$ аналогічне.

Як і в [3], припустимо протилежне, а саме, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2$ збігається на множині $\mathcal{P}$ додатної міри і через $\mathcal{P}_1$ позначимо таку множину, що $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}$, $mes\,\mathcal{P}_1>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2<M$, для $x\in\mathcal{P}_1$ та всі функції $\{\varphi_n(x)\}$ неперервні на $\mathcal{P}_1$.

Далі розглянемо функцію $\psi(x)$ невід"ємну, нормовану на $[0,I]$, яка зовні $\mathcal{P}_1$ дорівнює нулеві.

Оцінюючи коефіцієнти Фур"є функції $\psi(x)$ по системі $\{\varphi_n(x)\}$, дістаємо

$$c_n=\int_a^b\psi(x)\varphi_n(x)dx=\int_{\mathcal{P}_1}\psi(x)\varphi_n^+(x)dx+ \qquad /4/$$

$$+\int_{\mathcal{P}_1}\psi(x)\varphi_n^-(x)dx=c_n^+ + c_n^-\,,$$

$$C_n^{+2} \leq \left[\int_{\beta_1} \psi(x)\varphi_n^+(x)dx\right]^2 \leq \int_a^\beta [\varphi_n^+(x)]^2 dx = \lambda_n,$$

причому $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \leq M.$$

Згідно з лемою 2, існує єдиний належний l_2 розв"язок системи

$$c_i = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_{ik}, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Позначимо цей розв"язок через $\{\alpha_i\}$. Нехай далі для будь-якої послідовності $\{\gamma_i\}$

$$\gamma_i^+ = \begin{cases} \gamma_i, & \text{коли } \gamma_i \geq 0, \\ 0, & \text{коли } \gamma_i < 0, \end{cases}$$

і $\gamma_i^- = \gamma_i - \gamma_i^+$.

Беручи до уваги /2/, маємо

$$\alpha_k = c_k - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\alpha_i = \beta_k^+ + \beta_k , \quad \text{де}$$

$$\beta_k^+ = c_k^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\alpha_i^- - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^-\alpha_i^+ , \qquad /5/$$

$$\beta_k^- = c_k^- - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^+ \alpha_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^-\alpha_i^- , \quad \beta_k^+ \geq 0, \quad \beta_k^- \leq 0.$$

Враховуючи /4/ і застосовуючи нерівність Шварца, дістаємо

$$\beta_k^{+2} \leq 3\left[\lambda_k^2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^{-2} \left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{-2} + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{+2}\right)\right]. \qquad /6/$$

Розглянемо праву частину нерівності /6/. Зауважимо, що

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{+2} + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{-2} \leq 2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2 , \qquad /7/$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\alpha_k a_{ki}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\alpha_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}^2} \leq A\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2 , \qquad /8/$$

де $0 \leq A < 1$.

Але, згідно з лемою 2,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i c_i = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\left(\alpha_i - \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k a_{ik}\right) = \int_0^1 \psi^2(x)dx = 1.$$

З останнього, використовуючи нерівність /8/, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2 \leq \frac{1}{1-\sqrt{A}} .$$

З /6/, /7/ і останньої нерівності /8/ одержуємо

$$\beta_k^{+2} \leq 3\left(\lambda_k^2 + \frac{2}{1-\sqrt{A}} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik}^2\right) = \mu_k^2 ,$$

де ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2$ задовольняє нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < 3\left(M + \frac{2A}{1-\sqrt{A}}\right)$$

і не залежить від функції $\Psi(x)$, а тільки від системи $\{\varphi_n(x)\}$. Далі показуємо, що оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k^+(x)$ збігається всюди на $\mathcal{P}_1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k^-(x)$ збігається в середньому на $\mathcal{P}_1$ і, будучи постійного знаку на $\mathcal{P}_1$, збігається майже всюди на $\mathcal{P}_1$.

Відтак, міркуючи як у [3], фіксуємо додатне число K і таку зведену додатної міри множину $\mathcal{P}_2$, щоб $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ і

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k^-(x)\right| < K \qquad \text{на } \mathcal{P}_2 .$$

Далі припускаємо, що функція $\Psi(x)$ належить $\tilde{M}_2(\mathcal{P})$ і, крім цього, задовольняє всі попередні властивості, тобто є нормованою і додатною на $\mathcal{P}_1$, і зовні $\mathcal{P}_1$ повертається в нуль.

Тепер вже нетрудно завершити доведення. Справді, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ записуємо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^+ \varphi_k^+(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^- \varphi_k^-(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^+ \varphi_k^-(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^- \varphi_k^-(x). \qquad /9/$$

Розглянемо ряди у правій частині /9/. Проводячи міркування, як і в [3], показуємо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ збігається на $\mathcal{P}_2$ всюди, крім множини першої категорії.

Але останнє приводить нас до протиріччя. Справді, послідовність $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right\}$ неперервна на $\mathcal{P}_2$, $\Psi(x) \in \tilde{M}_2(\mathcal{P}_2)$, а тому, беручи до уваги лему І, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ розбігається на множині другої категорії на $\mathcal{P}_2$. Таким чином, припущення про те, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_n^+(x)]^2$ збіжний на множині додатної міри, привело нас до протиріччя.

Список літератури: І. Гукевич В.И. Рівність Парсеваля і теореми Фішера-Риса для майже ортогональних рядів. – У цьому ж Віснику. 2. Качмах С.И., Штейнгауз Т. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1956. 3. Козлов В.Я. О распределении положительных и отрицательных и нормированных функций, образующих полную систему. – Математический сборник, 1948, № 23. 4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Физматгиз, 1950.

УДК 517.535.4

А.А.Гольдберг, О.Н.Фрідман

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ З ДОДАТНИМИ НУЛЯМИ ТА ВІД"ЄМНИМИ ПОЛЮСАМИ

А.Бернштейн [4] висловив таку гіпотезу: нехай f – мероморфна функція з додатними нулями та від"ємними полюсами, така, що $T(r,f) \sim r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ – певний уточнений порядок, $\rho(r) \to \rho$, $0<\rho<1$. Тоді існують такі додатні сталі A і B, що $N(r,0) \sim Ar^{\rho(r)}$, $N(r,\infty) \sim Br^{\rho(r)}$, $r \to \infty$.
Справедливість цієї гіпотези А.Бернштейн [4] довів для цілих функцій (при $0<\rho \leq \frac{1}{2}$ можна навіть відкинути обмеження на аргументи нулів). Для цілих функцій порядку $\rho \leq \frac{1}{2}$ більш сильний результат незалежно від А.Бернштейна одержав А.А.Гольдберг [I]. Проте, як буде показано в цій статті, для мероморфних функцій гіпотеза А.Бернштейна не справджується, навіть якщо сильно послабити її твердження.

Те, що гіпотеза А.Бернштейна неправильна принаймні при $0<\rho<\frac{1}{2}$, легко побачити, трохи модифікувавши приклад 2 з роботи [3, с.102].

Справді, досить лише взяти за f не $f(z) = V_1(z) + V_2(-z)$, як у цьому прикладі, а $f(z) = V_1(z) / V_2(-z)$ Покажемо, що: для мероморфних функцій з додатними нулями та від"ємними полюсами таких, що $T(r,f) \sim \Delta r^{\rho}$, $0 < \rho < 1$, $0 < \Delta < \infty$, нижні порядки обох величин $N(r,0)$ і $N(r,\infty)$ можуть бути меншими за ρ і навіть дорівнювати нулеві.

Нехай ε – довільне число таке, що $0 < \varepsilon < \rho$. Розглянемо опочатку випадок, коли $\frac{1}{2} \le \rho < 1$. На $[0, \sin \pi\rho]$ означимо функцію $y(x) = x \cos \pi\rho + \sin \pi\rho \sqrt{1-x^2}$. Це спадна функція, яка біективно відображає $[0, \sin \pi\rho]$ на $[0, \sin \pi\rho]$, причому $y(y(x)) \equiv x$. Можна перевірити, що коли φ – єдиний корінь на $[0,\pi]$ рівняння

$$x \cos \rho(\pi - \varphi) = y(x) \cos \rho\varphi, \quad x \in [0, \sin \pi\rho],$$ то
$$y(x) \sin \rho\varphi + x \sin \rho(\pi - \varphi) = \sin \pi\rho. \qquad /1/$$

Позначимо $\ln_3 r = \ln\ln\ln r$. Візьмемо чотири послідовності додатних чисел $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$, які визначаються співвідношеннями $\ln_3 b_n - \ln_3 a_n = \ln_3 c_n - \ln_3 b_n = \ln_3 d_n - \ln_3 c_n = \ln_3 a_{n+1} - \ln_3 d_n = 1$, a_1 вибране досить великим. Нехай

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b_n, c_n], \quad C = \bigcup_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n],$$
$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} [d_n, a_{n+1}], \quad A \cup B \cup C \cup D = [a_1, \infty).$$

Візьмемо послідовність $\gamma_n > 0$, яка монотонно прямує до нуля при $n \to \infty$, $\gamma_n > (\ln a_n)^{-1}$, $\gamma_0 < \frac{1}{2} \sin \pi\rho$, $\beta_n = y(\gamma_n)$.

Очевидно, $(1 + o(1)) \sin \pi\rho = \beta_n < \sin \pi\rho$, $y(\beta_n) = \gamma_n$. На $[a_1, \infty)$ означимо функції $V_1(r) = r^{L_1(r)}$ та $V_2(r) = r^{L_2(r)}$ наступними формулами:

$$V_1(r) = r^{\rho L_1(r)}, \quad L_1(r) = \beta_{n-1} - (\beta_{n-1} - \gamma_n)(\ln_3 r - \ln_3 a_n),$$
$$V_2(r) = r^{\rho} y(L_1(r)) \text{ при } a_n < r \le b_n;$$

$$V_1(r) = \gamma_n r^{\rho - (\rho - \varepsilon) \sin \pi (\ln_3 r - \ln_3 b_n)},$$

$$V_2(r)=\beta_n r^{\rho} \text{ при } b_n \le r \le c_n ;$$

$$V_1(r)=r^{\rho}L_2(r),\ L_2(r)=\gamma_n+(\beta_n-\gamma_n)(\ln_3 r-\ln_3 c_n),$$

$$V_2(r)=r^{\rho}y(L_2(r)) \text{ при } c_n \le r \le d_n ;$$

$$V_1(r)=\beta_n r^{\rho},\ V_2(r)=\gamma_n r^{\rho-(\rho-\varepsilon)\sin\pi(\ln_3 r-\ln_3 d_n)}$$

при $d_n \le r \le a_{n+1}$.

Можна перевірити, що функції V_1 і V_2, зростаючі на $[a_1,\infty)$, якщо a_1 вибране досить великим, l_1 та l_2 – неперервні кусково-неперервно диференційовані функції, такі, що

$$(j=1,2)\ l_j'(r)\, r\ln r\to 0 \quad \text{при} \quad r\to\infty ,$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} l_j(r)=\rho,\quad \varliminf_{r\to\infty} l_j(r)=\varepsilon . \qquad /2/$$

Побудуємо цілу функцію f_1 роду нуль з додатними нулями, такими, що $n(r,0,f_1)\sim V_1(r)$, і цілу функцію f_2 роду нуль з від"ємними нулями, такими, що $n(r,0,f_2)\sim V_2(r)$, $f_1(0)=f_2(0)=1$. Відомо [2,с.94], що $(0<\varphi<\pi)$

$$\ln|f_1(re^{i\varphi})|=\frac{\pi\cos(l_1(r)(\varphi-\pi))}{\sin\pi l_1(r)}V_1(r)+o(V_1(r)), \qquad /3/$$

$$\ln|f_2(re^{i\varphi})|=\frac{\pi\cos(l_2(r)\varphi)}{\sin\pi l_2(r)}V_2(r)+o(V_2(r)) \qquad /4/$$

при $r\to\infty$ рівномірно відносно φ, $0<\delta<\varphi<\pi-\delta$. У нашому виборі V_1 та V_2 можна при $r\in A\cup C$ замінити в /3/ і /4/ $l_1(r)$ та $l_2(r)$ на ρ. Використаємо для мероморфної функції $f=f_1/f_2$ формулу А.Картана [3,с.28] і просту модифікацію теореми 7.4 в роботи [3, с.59]. Враховуючи те, що $|f_1(z)|\ge 1$ при $\operatorname{Re} z\le 0$, $|f_2(z)|\ge 1$ при $\operatorname{Re} z\ge 0$ і $|f_j(\bar z)|=|f_j(z)|$, одержуємо

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{\ln|f_1(re^{i\varphi})|,\ln|f_2(re^{i\varphi})|\}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\max\{\ln^+|f_1(re^{i\varphi})|,\ln^+|f_2(re^{i\varphi})|\}\,d\varphi=$$

$$= \int_0^{\pi} \max \left\{ \frac{\cos^+(l_1(r)(\varphi-\pi))}{\sin \pi l_1(r)} V_1(r), \frac{\cos^+(l_2(r)\varphi)}{\sin \pi l_2(r)} V_2(r) \right\} d\varphi +$$

$$+ o(r^\rho), \quad r \to \infty. \qquad /5/$$

При $\rho \in [b_n c_n]$ маємо $V_1(r) \leq \gamma_n r^\rho = o(r^\rho)$, $l_2(r) = \rho + O(1/\ln r)$, $r \to \infty$, тому з /5/ при $r \in B$ випливає $(b_n \leq r \leq c_n)$

$$T(r,f) = \frac{B_n r^\rho}{\sin \pi\rho} \int_0^{\pi} \cos^+ \rho\varphi d\varphi + o(r^\rho) = \frac{1}{\rho} r^\rho + o(r^\rho), \quad r \to \infty. \qquad /6/$$

Аналогічно одержуємо /6/ при $r \in D$. При $r \in A$ маємо $l_1(r) = \rho + O(\ln\ln r/\ln r)$, $l_2(r) = \rho + O(\ln\ln r/\ln r)$, тому з /5/ одержуємо

$$T(r,f) = \frac{r^\rho}{\sin \pi\rho} \int_0^{\pi} \max \{ L_1(r) \cos^+ \rho(\varphi-\pi), y(L_1(r)) \cos^+ \rho\varphi \} d\varphi +$$
$$+ o(r^\rho) = \frac{r^\rho}{\sin \pi\rho} \left\{ y(L_1(r)) \int_0^{\varphi(r)} \cos \rho\varphi d\varphi + L_1(r) \int_{\varphi(r)}^{\pi} \cos \rho(\varphi-\pi) d\varphi \right\} +$$
$$+ o(r^\rho) = \frac{r^\rho}{\rho \sin \pi\rho} \{ y(L_1(r)) \sin \rho\varphi(r) + L_1(r) \sin \rho(\pi - \varphi(r)) \} + o(r^\rho),$$

де $\varphi(r) \in [0, \pi]$ – єдиний корінь рівняння $L_1(r) \cos \rho(\pi-\varphi) = y(L_1(r)) \cos \rho\varphi$. З огляду на /I/ одержуємо, що

$$y(L_1(r)) \sin \rho\varphi(r) + L_1(r) \sin \rho(\pi - \varphi(r)) = \sin \pi\rho.$$

Тому і при $r \in A$ маємо /6/. Аналогічні міркування проводимо, якщо $r \in C$. Таким чином, співвідношення /6/ доведено при $r \to \infty$.

З іншого боку, $N(r,0,f) = N(r,0,f_1) \sim V_1(r)/l_1(r)$, $N(r,\infty,f) = N(r,0,f_2) \sim V_2(r)/l_2(r)$. З /2/ випливає, що обидві функції $N(r,0,f)$ та $N(r,\infty,f)$ мають порядок ρ і нижній порядок ε. Використовуючи ту ж саму ідею, можна побудувати також приклад, де $N(r,0,f)$ та $N(r,\infty,f)$ матимуть нульовий нижній порядок. Проте викладки тоді стануть набагато довші, бо без додаткових пояснень не можна використовувати готові формули /3/ і /4/, навіть для інтервалів, де $0 < \varepsilon \le l_j(r) \le \rho$.

У випадку, коли $0 < \rho < \frac{1}{2}$, потрібний приклад будується і досліджується аналогічно з деякими змінами, на які вкажемо далі. Функція $y = y(x)$ задається попередньою формулою, але розглядається на відрізку $[\cos \pi\rho, 1]$. Як і раніше, беремо послідовності $(\alpha_n), (b_n), (c_n), (d_n), (\beta_n), (\gamma_n)$, але тепер вибираємо β_n так, щоб (β_n) була зростаючою послідовністю, що прямує до 1 так, що $\beta_0 > (1+\cos \pi\rho)/2$, $\beta_n < 1 - (\ln a_n)^{-1}$. Тоді $\gamma_n = y(\beta_n)$ задовольняє нерівність $(1+o(1)) \cos \pi\rho \ge \gamma_n > \cos \pi\rho$, $n \to \infty$. Після цього функції $V_1(r)$ та $V_2(r)$, мероморфна функція f будуються, як і раніше. Нові моменти з"являються лише при доведенні /6/ для $r \in B \cup D$. Нехай $r \in B$. Тоді $l_2(r) = \rho + o((\ln r)^{-1})$, $r \to \infty$. Використаємо той факт, що при $\ln r > \pi \operatorname{ctg} \pi\varepsilon$ і $\varepsilon \le x \le \rho$ виконується $r^x \operatorname{cosec} \pi x \le r^\rho \operatorname{cosec} \pi\rho$. При $0 \le \varphi \le \pi$, $r \to \infty$, $r \in [b_n, c_n]$ одержуємо

$$\frac{\cos^+(l_1(r)(\varphi-\pi))}{\sin \pi l_1(r)} r^{l_1(r)} \le (1+o(1)) \frac{\gamma_n r^{l_1(r) - \frac{\ln \gamma_n}{\ln r}}}{\sin \pi \left[l_1(r) - \frac{\ln \gamma_n}{\ln r}\right]} \le$$

$$\le (1+o(1)) \frac{\cos \pi\rho}{\sin \pi\rho} r^\rho \le (1+o(1)) \frac{\cos^+(l_2(r)\varphi)}{\sin \pi l_2(r)} r^{l_2(r)} =$$

$$= \frac{\cos \rho\varphi}{\sin \pi\rho} r^\rho + o(r^\rho), \quad r \to \infty.$$

Тоді з /5/ при $r \in B$ маємо $(r \to \infty)$

$$T(r,f) = \int_0^\pi \frac{\cos \rho\varphi}{\sin \pi\rho} r^\rho d\varphi + o(r^\rho) = \frac{r^\rho}{\rho} + o(r^\rho),$$

тобто /6/. При $r \in D$ міркування аналогічні.

<u>Зауваження</u>. Якщо для мероморфної функції f порядку $\rho < 1$ виконується $\ln T(r,f) \sim \rho \ln r$, $r \to \infty$, то і $\ln N(r,0,\infty) \sim \rho \ln r$, де $N(r,0,f) + N(r,\infty,f) = N(r,0,\infty)$. Це випливає, наприклад, з теореми 2.I в роботі [3]. Але навіть якщо додатково припустити,

що нулі f додатні, а полюси від"ємні, то з $T(r,f)\sim\Delta r^{\rho}$, $0<\Delta<\infty$ не випливає, що існує границя

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,0,\infty)}{r^{\rho}}.$$

Це видно з побудованих вище прикладів, де остання границя не існує при $r\to\infty$, $r\in A$, оскільки $y(x)+x$ на жодному інтервалі не дорівнює тотожно сталій.

Список літератури: I. Гольдберг А.А. О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений. – Теория функций функциональный анализ и их приложения, 1972, № 15. 2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 3. Гольдберг А.А., Островский И.В. Некоторые теоремы о росте мероморфных функций. – Записки математического отдела физ.-мат. ф-та Харьковского ун-та и ХМО, 1961, сер.4, № 27. 4. *Baernstein A. A nonlinear Tauberian theorem in function theory.- Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 146.*

УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

ПРО ЗБУРЕННЯ КРАЙОВОГО ОПЕРАТОРА

Нехай H -гільбертів простір, $\mathscr{E}(H)$ – множина лінійниу, замкнутих, щільно визначених операторів $H\to H$. Парі операторів (L_0,L) такій, що $L_0, L\in\mathscr{E}(H)$ і $L_0\subset L$, поставимо у відповідність крайову, або граничну пару, що складається з простору крайових, або граничних значень $\mathcal{U}$, та крайового, або граничного, оператора $\mathscr{P}$. Пара $(\mathcal{U},\mathscr{P})$ визначається умовами:

I/ U -гільбертів простір,

2/ $\mathcal{P}\in B(D(L);U), Z(P)=D(L_0), \quad R(P)=U$ *.

Зауваження. Крайова пара існує. Справді, досить прийняти $U=D(L)\ominus D(L_0)$, де область визначення $D(L)$ оператора L розглядається як гільбертів простір зі скалярним добутком $(f/g)_L \overset{df}{=} (f/g)_H + (Lf/Lg)_H$, а за P взяти ортопроектор $D(L)\rightarrow U^{H}$.

Означення. Оператор F називається крайовим, або граничним, якщо $F\in B(D(L);U)$ і $Z(F)$ щільна в H.

У цій статті розглядаємо збурення крайового оператора, що зберігають його властивість як крайового. Почнемо зі збурень, "малих за розмірністю".

Теорема I. Нехай F – крайовий оператор для пари (L_0,L). Якщо F – нормально розв"язуваний, а K – скінченовимірний оператор, такий, що $K\in B(H;U)$ і $R(K)\subset R(F)$, то $F-K$ також нормально розв"язуваний крайовий оператор для пари (L_0,L).

Доведення. Очевидно, що $F-K\in B(D(L);U)$. Ми можемо трактувати F як відображення $D(L)\rightarrow R(\Phi)$, а оскільки $R(K)\subset R(F)$, то $F-K$ – нормально розв"язуваний оператор [I]. Тому досить довести, що $Z(F-K)$ щільна в H.

Припустимо, що $h\in H$ і $\forall f\in Z(F-K)\ (f/h)_H=0$. Позначимо через D повний прообраз підпростору $R(K)$ при відображенні F. Нехай $(e_1,\dots,e_n)$ – $\|\cdot\|_U$ – ортогональна база в $R(K)$. Легко бачити, що

$$Z(F-K)=\{f\in D: ((F-K)f/e_k)=0, \quad k=1,\dots,n\}.$$

---

* $B(X;Y)$ – нормований простір лінійних обмежених операторів $X\rightarrow Y$, де X і Y – нормовані простори, $Z(P)$ і $R(P)$ – многовид нулів і область значень оператора P.

Тому існують такі комплексні числа $C_1, \dots, C_n$, що $\forall f \in D$
$\sum C_k((F-K)f/e_k)_{\mathcal{U}} = (f/h)_H$, або

$$\forall f \in D \ (Ff/e)_{\mathcal{U}} = (f/h + K^* e)_H , \qquad /1/$$

де $e \overset{df}{=} \sum \bar{C}_k e_k$ Припустимо, що функціонал $D \ni f \to (Ff/e)_{\mathcal{U}}$ відмінний від нуля. Тоді він $\|\cdot\|_H$ – необмежений, бо його ядро містить множину $Z(F)$, яка всюди щільна в H.

Але $\|\cdot\|_H$ – необмеженість цього функціонала суперечить співвідношенню /1/. Тому $\forall f \in D \quad (Ff/e)_{\mathcal{U}} = 0$,
а оскільки $D = F^{-1}R(K)$ і $e \in R(K)$, то $e = 0$
Тепер з /1/ випливає, що $\forall f \in D \ (f/h)_H = 0$. Отже, $h = 0$, а тому D щільна в H.

Тепер розглянемо збурення, "мале за нормою".

Теорема 2. Нехай F – крайовий оператор для пари (L_0, L). Якщо F – нормально розв"язуваний, а $\Lambda \in B(H; \mathcal{U})$, $R(\Lambda) \subset R(F)$ і норма Λ достатньо мала /див.нерівність /2//, то $F-\Lambda$- нормально розв"язуваний крайовий оператор для пари (L_0, L).

Доведення. Позначимо через $\tilde{F}$ звуження оператора F на $D(L) \ominus Z(F)$, а через $\tilde{P}$ – ортопроектор $D(L) \to D(L) \ominus Z(F)$.
Тоді $F = \tilde{F}\tilde{P}$, існує $\tilde{F}^{-1}$ і, оскільки $R(F)$ замкнута в $\mathcal{U}$, $\tilde{F}^{-1} \in B(R(F), D(L))$. Припустимо, що існує таке $\alpha < 1$, що

$$\forall h \in H \quad \|\tilde{F}^{-1}\Lambda h\| \leq \alpha \|h\| . \qquad /2/$$

Тоді, тому що $\forall f \in D(L) \quad \|f\|_H \leq \|f\|_L$,

$$\|\tilde{F}^{-1}\Lambda\|_{B(H)} < 1 , \qquad /3/$$

$$\|\tilde{F}^{-1}\Lambda\|_{B(D(L))} < 1 . \qquad /4/$$

Отже, оператор $1_H - \tilde{F}^{-1}\Lambda$ бієктивно і $\|\cdot\|_H$- неперервно відображає H на себе. Оскільки $Z(F-\Lambda) = (1 - \tilde{F}^{-1}\Lambda) Z(F)$ і $Z(F)$ щільна в h, то цю саму властивість має $Z(F-\Lambda)$.

Із /4/ випливає, що $1-\tilde{F}^{-1}\Lambda$ бієктивно відображає $D(L)$ на себе. Звідси та беручи до уваги $F-\Lambda = F(1-\tilde{F}^{-1}\Lambda)$, робимо висновок, що $R(F-\Lambda) = R(F)$, а тому $F-\Lambda$ – нормально розв"язуваний. Нарешті, $Z(F-\Lambda)$ замкнута в $D(L)$, бо $F-\Lambda \in B(D(L);U)$.

Висновок. Нехай F – крайовий оператор для пари (L_0, L). Якщо F нормально розв"язуваний, то для всякого компактного оператора $\Phi \in B(H;U)$ такого, що $P(\Phi) \subset R(F)$ оператор $F-\Phi$ – нормально розв"язуваний крайовий оператор для пари (L_0, L).
Доведення. Нехай $K \in B(H;U)$ – скінченновимірний оператор, такий, що $R(K) \subset R(F)$ і $\|\Phi-K\| < \|\tilde{F}^{-1}\|^{-1}$, де $\tilde{F}$ із теореми 2. Припустимо $\Lambda = \Phi-K$. Оскільки $\Lambda \in B(H;U)$ і $\|\Lambda\| < \|\tilde{F}^{-1}\|^{-1}$, то, згідно з теоремою 2, $F-\Lambda$ нормально розв"язуваний крайовий оператор для (L_0, L). Застосовуючи теорему I, бачимо, що $F-\Phi = (F-\Lambda)-K$ нормально розв"язуваний крайовий оператор для (L_0, L).

Список літератури: I. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972. 2. Лянце В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. – Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, вып. 16.

УДК 517.521.7

О.Б.Скасків, М.М.Шеремета

ПРО ЗАДАЧУ АБЕЛЯ-ГОНЧАРОВА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ЛАКУНАРНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

Нехай $(z_n), n \geq 0$ – задана послідовність комплексних чисел. Задача Абеля-Гончарова полягає у відновленні функції f за значеннями $f^{(n)}(z_n)$. У зв"язку з цим виникає питання: при яких умовах ціла функція f розкладається в інтерполяційний ряд Абеля–Гончарова

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_n) P_n(z), \qquad /I/$$

де P_n – многочлен Гончарова степеня n, визначений формулами $P_n^{(m)}(z_m)=0$ при $m \neq n$ і $P_n^{(m)}(z_m) = 1$ при $m = n$?

Нехай $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\Psi(r) = \ln M(r)$, а ψ – функція, обернена до Ψ. Приймемо $S_n = \sum_{0 \le \nu \le n-1} |z_{\nu+1} - z_\nu|$ і нехай $n(r)$ – рахуюча функція послідовності (S_n). І.І.Ібрагімов [I] довів: якщо $\Psi(r) \le C(\theta) n(\theta r)$, де $C(\theta) = \ln(1 - 1/\theta)$, $0 < \theta < 1/2$, то ціла функція f розкладається у рівномірно збіжний у кожній скінченній замкненій області інтерполяційний ряд /I/.

Ми доповнимо теорему І.І.Ібрагімова на випадок цілих функцій заданих лакунарним степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1/\lambda_n) < \infty, \qquad /2/$$

тобто доведемо наступну теорему.

Теорема I. Якщо функція /2/ задовольняє умову

$$(\ln r)^{-1} \ln\ln M(r) = \gamma(r) \uparrow \infty, \quad r_0 \le r \to \infty, \qquad /3/$$

а вузли інтерполяції (z_n) такі, що

$$\lim_{n\to\infty} (z_n / \psi(n)) = \varkappa, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} (S_n / \Psi(n)) = l, \quad \varkappa + l < 1, \qquad /4/$$

то функція /2/ розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний у кожній скінченній замкненій області ряд /I/.

Теорему I ми одержимо з наступної теореми 2, для формування якої нам необхідні деякі приготування. Скажемо, що функція $\alpha \in \Lambda$, якщо вона неперервна на $[x_0, \infty)$, $x_0 \geq 0$ зростає до ∞ зі збільшенням x до ∞ і є повільно зростаючою функцією, тобто для кожного $c > 1$ при $x \to \infty$ виконується $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$. Тут можуть трапитись значення функції α у точках, де вона не визначена. Надаватимемо їй значення $\alpha(x_0)$. Вважаємо також, що $\alpha(\infty) = \infty$. Величина [4]

$$\rho_\alpha(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\alpha(\ln M(r))$$

називається узагальненим порядком функції f. Будемо вважати, що $\rho_\alpha(f) < \infty$, а значення

$$h_\alpha(\varphi) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\alpha(\ln M(r,\varphi,\delta)),$$

де $M(r,\varphi,\delta) = \max\{|f(re^{i\beta})| : |\beta-\varphi| < \delta\}, \delta > 0$, назвемо узагальненим радіальним індикатором функції f. Очевидно, $0 \le h_\alpha(\varphi) \le \rho_\alpha(f)$. Можна показати, що $h_\alpha(\varphi)$ – напівнеперервна зверху /означення, напр., у [3 , с.II] / функція від φ і $\max\{h$ [illegible] $\rho_\alpha(f)$.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\alpha \in \Lambda$, а вузли інтерполяції задовольняють умови

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_n/\alpha(n)) = \kappa,\ \lim_{n\to\infty}(S_n/\alpha(n)) = l,\ 0 \le \kappa,\ l < \infty. \qquad /5/$$

Тоді, якщо

$$\min\{|\kappa - (h_\alpha(\varphi))^{-1}e^{i\varphi}| : |\varphi| \le \pi\} > l, \qquad /6/$$

то функцію f можна розкласти в абсолютно і рівномірно збіжний у кожній скінченній замкненій області ряд /I/.

Теорема 2 узагальнює одну теорему В.А.Осколкова [2]. Її доведення громіздке і цілком аналогічне доведенню теореми В.А.Осколкова, тому ми його опускаємо.

Доведемо теорему I. У роботі [5] показано, що для функцій виду /2/ справедливе твердження: для кожних $\varepsilon > 0, \varphi \in [-\pi,\pi], \delta \in]0,\pi]$ і для всіх r зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри виконується $\ln M(r,\varphi,\delta) > (1-\varepsilon)\ln M(r)$, звідки випливає, що $h_\alpha(\varphi) = \rho_\alpha(f)$, яка б не була функція $\alpha \in \Lambda$. Оскільки при $\alpha = \psi$ виконується $\rho_\alpha(f) = \rho_\psi(f) = 1$, а умова /6/ у цьому випадку еквівалентна умові $\min\{|\kappa - e^{i\varphi}| : |\varphi| \le \pi\} = |\kappa - 1| > l$, тобто завдяки нерівності $l \ge \kappa$ /ця нерівність випливає з означення S_n / еквівалентна умові $\kappa + l < 1$, то за теоремою 2 нам залишилось показати, що при виконанні умови /3/ $\psi \in \Lambda$

Припустимо, що $\psi \overline{\in} \Lambda$, тобто існують числа $c>1$, $p>0$ і послідовність (x_k) такі, що $\psi(cx_k)>(1+p)\psi(x_k)$. Приймемо $r_k=\psi(x_k)$. Тоді останню нерівність перепишемо у вигляді $c\psi(r_k)>\psi((1+p)r_k)$, де $\psi(r_k)=\ln M(r_k)=\exp\{\gamma(r_k)\ln r_k\}$. Таким чином, маємо $\ln c+\gamma(r_k)\ln r_k>\gamma((1+p)r_k)\ln r_k+\gamma((1+p)r_k)\ln(1+p)$, звідки $\gamma(r_k(1+p))=O(1)$, $k\to\infty$, що неможливо.

Список літератури: I. Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М., Наука, I97I. 2. Осколков В.А. Задача Абеля-Гончарова для целых функций бесконечного порядка. - Сибирский математический журнал, I975, т.I6, № I. 3. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, I97I. 4. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. - Известия вузов. Математика, I967, № 2. 5. Шеремета М.Н. Рост в углу целых функций, заданных лакунарными степенными рядами. - ДАН СССР, I977, т.236, № 3.

УДК 5I7.535.4

М.В.Іванюк, М.М.Шеремета

РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ НА [0,I] ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ДОВІЛЬНОГО РОСТУ

I. Нехай

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k,\quad a_0=1,\ a_k\geq 0\ (k\geq 1)- \qquad /I/$$

ціла трансцендентна функція, Π_n - клас звичайних алгебраїчних многочленів степеня не вище n, а

$$R_n(f)=\inf_{p\in\Pi_n}\left\|\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right\|_{[0,1]},\quad \|g\|_{[0,1]}=\sup_{0\leq x\leq 1}|g(x)|. \qquad /2/$$

У статті [8] наведені результати, які дають оцінки $R_n(f)$ для цілих функцій скінченного порядку. Зокрема, доведено, що коли функція /I/ має порядок ρ , то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{-\ln R_n(f)} = \rho .$$

Ми узагальнимо ці результати на випадок цілих функцій довільного росту. При цьому будемо користуватись наступними класами функцій [3]: $\alpha \in L^0$, якщо α -неперервна додатна зростаюча до ∞ на $[x_0, \infty)$ функція така, що $\alpha(x\{1+\gamma(x)\}) \sim \alpha(x)$ при $x \to \infty$ для будь-якої функції $\gamma, \gamma(x) \to 0$ при $x \to \infty$ і $\alpha \in \Lambda$, якщо $\alpha \in L^0$ і для кожного $c \in (0,\infty)$ виконується $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$, $x \to \infty$.

2. Надалі нам потрібні леми.

Лема 1. Для всіх $n \geq 0$ і $r \geq 2$ виконується

$$R_n(f) \leq f(r) r^{-n}. \qquad /3/$$

Дійсно, нехай $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Тоді, використавши нерівність Коші $a_k \leq f(r) r^{-k}$, $k \geq 0$, $r \geq 2$ маємо

$$R_n(f) \leq \left\|\frac{1}{f} - \frac{1}{S_n}\right\|_{[0,1]} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \frac{1}{f(x) S_n(x)} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(r) r^{-k} = f(r) \frac{r^{-n-1}}{1-1/r} \leq f(r) r^{-n} .$$

Лема 2. Для всіх $n \geq n_0$ виконується

$$R_n(f) \geq f^{-2}(1) a_{n+1} 4^{-n} . \qquad /4/$$

Справді, нехай $P^* \in \Pi_n$ – многочлен, який дає найкраще наближення у розумінні /2/, тобто $R_n^{(f)} = \left\|\frac{1}{f_\infty} - \frac{1}{P^*}\right\|_{[0,1]}$. Оскільки з доведення попередньої леми випливає, що $R_n(f) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < f(1)$, $n \geq n_0$ то, як і в [8], одержуємо

$$\frac{-f^2(x)}{1/R_n(f) + f(x)} \leq P^*(x) - f(x) \leq \frac{f^2(x)}{1/R_n(f) - f(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

звідки внаслідок монотонності $f(x)$ записуємо

$$\|f-P^*\|_{[0,1]} \leq \frac{f^2(1)}{1/R_n(f)-f(1)}. \qquad /5/$$

Нехай $E_n(f)=\inf\limits_{P\in\Pi_n}\|f-P\|_{[0,1]}$. Тоді за нерівністю С.Н.Бернштейна [7,с.I0] одержуємо $E_n(f)\geq a_{n+1}2^{-(2n+1)}$. Тому з /5/ випливає $\frac{2a_{n+1}}{4^n}\leq$ $\leq \frac{f^2(1)}{1/R_n(f)-f(1)}$, звідки

$$R_n(f)\geq \frac{2}{f^2(1)+2f(1)a_{n+1}4^{-n}}\ \frac{a_{n+1}}{4^n}.$$

Тому що $a_{n+1}4^{-n}\to 0$ при $n\to\infty$, з останньої нерівності маємо /4/.

Лема 3 /див.[I,3]/. Нехай $F(x;c)=\beta^{-1}(c\alpha(x))$ і для всіх $c\in(0,\infty)$ виконана одна з умов:

а) $\alpha\in L^0$, $\beta\in L^0$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{d\ln F(x;c)}{d\ln x}=\frac{1}{\rho}$, $0<\rho<\infty$;

б/ $\alpha\in\Lambda$, $\beta\in\Lambda$ і $\frac{d\ln F(x;c)}{d\ln x}=O(1), x\to\infty$.

Тоді

$$\rho_{\alpha\beta}(f)\overset{df}{=}\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\alpha(\ln f(r))}{\beta(r)}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(e^{1/\rho}a_n^{-1/n})}. \qquad /6/$$

Лема 4 [5-6]. Нехай $\Phi(x)=\ln f(e^x)$, φ - функція, обернена до Φ і $\gamma(x)=(\ln x)^{-2}\ln\Phi(x)$. Тоді, якщо

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \gamma(x)=\infty, \qquad /7/$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{n\varphi(n)}{-\ln a_n}=1, \qquad /8/$$

а якщо $\gamma(x)\uparrow\infty$ при $x\to\infty$ і a_n/a_{n+1} зростає зі збільшенням n, то у /8/ існує границя, яка дорівнює 1.

3. Використовуючи леми I...4, доведемо наступні дві теореми.

Теорема 1. Якщо α і β задовольняють одну з умов леми 3, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(\frac{1}{4}e^{1/\rho}R_n^{-1/n}(f))}\geq\rho_{\alpha\beta}(f)\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(e^{1/\rho}R_n^{-1/n}(f))} \qquad /9/$$

Доведення. Нехай $\rho_{\alpha\beta}(f)<\infty$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ при досить великих r одержуємо $f(r)\leq \exp\{\alpha^{-1}((\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon)\beta(r))\}$. Взявши $r=\beta^{-1}(\frac{1}{\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon}\alpha(\frac{n}{\rho}))$ з /3/, маємо

$$R_n(f)\leq\left\{\frac{e^{1/\rho}}{\beta^{-1}(\frac{1}{\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon}\alpha(\frac{n}{\rho}))}\right\}^{n}, \qquad /10/$$

звідки випливає права частина /9/ з $\rho_{\alpha\beta}(f)+\varepsilon$ замість $\rho_{\alpha\beta}(f)$. Внаслідок довільності ε одержуємо справедливість правої частини /9/, яка очевидна при $\rho_{\alpha\beta}(f)=\infty$.

Нехай тепер

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n/\rho)}{\beta(\frac{1}{4}e^{1/\rho}R_n^{-1/n}(f))}=t<\infty.$$

Тоді для кожного $\varepsilon>0$ при $n\geq n_0(\varepsilon)$ маємо

$$R_n(f)\leq\left\{4e^{-1/\rho}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n/\rho)}{t+\varepsilon}\right)\right\}^{-n}.$$

Звідки внаслідок /4/ маємо

$$a_{n+1}\leq f^2(1)\left\{e^{-1/\rho}\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n/\rho)}{t+\varepsilon}\right)\right\}^{-n}=$$

$$=f^2(1)\left\{e^{1/\rho}\beta^{-1}\left(\frac{(1+o(1))\alpha(\frac{n+1}{\rho})}{t+\varepsilon}\right)\right\}^{-n-1}e^{1/\rho}\beta^{-1}\left(\frac{(1+o(1))\alpha(\frac{n+1}{\rho})}{t+\varepsilon}\right).$$

З умов теореми випливає, що $\ln\beta^{-1}(c\alpha(x))=o(x)$ при $x\to\infty$. Тому з /10/ за формулою /6/ одержуємо, що $\rho_{\alpha\beta}(f)\leq t+\varepsilon$, звідки внаслідок довільності ε одержуємо ліву частину /9/, яка очевидна при $t=\infty$

Теорема 2. Нехай функції Φ, φ і γ визначені, як в лемі 4. Тоді, якщо виконана умова /7/, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\varphi(n)}{-\ln R_n(f)}=1, \qquad /11/$$

а якщо $\gamma(x)\uparrow\infty$ при $x\to\infty$ і a_n/a_{n+1} зростає зі збільшенням n, то в /11/ існує границя, яка дорівнює одиниці.

Доведення. Перша частина цієї теореми доводиться аналогічно доведенню теореми I. Для доведення другої частини зауважимо, що з /3/, взявши $r=\varphi(n)$, одержимо $R_n(f)\leq\exp\{-n(\varphi(n)-1)\}$, звідки

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\varphi(n)}{-\ln R_n(f)}\leq 1. \qquad /12/$$

З іншого боку, за лемою 4 для довільного $\varepsilon > 0$ при $n \geq n_0$ маємо $a_n > \exp\left\{-\frac{n\varphi(n)}{1-\varepsilon/2}\right\}$. Тому за лемою 2 $R_n(t) \geq \exp\left\{-\frac{(n+1)\varphi(n+1)}{1-\varepsilon}\right\}$.

Внаслідок трансцендентності функції /I/ $\varphi(n+1) \sim \varphi(n)$ при $n \to \infty$. Тому з останньої нерівності одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\varphi(n)}{-\ln R_n(t)} \geq 1-\varepsilon. \qquad /13/$$

З /I2/ і /I3/ внаслідок довільності ε одержуємо справедливість другого твердження теореми 2.

Зауважимо, що лема I правильна для функцій виду /I/, аналітичних у крузі радіуса $R \geq 2$. Зауважимо також, що основним фактором при доведенні теорем I-2 є формули, які виражають ріст функції /I/ через коефіцієнти a_n.

Список літератури: I. Балашов С.К. О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней. - Известия вузов. Математика, 1972, 2. Пьяныло Я.Д. Об обобщенных порядках роста целых функций. - Известия вузов. Математика, 1975, № 5. 3. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. - Известия вузов. Математика, 1967, № 2. 4. Шеремета М.Н. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений. - Известия вузов. Математика, 1968, № 6. 5. Шеремета М.Н. О коэффициентах степенного разложения целых функции. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1972, вып. I6. 6. Шеремета М.Н. О коэффициентах степенного разложения целых функций. - Теория функций, функциональный анализ и их приложение, 1973, вып. I7. 7. Bernsten S.N. Lecons sur le propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

8. Reddy A.R. Some results in Chebyshev rational approximation J. Approxim. Theory, 1976, v. 18.

УДК 517.521.6

М.М.Хом"як

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $f(z)$, $z=x+iy$ – ціла функція, задана абсолютно збіжним у всій площині рядом Діріхле

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^z, \quad a_1=1, \qquad /1/$$

$M(x)=\sup\{|f(x+iy)|: |y|<\infty\}$ а $\mu(x)$ і $\nu(x)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /1/.

Н.Ф.Якуніна[*], вивчаючи клас функцій /1/, для яких

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}=s<1, \qquad /2/$$

виявила для цього класу функцій аналог теореми Вімана, довівши, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує послідовність (x_n), яка прямує до ∞ при $n\to\infty$ і така, що

$$M(x_n)\le\frac{(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}}{\ln(1/s)}\,\mu(x_n)\sqrt{\ln\mu(x_n)} \qquad /3/$$

/при $s=0$ в /3/ замість $(1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}/\ln(1/s)$ слід брати ε /.

Неважко показати, що з умови /2/ випливає: при всіх досить великих x виконується $\ln M(x)<x\ln x$.

Ми розглянемо ширший клас функцій /1/, а саме функції, які задовольняють умову

$$\ln M(x)<Ax^{\rho}, \quad 1<\rho<\infty, \quad 0<A<\infty \qquad /4/$$

при всіх досить великих x. На відміну від випадку, що розглядався Н.Ф.Якуніною, одержані нами оцінки значно відрізняються від класичної теореми Вімана, проте виявляються у певному розумінні точними, на що вказує наведений нижче приклад. Крім того, оцінки будуть

---

[*] Якунина Н.Ф. К теореме Вимана для рядов Дирихле.– Математический анализ и его приложение, 1975, т.7.

виконуватись зовні виняткових множин, для характеристики яких потрібне поняття верхньої щільності: якщо $E \subset (-\infty, \infty)$ – вимірна множина, то її верхньою щільністю dE називається величина

$$dE = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{m\{E \cap [0,x]\}}{x}, \quad mE = \int_{E\cap[0,\infty]} dx.$$

Результати нашої статті одержані модифікацією методу Вімана- Валірона для випадку рядів Діріхле. При доведенні теорем необхідна лема.

Лема. Нехай $0<q<1$ і для функції /Т/ виконується умова /4/. Тоді для всіх $n \geq 1$ і та x зовні деякої виняткової множини, верхня щільність якої не перевищує q, виконується

$$|a_n| n^x \le \mu(x) \exp\left\{-\frac{q}{2\alpha}(\ln n - \ln \nu)^2 \min\left\{(\ln n)^{\frac{2-p}{p-1}}, (\ln \nu)^{\frac{2-p}{p-1}}\right\}\right\}, \quad /5/$$

де $\alpha = (Ap^p)^{1/(p-1)}$.

Використовуючи нерівність $M(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^x$ і нерівність /5/, доводиться теорема.

Теорема I. Нехай $0<q<1$ і для функції /I/ виконується умова /4/. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх x зовні деякої виняткової множини верхньої щільності щонайбільше q виконується

$$M(x) \le (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2\pi\alpha}{q}}\, \mu(x)\, \nu(x) (\ln \nu(x))^{\frac{p-2}{2p-2}} \exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{\alpha}{2q}(\ln \nu(x))^{\frac{p-2}{p-1}}\right\}. \quad /6/$$

Використовуючи нерівність

$$\nu(x) \le \exp\left\{\left(\frac{p\alpha}{q(p-1)} \ln \mu(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\},$$

справедливу для всіх x зовні деякої виняткової множини верхньої щільності не вище q, з теореми I легко одержати іншу теорему.

Теорема 2. Нехай $0<q<1$ і для функції /Т/ виконується умова /4/. Тоді, яке б не було число $B > \frac{1}{2}\left(q^{2-2p} A^2 p^{3p-2} (p-1)^{2-p}\right)^{1/p}$, для всіх x зовні деякої виняткової множини верхньої щільності щонайбільше q виконується

$$M(x)\le 2\sqrt{\pi}B\,\mu(x)\{\ln\mu(x)\}^{\frac{\rho-2}{2\rho}}\exp\{D(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-1}{\rho}}+B(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{\rho}}\}, \quad /7/$$

де $D=(q^{1-\rho}A\rho^{2\rho-1}(\rho-1)^{2-\rho})^{1/\rho}$.

Приклад функції

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\tau(\ln n)^{\frac{1}{\rho-1}}-1}n^{z},\ \rho>1,\ \tau>0. \quad /8/$$

вказує на те, що оцінка /7/ з точністю до сталих B і D може досягатись.

Справді, для функції /8/ виконуються співвідношення

$$M(x)=(1+O(1))\sqrt{2\pi\rho(\rho-1)A_1}\,e^{A_1x^{\rho}}x^{\frac{\rho-2}{2}},\quad A_1=\frac{1}{\rho^{\rho}}\left(\frac{\rho-1}{\tau}\right)^{\rho-1},$$

$$\nu(x)=e^{A_1\rho(x-1)^{\rho-1}}+\alpha(x),\quad |\alpha(x)|\le 1/2,$$

$$\mu(x)=(1+O(1))e^{A_1(x-1)^{\rho}}$$

і

$$M(x)=(1+O(1))\sqrt{2\pi\alpha(1-\frac{1}{\rho})}\,\mu(x)\nu(x)(\ln\nu)^{\frac{\rho-2}{2\rho-2}}\exp\left\{\frac{\alpha}{2}(1-\frac{1}{\rho})(1+O(1))(\ln\nu)^{\frac{\rho-2}{\rho-1}}\right\},$$

а також

$$M(x)=2(1+O(1))\sqrt{\pi}B_1\mu(x)\exp\{D_1(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-1}{\rho}}+B_1(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{\rho}}\}(\ln\mu(x))^{\frac{\rho-2}{2\rho}},$$

$$B_1=\frac{1}{2}A_1^{\frac{2}{\rho}}\rho(\rho-1),\quad D_1=\rho A_1^{1/\rho}.$$

Автор висловлює глибоку вдячність М.М.Шереметі за керівництво роботою.

УДК 517.5

Б.В.Винницький

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ РЯДАМИ $\sum_{n=1}^{\infty}d_nf(\lambda_nz)$

Нехай

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n - \quad /1/$$

ціла функція, $M_f(r)=max\{|f(z)|:|z|=r\}$. У багатьох працях /огляд див. у статті А.Ф.Леонтьев. Представление функций обобщенными рядами Дирихле. - $УМН$, 1969, 24, вып.2/146/), вивчалось питання про зображення функцій рядами

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z), \qquad /2/$$

це $\{`_n\}$ - послідовність комплексних чисел таких, що $\lim \lambda_n = \infty$.
А.Ф.Леонтьєв показав, коли $f(z)$ типу $6<\infty$ порядку ρ , всі $a_n \neq 0$ і

$$\varliminf_{n\to\infty} n|a_n|^{\rho/n} > 0,$$

то довільну цілу функцію $F(z)$ можна зобразити в усій площині рядом /2/. Ми доповнимо цей результат. Для цього введемо деякі позначення. Нехай $L(z)$ ціла функція, що має нескінченну множину нулів $\{\lambda_n\}$, причому всі вони прості. Позначимо через $A_f(q)$ клас цілих функцій $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ таких, що при деякому $q \in (0;\infty)$ виконується $|b_n| \leq |a_n| q^n$, $n = 0, I, 2, \ldots$. Очевидно, коли $F \in A_\rho(q)$, то функція

$$\gamma(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_n t^{n+1}}$$

аналітична в області $\{t: |t| > q\}$. Далі будемо говорити, що ряд /2/ збігається регулярно в усій площині, якщо при будь-якому $t \in [0;\infty)$ виконується $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n| M_f(t|\lambda_n|) < \infty$.

Теорема. Нехай у ряді /I/ всі $a_n \neq 0$. Тоді для зображення кожної цілої функції $F \in A_f(q)$

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z), \quad d_n = \frac{1}{2\pi i L'(\lambda_n)} \int_{|t|=2q} \frac{L(t)}{t-\lambda_n} \gamma(t)\,dt, \qquad /3/$$

регулярно збіжним в усій площині, досить, щоб $L(z)$ задовольняла умови:

I/ $\sum_{n=1}^{\infty} M_f(t|\lambda_n|)/|L'(\lambda_n)| < \infty$ при $r \in [0;\infty)$;

2/ при будь-якому $t \in C$ і $n \geq 0$ мало місце зображення $t^n = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^n L(t)/((t-\lambda_m)L'(\lambda_m))$.

Доведення. Оскільки $|L(t)/(t-\lambda_n)| \leq M_L(\rho+1)$ при $|t| \leq \rho$ і всіх $n \geq I$, то внаслідок першої умови ряд /3/ збігається регулярно в усій площині, далі, враховуючи першу і другу умови, при будь-яких $t \in C$ і $z \in C$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z) L(t)}{(t-\lambda_n) L'(\lambda_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(t) \lambda_n^k}{(t-\lambda_n) L'(\lambda_n)} \right) z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (tz)^k = f(tz),$$

внаслідок чого

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z)}{2\pi i L'(\lambda_n)} \int\limits_{|t|=2q} \frac{L(t)}{t-\lambda_n} \gamma(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=2q} \gamma(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_n z) L(t)}{(t-\lambda_n) L'(\lambda_n)} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = F(z),$$

що завершує доведення теореми.

Зазначимо, що для будь-якої цілої функції $f(z)$ завжди можна підібрати цілу функцію $L(z)$ так, щоб виконувались перша і друга умови. Однак доведення цього не входить у мету нашого повідомлення.

УДК 517.518.6

Я.Г.Притула, І.С.Сютрик

УМОВИ НАЛЕЖНОСТІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМ КЛАСАМ ЛІПШИЦА І ЗІГМУНДА

Нехай $f: R \to C$ – рівномірна майже періодичне /РМП/ функція з рядом Фур"є

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k x},$$

де $$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_k x} dx = M\{f(x) e^{-i\lambda_k x}\}.$$

Нехай $\varphi: R_+ \to R$ – додатна і монотонно неспадна функція. Означимо класи майже періодичних функцій $Lip(\varphi)$, $Z(\varphi)$, $Lip(\varphi, p)$, $Z(\varphi, p)$. /$\varphi(0) = 0$/

$$f \in Lip(\varphi) \overset{df}{\iff} \sup_{t>0\,x} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{\varphi(t)} < \infty,$$

$$f \in Z(\varphi) \overset{df}{\iff} \sup_{t>0\,x} \frac{|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|}{\varphi(t)} < \infty,$$

$$f \in Lip(\varphi; p) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \sup_{t>0} \left[M\left\{ \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} \right|^p \right\} \right]^{1/p} < \infty,$$

$$f \in Z(\varphi, p) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$$

$$\sup_{t>0} \left[M\left\{ \left| \frac{f(x+t)-2f(x)+f(x+t)}{\varphi(t)} \right|^p \right\} \right]^{1/p} < \infty$$

Будемо вважати, що функція φ задовольняє умови

$$\int_0^t [\varphi(u)]^s u^{-1} du \le A[\varphi(t)]^s, \qquad /I/$$

$$\int_t^1 [\varphi(u)]^l u^{-r} du \le B[\varphi(t)]^l t^{1-r} \qquad /2/$$

при деяких A і B. Значення s, l, r дальше будуть уточнюватись.

<u>Теорема I.</u> Для того щоб РМП функція, коефіцієнти Фур"є якої задовольняють умову

$$\sup_{n,k\in Z} |\arg A_n - \arg A_k| = \beta < \pi, \qquad /3,$$

належала класу $Z(\varphi)$, де φ задовольняє умову /I/ при s =I і /2/ при l=I, r =3, необхідно і достатньо, щоб

$$\exists D \forall n \sum_{n/2 \le |\lambda_k| < n} |A_k| \le D\varphi(1/n). \qquad /4/$$

<u>Доведення необхідності.</u> З умови /3/ випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ ([1]), тому можемо записати

$$|f(t)-2f(0)+f(-t)| = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k(1-\cos\lambda_k t)\right| =$$
$$= 4\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin^2\frac{\lambda_k t}{2}\right|.$$

Враховуючи умову /3/, запишемо

$$|f(t)-2f(0)+f(-t)| > C_1 \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \sin^2\frac{\lambda_k t}{2} \geqslant$$
$$\geqslant C_1 \sum_{1/2t \le |\lambda_k| < 1/t} |A_k| \sin^2\frac{\lambda_k t}{2} \geqslant C_2 \sum_{1/2t \le |\lambda_k| < 1/t} |A_k|.$$

Якщо приймемо $t = 1/n$ і врахуємо, що $f \in Z(\varphi)$, то одержимо умову /4/.

Доведення достатності.

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)| = 4\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} e^{i\lambda_k x}\right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} \leq$$
$$\leq 4\left[\sum_{|\lambda_k|<1} |A_k| \frac{h^2}{2} + \sum_{|\lambda_k|\geq 1} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2}\right].$$

Не зменшуючи загальності можемо вважати, що існує C_3, при якому $t^2 < C_3 \varphi(t)$. У протилежному випадку простір, який ми розглядаємо, містить лише тотожно сталі функції. Тому існує D_1, що

$$\sum_{|\lambda_k|<1} |A_k| h^2 \leq D_1 \varphi(h). \qquad /5/$$

Виберемо N натуральне таке, що $2^N \leq 1/h < 2^{N+1}$. Тоді

$$\sum_{|\lambda_k|\geq 1} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} = \sum_{1\leq|\lambda_k|<2^N} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} +$$
$$+ \sum_{|\lambda_k|\geq 2^N} |A_k| \sin^2 \frac{\lambda_k h}{2} \leq$$
$$\leq D_2\left[h^2 \sum_{1\leq|\lambda_k|<2^N} |A_k| \lambda_k^2 + \sum_{|\lambda_k|\geq 2^N} |A_k|\right] \leq$$
$$\leq D_3\left[h^2 \sum_{\nu=0}^{N-1} 2^{2\nu+2} \sum_{2^\nu\leq|\lambda_k|<2^{\nu+1}} |A_k| + \sum_{\nu=N}^{\infty} \sum_{2^\nu\leq|\lambda_k|<2^{\nu+1}} |A_k|\right] \leq$$
$$\leq D_4\left[h^2 \sum_{\nu=0}^{N-1} 2^{2\nu+2} \varphi(1/2^{\nu+1}) + \sum_{\nu=K}^{\infty} \varphi(1/2^{\nu+2})\right] \leq$$
$$\leq D_5\left[h^2 \int_h^1 \varphi(u) u^{-3} du + \int_0^h \varphi(u) u^{-1} du\right] \leq$$
$$\leq D_6 \varphi(h).$$

Звідси і з /5/ отримуємо, що $f \in Z(\varphi)$.

Теорема 2. Якщо коефіцієнти РМП функції f задовольняють умови /3/ і /4/, де функція φ задовольняє умови /I/ при s =I і /2/ при l =I, r =2, то $f \in Lip(\varphi)$

Теорема 3. Якщо РМП функція належить до класу $Z(\varphi, p)$ при $1<p\le 2$, то її коефіцієнти Фур"є задовольняють умову

$$\Big(\sum_{n/2\le|\lambda_k|<n}|A_k|^q\Big)^{1/q}\le D\varphi(1/n),\quad 1/p+1/q=1.$$

Теорема 4. Нехай РМП функція f, коефіцієнти Фур"є якої задовольняють умову $|\lambda_k|\to\infty$ і

$$\exists D\,\forall n\ \Big(\sum_{n/2\le|\lambda_k|<n}|A_k|^p\Big)^{1/p}\le D\varphi(1/n).$$

Тоді

1/ $f\in Lip\ (\varphi, q)$ при $q\ge 2$, якщо φ задовольняє умови /I/ при $s=p$ і /2/ при $\ell=p$, $\tau=p+1$;

2/ $f\in Z\ (\varphi, q)$ при $q\ge 2$, якщо $q\ge 2$ задовольняє умови /I/ при $s=p$ і /2/ при $\ell=p$, $\tau=2p+1$.

Доведення теорем 2...4 проводиться так само, як і теореми I.

Відзначимо один наслідок: умова

$$\exists D\,\forall n\ \Big(\sum_{n/2\le|\lambda_k|<n}|A_k|^2\Big)^{1/2}\le D\varphi(1/n)$$

є необхідною і достатньою для того, щоб

I/ $f\in Lip\ (\varphi, 2)$, якщо φ задовольняє умовам /I/ при $s=2$ і /2/ при $\ell=2$, $\tau=3$

або

2/ $f\in Z\ (\varphi, 2)$, якщо φ задовольняє умовам /I/ при $s=2$ і /2/ при $\ell=2$, $\tau=5$.

Для випадку періодичної функції отримані результати частково перетинаються з результатами роботи [3]. Деякі достатні умови належності майже періодичних функцій до класів Ліпшіца та Зігмунда у випадку, коли функція $\varphi(t)=t^\alpha$, розглядались у роботі [2].

Список літератури: 1. Притула Я.Г. Про абсолютну збіжність рядів Фур"є майже періодичних функцій Бора. - ДАН УРСР, сер. А, 1967, № 4. 2. Притула Я.Г. Некоторые вопросы абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций одной и двух переменных. Автореф. дис... канд. физ-мат. наук. Львов,

1970. 3. Masako and Shin-ichi Izumi Lipschitz classes and Fourier coefficients.- J. of Math. and Mech., 1969, 18, №9.

УДК 539.3

Д.Г.Хлєбніков, О.М.Паращак

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ЗГИН КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ ГЛАДКИМ ШТАМПОМ

Задача про дію штампа на пластинку в рамках класичної теорії Кірхгофа розв"язана Л.А.Галіним [3]. У роботах [7,8] дається розв"язок осесиметричної задачі згину пластинок жорстким штампом, що базується на врахуванні деформацій поперечного зсуву в пластинці. Всі ці розв"язки, однак, приводять до ряду фізичних невідповідностей.

Операторним методом ми одержуємо розв"язок, що не має цих недоліків і добре узгоджується з розв"язком [2], знайденим на основі тривимірної теорії пружності. Наближений розв"язок задачі іншим шляхом одержано у роботі [9].

Нехай на шарнірно оперту по краю $r = c$ круглу плиту товщини $2h$ діє з силою P центрально прикладений гладкий штамп, основа якого описується рівнянням $z = f(r) + h$. Контакт штампа з пластинкою відбувається по кругу $|r| \le b$. Умова контакту має вигляд $w(r,h) =$
$= f(r) - h\delta$ при $|r| \le b$, /1/

де $w(r,h)$ – вертикальне переміщення поверхні контакту $z = h$; δ – безрозмірна осадка штампа.

Використовуючи розв"язок А.І.Лур'є [5] для нескінченного шару, маємо

$$w(r,h) = (1-\nu)[(1+\cos 2h\sqrt{\Delta})\psi + (1-\cos 2h\sqrt{\Delta})\chi], \quad /2/$$

де $\Delta = \Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$; ν – коефіцієнт Пуассона; χ, ψ – функції напружень у задачах стиску та згину шару, які задовольняють рівняння

$$F_A \Delta \chi = q/(4Gh), \quad F_B \Delta \psi = q/(4Gh). \qquad /3/$$

Тут q – контактний риск, G – модуль зсуву, а

$$F_A = 1 + \frac{\sin 2h\sqrt{\Delta}}{2h\sqrt{\Delta}}\ ; \quad F_B = 1 - \frac{\sin 2h\sqrt{\Delta}}{2h\sqrt{\Delta}}.$$

Оскільки оператори F_A і F_B є цілими функціями лапласіана Δ, то існують [I] праві обернені оператори F_A^{-1}, F_B^{-1}. Їх розклади в ряд по степенях Δ наведено у роботі [6,с.490]. Тому з умови /I/ для визначення контактного тиску q одержується диференціальне рівняння нескінченно високого порядку

$$\frac{1-\nu}{4Gh}\left[(1+\cos 2h\sqrt{\Delta})\Delta^{-1}F_B^{-1} + (1-\cos 2h\sqrt{\Delta})\Delta^{-1}F_A^{-1}\right]q = f(r) - h\delta. \qquad /4/$$

Якщо у рівнянні /4/ утримати члени до h^4, то після дворазового застосування оператора Δ прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{D}\left(1 - \frac{4}{5}h^2\Delta + \frac{256}{525}h^4\Delta^2\right)q = \Delta^2 f(r), \qquad /5/$$

де D – циліндрична жорсткість.

Зауважимо, що утримання у /4/ лише членів, не залежних від h, приводить до співвідношень теорії Кірхгофа, а утримання членів до h^2 відповідає прикладним теоріям, які враховують лише деформації поперечного зсуву.

Розв"язок рівняння /5/ після переходу до безрозмірних величин з урахуванням обмеженості напружень при $r=0$ записуємо [4]

$$q(r) = \frac{P}{\pi b^2}\bar{q}(\rho) = \frac{P}{\pi b^2}\left[A_1\tilde{u}_0(\rho) + A_2\tilde{v}_0(\rho) + q_*(\rho)\right], \qquad /6/$$

де $q_*(\rho)$ – частинний розв"язок /5/, що має вигляд

$$q_*(\rho) = \frac{\pi^2 b^2 D}{2P\sin 2\varphi}\int_0^\rho \Delta^2 f(a_0 ht)t\left[\tilde{u}_0(t)\tilde{f}_0(\rho) - \tilde{v}_0(t)\tilde{g}_0(\rho) - \right. \qquad /7/$$

$$\left. - \tilde{f}_0(t)\tilde{u}_0(\rho) + \tilde{g}_0(t)\tilde{v}_0(\rho)\right]dt;$$

а

$$\rho = \frac{r}{a_0 h}; \quad a_0 = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt[4]{21}}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{43}{21}}; \qquad /8/$$

$$\tilde{u}_0(\rho) + i\,\tilde{v}_0(\rho) = J_0(\rho e^{i\varphi}); \quad \tilde{f}_0(\rho) + i\tilde{g}_0(\rho) = H_0^{(1)}(\rho e^{i\varphi});$$

$J_0, H_0^{(1)}$ – функції Бесселя та Ханкеля першого ряду.

Після визначення контактного тиску q функції ψ та χ знаходимо з рівнянь /3/, які з прийнятою точністю можна записати у вигляді

$$\Delta\Delta\psi = g_1(r), \quad \Delta\chi = g_2(r), \qquad /9/$$

де

$$g_1(r) = \frac{1}{2D(1-\nu)}\left(1 + \frac{1}{5}h^2\Delta + \frac{11}{525}h^4\Delta^2\right)q; \qquad /I0/$$

$$g_2(r) = \frac{h^2}{6D(1-\nu)}\left(1 + \frac{1}{3}h^2\Delta\right)q.$$

Розв"язок рівнянь /9/, обмежений при $\rho = 0$ у безрозмірних координатах має вигляд

$$\psi(\rho) = B_0 h + Bh\rho^2 - \frac{a_0^4 h^4}{4}\int_0^\rho \alpha(\rho, t)\,g_1(a_0 ht)\,dt,$$

$$\chi(\rho) = C_0 h + \int_0^\rho t \ln\frac{\rho}{t}\,g_2(a_0 ht)\,dt, \qquad /II/$$

де

$$\alpha(\rho, t) = t^3\left[\ln\frac{t}{\rho} - 1 + \left(\frac{\rho}{t}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{t}\right)^2 \ln\frac{t}{\rho}\right]. \qquad /I2/$$

Для визначення сталих A_1, A_2, B_0, B та осадки δ, крім граничних умов та умови рівноваги штампа

$$[\tilde{u}_0'(\beta)\cos 2\varphi + \tilde{v}_0'(\rho)\sin 2\varphi]\,A_1 +$$

$$+ [\tilde{v}_0'(\beta)\cos 2\varphi - \tilde{u}_0'(\beta)\sin 2\varphi]\,A_2 = \frac{\beta}{2} + K, \left(\beta = \frac{\beta}{a_0 h}, K = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta \rho q_*(\rho)\,d\rho\right), \qquad (13)$$

використовуємо рівності, що забезпечують повне виконання умови /I/ у зоні контакту. Для їх одержання підставимо функції /II/ з врахуванням /I0/ у /2/ і далі в /I/. Після перетворень з утриманням членів відповідного порядку та використанням тотожностей

$$\Delta_\rho \int_0^\rho \alpha(\rho,t) g(t)\,dt = \int_0^\rho \alpha(\rho,t)\,\Delta_t g(t)\,dt - \rho^2 g(0),$$

$$\Delta_\rho \Delta_\rho \int_0^\rho \alpha(\rho,t) g(t)\,dt = \int_0^\rho \alpha(\rho,t)\Delta_t \Delta_t g(t)\,dt - 4g(0) - \rho^2 \Delta g(0)$$

одержимо, що підінтегральний вираз внаслідок /5/ дорівнює нулеві, а порівняння коефіцієнтів при ρ^2 і ρ^0 дає

$$8(1-\nu)B - \frac{\varkappa}{\pi a_0^2 \beta^2}\left[\left(a_0^2 + \frac{7}{15}\cos 2\varphi\right)A_1 + \frac{7}{15}A_2 \sin 2\varphi\right] = \frac{\Delta_\rho f(0)}{h}, \qquad /14/$$

$$2(1-\nu)B_0 - \frac{8(1-\nu)}{a_0^2}B + \frac{2}{3}\frac{\varkappa}{\pi a_0^2 \beta^2}A_1 + \delta = \frac{f(0)}{h}; \qquad /15/$$

причому $\varkappa = Ph/D$.

Умова рівності нулеві згинних моментів при $t = c$ на основі формул А.І.Лур"є [5] має вигляд

$$\frac{16\pi\beta^2(1-\nu^2)}{a_0^2}\frac{B}{\varkappa} = \int_0^\beta t\left[\left(\frac{t^2}{\gamma^2}-1\right)(1-\nu) + 2(1+\nu)\ln\frac{t}{\gamma} + \frac{2}{5}\frac{\nu}{a_0^2\gamma^2}\right]\bar{q}(t)\,dt +$$
$$+\frac{2(1+\nu)}{5a_0^2}\bar{q}(0) + \frac{11(1+\nu)}{128}\Delta\bar{q}(0), \qquad /16/$$

де $\gamma = \frac{c}{a_0 h}$.

Умову опирання пластинки $w(c,-h) = 0$ записуємо

$$\frac{B_0}{\varkappa} + \left(\gamma^2 - \frac{4}{a_0^2}\right)\frac{B}{\varkappa} = \frac{a_0^2}{8\pi(1-\nu)\beta^2}\left[\int_0^\beta\left(\alpha(\gamma,t) - \frac{16}{5a_0^2}t\ln\frac{t}{\gamma}\right)\bar{q}(t)\,dt +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\gamma^2}{5a_0^2} - \frac{47}{32}\right)\bar{q}(0) + \frac{11}{256}\gamma^2\Delta\bar{q}(0)\right]. \qquad /17/$$

Якщо радіус області контакту β відомий /наприклад, для штампа з плоскою основою/, то з рівнянь /13/, /14/, /16/ визначаємо сталі A_1, A_2, B. Сталу B_0 знаходимо з умови /17/, а δ з /15/.

Коли область контакту наперед невідома, то для її визначення використовуємо умову рівності нулеві контактного тиску при $t = \beta$

$$A_1\tilde{u}_0(\beta) + A_2\tilde{v}_0(\beta) + q_*(\beta) = 0. \qquad /18/$$

У цьому випадку зручно, задаючись β, з рівнянь /13/ та /18/ знайти

$$A_1 = \frac{1}{\Delta(\beta)}\left[\frac{1}{2}\varkappa\tilde{v}_0(\beta) + \left(\tilde{v}_0'(\beta)\cos 2\varphi - \tilde{u}_0'(\beta)\sin 2\varphi\right)q_*(\beta)\right],$$

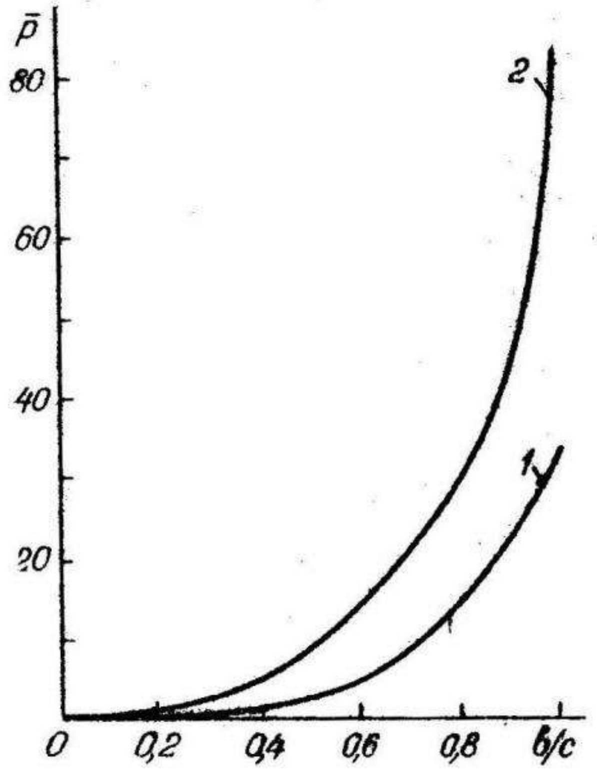

Рис.I.

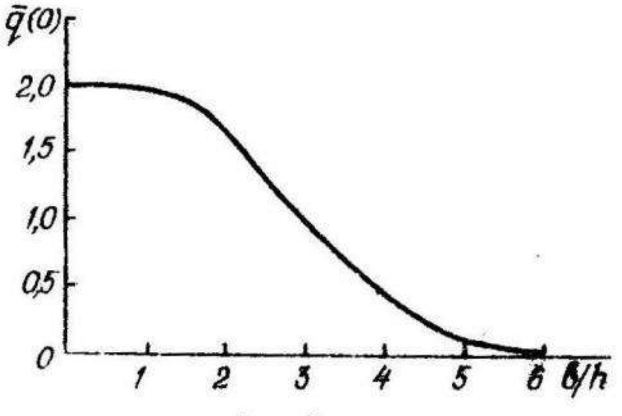

Рис.2.

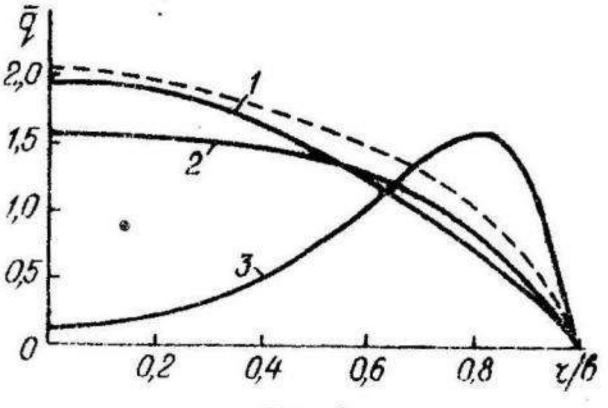

Рис.3.

$$A_2=\frac{1}{\Delta(\beta)}\left[\left(\frac{\beta}{2}+K\right)\bar{U}_0(\beta)+\left(U_0'(\beta)\cos 2\varphi+\bar{V}_0'(\beta)\sin 2\varphi\right)q_*(\beta)\right] \qquad /I9/$$

$$\Delta(\beta)=\bar{V}_0(\beta)\left[\bar{U}_0'(\beta)\cos 2\varphi+\bar{V}_0'(\beta)\sin 2\varphi\right]+\bar{U}_0(\beta)\left[\bar{U}_0'(\beta)\sin 2\varphi+\right.$$
$$\left.+\bar{V}_0'(\beta)\cos 2\varphi\right].$$

Тепер з рівняння /I6/ визначаємо $B/\varkappa$, а /I4/ використовуємо для знаходження безрозмірного зусилля $\varkappa$, що відповідає даному β. Сталі B_0 і δ дістаємо, як і раніш, з рівнянь /I7/ і /I5/.

Числові результати для штампа, у якого $f(r)=r^2/(2R)$ показані на рис.I-3. На рис. I зображено залежність між безрозмірною силою $\bar{P}=PR/(a_0^3 D)$ та відносним радіусом зони контакту b/c. Криві I,2 побудовано відповідно для c/h =2 та c/h =3,33.
На рис.2. показано розподіл контактного тиску під штампом при b/h =0,6; 2; 5; /криві I-3/. Штрихова лінія відповідає розв"язку [2] при b/h =0,6 c/h =I0.
Рис.3 ілюструє залежність тиску в центрі зони контакту від параметра b/h. При збільшенні цього параметра відбувається перерозподіл контактного тиску під штампом - максимум тиску зсувається до краю зони контакта, а тиск в центрі падає. При $b/h \geqslant 6{,}I3I$ відбувається відрив центральної частини штампа від пластинки.

Список літератури: I. Агарев В.А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости К., Изд-во АН УССР, I963. 2. Ворович И.И., Копасенко В.В. Контактная задача для оснований, работающих в условиях изгиба.- В кн.: Труды IУ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Ереван, I964. 3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.,Гостехиздат, I953. 4. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., Наука, I97I. 5. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, I955. 6. Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука, I970.

7. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К., Наукова думка, 1973. 8. Розенберг Л.А. О давлении твердого тела на пластинку. – Инженерный сборник, 1955, т.21.
9. Швабюк В.И., Мурзавецкий П.Т. Контактная задача для трансверсально изотропных балок и плит с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. – Строительная механика и расчет сооружений, 1977, вып.9.

УДК 517.512

М.Й.Михалюк

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ОБМЕЖЕНУ ДРУГУ ВАРІАЦІЮ

Означення. Нехай на проміжку $[a,b]$ визначена функція $f(x)$. Функцію $f(x)$ назвемо функцією з обмеженою другою варіацією, якщо суми

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta^2\left(f,\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_k)+f(x_{k+1})-2f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|$$

залишаються обмеженими при будь-якому розбитті $[a,b]$ точками

$$x_k,\ k=0,1,\dots n,\quad x_0=a,\ x_n=b.$$

Користуючись елементарними міркуваннями й обчисленнями, не важко показати, що є такі леми:

Лема 1. Якщо $f(x)$ має обмежену другу варіацію на проміжку $[a,b]$, то майже всюди існує співвідношення

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{\Delta^2(f,x)}{h}\right|=\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}\right|<\infty.$$

Лема 2. Нехай для функції $f(x)$, визначеній на $[a,b]$, виконується умова

$$\lim_{d(\Pi)\to 0}\ \sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x_i)+f(x_i+1)-2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|=0,$$

де $$d(\Pi)=\max_i|x_{i+1}-x_i|.$$

Тоді $f(x)$ задовольняє умову гладкості майже у кожній точці проміжка $[a,b]$, тобто

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2(f,x)}{h} = 0.$$

Лема 3. Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом на вимірній множині E. Позначимо через E_A^ε множину точок $x\in E$ для яких:

I/ існує симетрична множина P_x відносно точки x;

2/ для кожної точки x існує послідовність інтервалів $\{x-d_m(x), x+d_m(x)\}$ таких, що для будь-якого m

$$\frac{mes\, P_x \cap \{x-d_m(x), x+d_m(x)\}}{2d_m(x)} \geq \varepsilon > 0;$$

3/ $$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} \geq A$$ при $x+h\in P_x$.

Тоді множина E_A^ε – вимірна за Лебегом.

Лема 4. Для вимірної функції $f(x)$, визначеній на вимірній множині E, функція

$$W_1(x) = \varlimsup_{h\to 0} \frac{\Delta^2(f,x)}{h}$$

також L-вимірна.

Лема 5. Нехай $f(x)$, визначена на $[a,b]$, має обмежену другу варіацію і

$$\lim_{n\to+\infty} m^*\{f(x)>n\}=0.$$

Тоді множина точок, для яких існує

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2(f,x)}{h},$$

вимірна за Лебегом.

Спираючись на вище сформульовані леми, методами теорії функцій дійсної змінної можна показати справедливість теореми, яка є основою роботи.

Теорема. Нехай $f(x)$ визначена на проміжку $[a,b]$ і задовольняє такі умови:

I/ функція $f(x)$ має обмежену другу варіацію;

2/ існує

$$\lim_{d(R)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\Delta^2\left(f, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right|,$$

де $d(R) = \max_i |x_i - x_{i+1}|$.

Тоді множина

$$\tilde{A} = \left\{x \in [a,b], \exists \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2(f,x)}{h}\right\}$$

є повної міри, тобто $m\tilde{A} = b-a$.

Список літератури: I. Песін І.М. Вимірність майже всюди симетрично-неперервних функцій. – Доповіді та повідомлення Львів. держ. ун-ту, I96I, ч.2, вип.9. 2. Пономарьов С.П. Про деякі питання симетричної неперервності і симетричної диференційованості. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Львів, I966.

УДК 5I7.9I3

Ю.В.Жерновий, В.Г.Костенко

ЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ П"ЯТОГО ПОРЯДКУ, ІНТЕГРОВАНІ У ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Мета нашої роботи полягає в тому, щоб з усіх лінійних звичайних диференціальних рівнянь п"ятого порядку виділити сукупність тих, фундаментальну систему розв"язків яких можна знайти у замкнутій формі і дати їх схему визначення.

Відомо [2], що рівняння

$$y^{(V)} + A(x)y''' + B(x)y'' + C(x)y' + D(x)y = 0 \qquad /I/$$

може бути інваріантним лише відносно групи перетворень з операторами виду

$$X_1 = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + 2\xi'(x)y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad /2/$$

$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial y},$$

а коефіцієнти рівняння /I/ при цьому повинні визначатися співвідношеннями

$$A(x) = \xi^{-2}(x)\left[c_1 - 10\xi''(x)\xi(x) + 5\xi'^2(x)\right], \quad B(x) = c_2\xi^{-3}(x) + 1{,}5\,A'(x),$$
$$C(x) = (c_3 - 3c_2\xi'(x))\xi^{-4}(x) + 0{,}9\,A''(x) + (0{,}4\,A(x))^2,$$
$$D(x) = \left[c_4 - 2c_3\xi'(x) + 2c_2(2\xi'^2(x) - \xi''(x)\xi(x))\right]\xi^{-5}(x) + 0{,}2\,A'''(x) + 0{,}16\,A(x)A'(x), \qquad /3/$$

де $\xi(x)$ – довільна достатньо гладка функція; c_1, c_2, c_3, c_4 – довільні сталі.

Зауважимо, що виділена сукупність рівнянь /I/ з умовами /3/ містить лінійні рівняння п"ятого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо $\xi(x) = const$, і рівняння Ейлера, якщо $\xi(x) = x$.

Рівняння /I/ з умовами /3/ у канонічних змінних

$$\varphi = \int_{x_0}^{x} \xi^{-1}(t)\,dt, \quad \chi = \ln\frac{y}{\xi^2(x)} \qquad /4/$$

групи перетворень /2/ набере вигляду

$$\chi^{(V)} + 5\chi'\chi^{(IV)} + 10(\chi''\chi''' + \chi'^2\chi''' + \chi'^3\chi'') + 15\chi'\chi''^2 +$$
$$+ c_1(\chi''' + 3\chi'\chi'' + \chi'^3) + c_2(\chi'' + \chi'^2) + \chi'^5 + c_3\chi' + c_4 = 0.$$

Провівши в останньому послідовно заміну

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = u(\varphi), \quad \frac{du}{d\varphi} = p(u),$$

матимемо

$$p^3p''' + 4p^2p'p'' + 5up^2p'' + pp'^3 + 5upp'^2 + 10p(pp' + upp' + u^2) +$$
$$+ 15up^2 + c_1(pp' + 3up + u^3) + c_2(p + u^2) + u^5 + c_3u + c_4 = 0. \qquad /I'/$$

Шукаючи розв"язок рівняння /I'/ у вигляді $p(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$, одержимо для визначення α, β, γ систему алгебраїчних рівнянь

$$24\alpha^4 + 50\alpha^3 + 35\alpha^2 + 10\alpha + 1 = 0, \quad (6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha + 1)\beta = 0,$$
$$50\alpha^2\beta^2 + 40\alpha^3\gamma + 75\alpha\beta^2 + 80\alpha^2\gamma + 50\alpha\gamma + 10\gamma + 25\beta^2 + 2c_1\alpha^2 + 3c_1\alpha + c_1 = 0, \qquad /5/$$
$$60\alpha^2\beta\gamma + 15\alpha\beta^3 + 100\alpha\beta\gamma + 15\beta^3 + 40\beta\gamma + 3c_1\alpha\beta + 3c_1\beta + c_2\alpha + c_2 = 0,$$

$$16\alpha^2\gamma^2+22\alpha\beta^2\gamma+\beta^4+30\alpha\gamma^2+25\beta^2\gamma+15\gamma^2+2c_1\alpha\gamma+c_1\beta^2+3c_1\gamma+c_2\beta+c_3=0;$$

$$8\alpha\beta\gamma^2+\beta^3\gamma+10\beta\gamma^2+c_1\beta\gamma+c_2\gamma+c_4=0.$$

Із перших двох рівнянь цієї системи виплиknown, що α може набувати значення: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ при довільних β і $-\frac{1}{4}$ при $\beta = 0$. У зв"язку з цим система /5/ розпадається на три системи для визначення β і γ при $\alpha = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ і на чотири системи для знаходження γ при $\alpha = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ і $\beta = 0$.

Розв"язуючи кожну із цих систем і повертаючись до змінних x, y одержуємо в кожному випадку

$$y(x,x_0) = z^2(x)\exp\chi(\varphi(x,x_0)). \qquad /6/$$

У зображення функції $\chi(\varphi(x, x_0))$ входить певна кількість довільних сталих інтегрування, коефіцієнти при яких у /6/ дають, принаймні, два лінійно незалежних розв"язки рівняння /I/ з умовами /3/. Понижуючи порядок рівняння /I/ за допомогою цих розв"язків, одержимо лінійне рівняння не вище третього порядку, яке інтегрується у замкнутій формі [I]. Легко переконатись, що визначена таким чином сукупність п"яти розв"язків рівняння /I/ з умовами /3/ утворює фундаментальну систему розв"язків.

Залежно від співвідношень між сталими c_1, c_2, c_3, c_4, що входять в умови /3/, а також між коренями допоміжних алгебраїчних рівнянь, які виникають як наслідки системи /5/, одержано тридцять два різні випадки і їм відповідні фундаментальні системи розв"язків рівняння /I/ з умовами /3/.

Наприклад, якщо $\alpha = -1, \beta = 0, c_4 + c_2^2 c_3 - c_1 c_2 c_4 = 0, -\frac{c_4}{c_2} = a^2 > 0$ і корені $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ рівняння $\delta^3 + (c_1 + a^2)\delta - c_2 = 0$ задовольняють нерівність $\delta_2\delta_3 - \frac{1}{4}\delta_1^2 = \tilde{a}^2 > 0$, то фундаментальна система розв"язків відповідного рівняння /I/ з умовами /3/ має вигляд

$$y_1(x,x_0)=\xi^2(x)\exp\left[a\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_2(x,x_0)=\xi^2(x)\exp\left[-a\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_3(x,x_0)=\xi^2(x)\cos\left[\tilde{a}\varphi(x,x_0)\right]\exp\left[\tfrac{1}{2}\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_4(x,x_0)=\xi^2(x)\sin\left[\tilde{a}\varphi(x,x_0)\right]\exp\left[\tfrac{1}{2}\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$
$$y_5(x,x_0)=\xi^2(x)\exp\left[-\delta_1\varphi(x,x_0)\right],$$

де $\varphi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt.$

Список літератури: 1. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка.- Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. *Lie Sophus. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.*

УДК 517.913

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=f(x,y,y',y'',y''')$$

розглянемо задачу Коші у вигляді

$$y^{(IV)}+A(x)y''+A'(x)y'+C(x)y=(A(x)-p_1(x))y''+(A'(x)-p_2(x))y'+ \qquad /1/$$
$$+(C(x)-p_3(x))y+f(x,y,y',y'',y'''),$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ y'''(x_0)=y_0''', \qquad /2/$$

де $A(x)=\xi^{-2}(x)(\mu-5\xi''(x)\xi(x)+\frac{5}{2}\xi'^2(x))$; $C(x)=(0{,}3\mu)^2\xi^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+(0{,}3A(x))^2$.

Нехай функції $p_1''(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ і $\xi^{(IV)}(x)$ неперервні на інтервалі $x_0\le x<\infty$, $f(x,y,y',y'',y''')$ – неперервна в області D $(x_0\le x<\infty,$ $|y|,|y'|,|y''|\,|y'''|\le m)$ і μ – довільний додатний параметр. За цих умов задача /1/, /2/ методом варіації довільних сталих і наступним інтегруванням частинами зведена до інтегро-диференціального рівняння [1]

$$y(x,x_0)=\zeta^{\frac{3}{2}}(x)\{C_1\cos a\varphi(x,x_0)+C_2\sin a\varphi(x,x_0)+C_3\cos^3 a\varphi(x,x_0)+$$
$$+C_4\sin^3 a\varphi(x,x_0)+\int_{x_0}^{x}\zeta^{-\frac{1}{2}}(t)[\mathcal{P}_1(t)\cos a\varphi(x,t)+\mathcal{P}_2(t)\sin a\varphi(x,t)+\mathcal{P}_1(t)\cos^3 a\varphi(x,t)\qquad /3/$$
$$+\mathcal{P}_3(t)\sin^3 a\varphi(x,t)]y(t,x_0)dt+\frac{1}{6a^3}\int_{x_0}^{x}\zeta^{\frac{3}{2}}(t)\sin^3 a\varphi(x,t)f(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))dt\},$$

де

$$\mathcal{P}_1(x)=\frac{1}{a^2}\left[\zeta'(x)(A(x)-\rho_1(x))+\zeta(x)\left(\frac{A'(x)+\rho_2(x)}{2}-\rho_1'(x)\right)\right];\ \mathcal{P}_2(x)=\frac{1}{a}(A(x)-\rho_1(x));$$
$$\mathcal{P}_3(x)=\frac{1}{6a^3}\left[\left(\frac{3}{2}\zeta''(x)\zeta(x)+\frac{3}{4}\zeta'^2(x)-9a^2\right)(A(x)-\rho_1(x))+3\zeta'(x)\zeta(x)\left(\frac{A'(x)+\rho_2(x)}{2}-\rho_1'(x)\right)+\right.$$
$$\left.+\zeta^2(x)\left(C(x)+\rho_2'(x)-\rho_3(x)-\rho_1''(x)\right)\right];$$

$a=(0,1\mu)^{\frac{1}{2}}$; $\varphi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}\zeta^{-1}(t)dt$; C_1, C_2, C_3, C_4 залежать лише від y_0, y_0', y_0'', y_0''', $\zeta(x_0)$, $\zeta'(x_0)$, $\zeta''(x_0)$, $\zeta'''(x_0)$, $\rho_1(x_0)$ і $\rho_1'(x_0)$.

Якщо в $\mathcal{D}$

$$|f(x,y,y',y'',y''')|\le r(x)y^{\alpha},\quad r(x)>0, \qquad /4/$$

то для всіх розв"язків задачі /1/, /2/ із /3/ випливає нерівність

$$|y(x,x_0)\zeta^{-\frac{3}{2}}(x)|\le C+\int_{x_0}^{x}(\kappa_1(t)|y(t,x_0)|+b_1(t)|y(t,x_0)|^{\alpha})dt, \qquad /5/$$

де $\kappa_1(x)=4\max_{x}[|\mathcal{P}_1(x)|,|\mathcal{P}_2(x)|,|\mathcal{P}_3(x)|]$; $b_1(x)=\frac{1}{6a^3}|\zeta^{\frac{3}{2}}(x)|r(x)$; $C=\max[|C_1|,|C_2|,|C_3|,|C_4|]$. Заміною

$$y(x,x_0)=\zeta^{\frac{3}{2}}(x)z(x,x_0) \qquad /6/$$

зводимо /5/ до

$$|z(x,x_0)|\le C+\int_{x_0}^{x}(\kappa(t)|z(t,x_0)|+b(t)|z(t,x_0)|^{\alpha})dt, \qquad /7/$$

де $\kappa(x)=\zeta^{\frac{3}{2}}(x)\kappa_1(x)$; $b(x)=|\zeta(x)|^{\frac{3\alpha}{2}}b_1(x)$.

Застосовуючи лему Перова [2] до нерівності /7/, одержуємо:

1/ якщо $0\le\alpha<1$, то для всіх $x\ge x_0$

$$|z(x,x_0)|\le R_1(x), \qquad /8/$$

де

$$R_1(x) = \{c^{1-\alpha} \exp[(1-\alpha)\int_\tau^x k(s)ds] + + (1-\alpha)\int_{x_0}^x b(\tau) \exp[(1-\alpha)\int_\tau^x k(s)ds]d\tau\}^{\frac{1}{1-\alpha}} ; \qquad /9/$$

2/ якщо $\alpha > 1$ і початкові умови /2/ такі, що

$$c < [(\alpha-1)\int_{x_0}^{x_0+h} b(s)ds]^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp(-\int_{x_0}^{x_0+h} k(s)ds) = R_2(h), \qquad /10/$$

то на відрізку $x_0 \leq x \leq x_0+h$

$$|z(x,x_0)| \leq R_3(x), \qquad /11/$$

де

$$R_3(x) = c\{\exp[(1-\alpha)\int_{x_0}^x k(s)ds] - - c^{\alpha-1}(\alpha-1)\int_{x_0}^x b(\tau) \exp[(1-\alpha)\int_\tau^x k(s)ds]d\tau\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad /12/$$

Враховуючи заміну /6/, для розв"язків задачі /I/, /2/ маємо оцінки: якщо $0 \leq \alpha < 1$, то

$$|y(x,x_0)| \leq |\zeta(x)|^{\frac{1}{2}} R_1(x), \quad x \geq x_0 ; \qquad /13/$$

якщо $\alpha > 1$ і $c < R_2(h)$, то

$$|y(x,x_0)| \leq |\zeta(x)|^{\frac{1}{2}} R_3(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0+h ; \qquad /14/$$

за лемою Гронолла-Беллмана [2], якщо $\alpha = 1$, то

$$|y(x,x_0)| \leq c|\zeta(x)|^{\frac{1}{2}} \exp\int_{x_0}^x (k(t)+b(t))dt, \quad x \geq x_0 \qquad /15/$$

Праві частини /13/, /15/, якщо вони необмежені при $x \to \infty$, дають оцінку зверху для тих швидкостей, з якими розв"язки задачі /I/, /2/ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ прямують до ∞ при $x \to \infty$.

Знайдемо достатні умови, за яких розв"язки задачі /I/, /2/ будуть обмеженими при $x \to \infty$. Нехай

$$\int_{x_0}^\infty k(t)dt = k_0 < \infty, \quad \int_{x_0}^\infty b(t)dt = b_0 < \infty . \qquad /16/$$

Тоді за $\alpha > 1$ $R_2(\infty) = \exp(-k_0)[(\alpha-1)b_0]^{\frac{1}{1-\alpha}} = S_0 < \infty$. Якщо початкові умови /2/ такі, що нерівність /10/ існує для $h \leq \infty$, то оцінка /11/ також має місце для $x \geq x_0$ і, крім того, /9/ та /12/ за умов /16/ будуть обмеженими при $x \to \infty$.

З аналізу оцінок /I3/ – /I5/ випливає таке твердження.

Теорема. Нехай $f(x,y,y',y'',y''')$ неперервна в області $\mathcal{D}(x_0 \le x < \infty,$ $|y|,|y'|,|y''|,|y'''| \le m)$, $p_1''(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ неперервні на інтервалі $x_0 \le x < \infty$. Крім того, нехай мають місце умови /4/ і/I6/, якщо $0 \le \alpha \le 1$, або /4/, /I6/ і $c < R_2(\infty)$, коли $\alpha > 1$.

Тоді всі розв"язки задачі /I/, /2/ будуть обмеженими, якщо функція $\xi(x)$ залишається обмеженою при $x \to \infty$, або прямує до нуля, коли $\xi(x)$ прямує до нуля при $x \to \infty$.

Приклад. Легко переконатись, що в інтервалі $x_0 \le x < \infty$ для рівняння

$$y^{(IV)} + \mu x^2 y'' + a x^\gamma y' + 0{,}18\mu^2 x^4 y = x^{-\beta} y^\alpha \sin f(x,y,y',y'',y''') \qquad /I7/$$

всі умови теореми задовольняються, якщо вибрати $\gamma < \frac{5}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, $\alpha \ge 0$ і $\xi(x) = \frac{1}{x}$. Таким чином, за відповідних початкових умов розв"язки рівняння /I7/ прямуватимуть до нуля зі швидкістю, не меншою від швидкості прямування до нуля функції $\xi^{\frac{3}{2}}(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ при $x \to \infty$.

Список літератури: I. Костенко К.С. Лінійні звичайні диференціальні рівняння четвертого порядку, інтегровані в замкнутій формі. – Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, I974, вип.9. 2. Павлюк I.A. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київського ун-ту, I970.

УДК 517.913

М.П.Карпа

АСИМПТОТИКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для рівняння

$$y''' + p(t)y' + g(t)y = 0 \qquad /I/$$

з початковими умовами

$$y(t)\big|_{t=\tau} = q_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma),\ y'_t(t)\big|_{t=\tau} = q_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma), \qquad /2/$$
$$y''_{t^2}(t)\big|_{t=\tau} = q_3(\tau,\alpha,\beta,\gamma),$$

де $g(t)$ – неперервна, а $p(t)$ і $\xi(t)$ – неперервно диференційовані на інтервалі $t_0 \le t < \infty$ відповідно один і три рази. Вважаємо; параметри α, β, γ задовольняють умову $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Відомо [2], що існує фундаментальна система розв"язків $y_1(t,t_0)$ $y_2(t,t_0)$, $y_3(t,t_0)$ рівняння /I/, асимптотичне представлення яких при $t \to \infty$ має вигляд

$$y_1(t,t_0) = \xi(t)\left[\cos\sqrt{\mu}\,\varphi(t,t_0) + o(1)\right],\ t\to\infty,$$
$$y_2(t,t_0) = \xi(t)\left[\sin\sqrt{\mu}\,\varphi(t,t_0) + o(1)\right],\ t\to\infty, \qquad /3/$$
$$y_3(t,t_0) = \xi(t)(1+o(1)),\ t\to\infty,$$

якщо виконуються умови

$$\int_{t_0}^{\infty} B(t)dt < \infty,\ \lim_{t\to\infty}\Phi(t)\xi^2(t) = 0,\ \lim Q(t)\xi^2(t) = 0, \qquad /4/$$
$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t,t_0) = \infty,\ \lim_{t\to\infty}(A_1(t) - p(t))\xi^2(t) = 0,$$

де

$$A_1(t) = \xi^{-2}(t)\left[\mu - 2\xi''(t)\xi(t) - \xi'^2(t)\right],\ \mu > 0;$$
$$\Phi(t) = \frac{1}{\mu}\left[\xi'(t)(A_1(t) - p(t)) + \xi(t)\left(\frac{A_1'(t)}{2} - p'(t) + g(t)\right)\right],$$
$$Q(t) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}(A_1(t) - p(t)), \qquad /5/$$
$$B(t) = 3|\xi(t)|\max_t\left[|\Phi(t)|, |Q(t)|\right];$$
$$\varphi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t}\xi^{-1}(s)ds.$$

Використовуючи формули /3/, знайдемо асимптотичну поведінку розв"язку $y(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ задачі /I/, /2/. Вдосконалюючи методику робіт $\left[1,3,4\right]$, виявили :

Лема 1. Розв"язок задачі /I/, /2/ записуємо у вигляді

$$y(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\mu^{-\frac{1}{4}}\xi(t)\{(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\sin\gamma)\cdot\cos(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)- \qquad /6/$$

$$-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\cos\gamma+o(1)\}_{,t\to\infty}$$

$$y_t'(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\mu^{-\frac{1}{4}}\{\xi'(t)[(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{3/4}\sin\gamma)\cdot\cos(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-$$

$$-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\cos\gamma\,]- \qquad /7/$$

$$-\sqrt{\mu}(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{\frac{3}{4}}\sin\gamma)\cdot\sin(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+o(1)\}_{,t\to\infty}$$

$$y_{t^2}''(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\mu^{-\frac{1}{4}}\{(\xi''(t)+\mu\xi^{-1}(t))(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{3/4}\sin\gamma)\cdot\cos(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-$$

$$-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})-\sqrt{\mu}\,\xi'(t)\xi^{-1}(t)(A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\mu^{3/4}\sin\gamma)\times$$

$$\times\sin(\sqrt{\mu}\,\varphi(t,\tau)-\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha})+\xi''(t)(C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+ \qquad /8/$$

$$+\mu^{3/4}\cos\gamma)+o(1)\},\ t\to\infty .$$

Крім того,

$$\lim_{\tau\to\infty}A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=0;\ \lim_{\tau\to\infty}\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=0;\ \lim_{\tau\to\infty}C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

якщо

$$g_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\xi(\tau)(\cos\alpha+\cos\gamma),$$

$$g_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\xi'(\tau)(\cos\alpha+\cos\gamma)+\sqrt{\mu}\cos\beta, \qquad /9/$$

$$g_3(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=(\xi''(\tau)-\mu\xi^{-1}(\tau))\cos\alpha+\sqrt{\mu}\,\xi'(\tau)\xi^{-1}(\tau)\cos\beta+\xi''(\tau)\cos\gamma.$$

Лема 2. Для достатньо малих Δ справедлива тотожність

$$y(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=h(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)\,y(t,\tau+\Delta,\alpha^*,\beta^*,\gamma^*), \qquad /10/$$

це

$$h(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)=\{\mu^{-2}M^2(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)+[\mu^{-\frac{1}{2}}(y'(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\xi'(\tau+\Delta)\xi^{-1}(\tau+\Delta)\times \qquad /11/$$

$$\times y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma))]^2+(\xi^{-1}(\tau+\Delta)y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\mu^{-1}M(\tau,\alpha,\beta,\gamma))^2\}^{1/2};$$

$$\cos\alpha^* = h^{-1}(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)\cdot\mu^{-1}M(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta), \qquad /12/$$

$$\cos\beta^* = h^{-1}(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)\,\mu^{-\frac{1}{2}}(y'(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\xi'(\tau+\Delta)\xi^{-1}(\tau+\Delta)y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)), \qquad /13/$$

$$\cos\gamma^* = h^{-1}(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta)(\xi^{-1}(\tau+\Delta)y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\mu^{-1}M(\tau,\alpha,\beta,\gamma)), \qquad /14/$$

$$\begin{aligned} M(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta) &= -\xi(\tau+\Delta)y''(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\xi'(\tau+\Delta)y'(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma)+ \\ &+(\xi''(\tau+\Delta)-\xi'^2(\tau+\Delta)\xi^{-1}(\tau+\Delta))\,y(\tau+\Delta,\tau,\alpha,\beta,\gamma). \end{aligned} \qquad /15/$$

Крім того, при $\Delta \to 0$

$$\begin{aligned} &h(\tau,\alpha,\beta,\gamma,\Delta) = 1+\Delta\, r(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta);\ \alpha^* = \alpha+\Delta\cdot l(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta); \\ &\beta^* = \beta+\Delta\cdot\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta);\ \gamma^* = \gamma+\Delta f(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+o(\Delta), \end{aligned} \qquad /16/$$

де

$$r(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = -\sqrt{\mu}\,\xi^{-1}(\tau)\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sqrt{\mu}\,\xi^{-1}(\tau)\cos\beta+\mu^{-1}(\cos\alpha-\cos\gamma)N(\tau,\alpha,\beta,\gamma), \qquad /17/$$

$$l(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\sin\alpha}\,(r(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\alpha-\mu^{-1}N(\tau,\alpha,\beta,\gamma)), \qquad /18/$$

$$\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\sin\beta}\,(r(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\beta+\mu^{3/2}\,\xi^{-1}(\tau)\cos\alpha), \qquad /19/$$

$$f(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\sin\gamma}\,(r(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\gamma-\sqrt{\mu}\,\xi^{-1}(\tau)+\mu^{-1}N(\tau,\alpha,\beta,\gamma)); \qquad /20/$$

$$\begin{aligned} N(\tau,\alpha,\beta,\gamma) &= (\xi'''(\tau)+g(\tau)\xi(\tau)-2\xi^{-1}(\tau)\xi'(\tau)\xi''(\tau)+\xi'^3(\tau)\xi^{-2}(\tau))\xi(\tau)(\cos\alpha+\cos\gamma)+ \\ &+(2\xi''(\tau)+p(\tau)\xi(\tau)-\xi^{-1}(\tau)\xi'^2(\tau))(\xi'(\tau)\cos\alpha+\sqrt{\mu}\cos\beta+\xi'(\tau)\cos\gamma). \end{aligned} \qquad /21/$$

<u>Лема 3.</u> Функції $A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $c(\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ задовольняють рівняння у частинних похідних

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial\tau}+\frac{\partial A}{\partial\alpha}\cdot l(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial A}{\partial\beta}\,\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial A}{\partial\gamma}\,f(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \\ &= -r(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\tilde{q}_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma); \end{aligned} \qquad /22/$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\,l(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\,\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\,f(\tau,\alpha,\beta,\gamma) = \\ &= \frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2\gamma}\,\kappa(\tau,\alpha,\beta,\gamma)-\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2\gamma}\,l(\tau,\alpha,\beta,\gamma); \end{aligned} \qquad /23/$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}+\frac{\partial c}{\partial \alpha}\, l(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial c}{\partial \beta}\, K(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\frac{\partial c}{\partial \gamma}\, f(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=$$

$$=-z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)+\tilde{q}_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma), \qquad /24/$$

де

$$\tilde{q}_1(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=-\mu^{-\frac{1}{2}} z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\sin\gamma-\mu^{-\frac{1}{2}} f(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\gamma, \qquad /25/$$

$$\tilde{q}_2(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\mu^{-\frac{1}{2}} f(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\sin\gamma-\mu^{-\frac{1}{2}} z(\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cos\gamma. \qquad /26/$$

Лема 4. Нехай $\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ є розв"язками задачі Коші

$$\begin{aligned}
&\Theta_s'(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=l\,[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)],\ \Theta(\tau,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\alpha,\\
&F_s'(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=K\,[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)],\ F(\tau,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\beta,\\
&E'(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=f\,[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)],\ E(\tau,\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\gamma,
\end{aligned} \qquad /27/$$

і кінець вектора $\bar{a}\,(\cos\Theta,\cos F,\cos E)$ не лежить між площинами

$$z+\delta=0,\quad z-\delta=0 \qquad /28/$$

при деякому фіксованому $\delta>0$.

Тоді

$$Q(s)=\exp\Big[\int_\tau^s z(t,\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma))\,dt\Big] \qquad /29/$$

обмежена при $s\to\infty$.

Основна теорема. При виконанні умов /4/, /5/, /9/, /28/ розв"язок задачі Коші /I/, /2/ зображається асимптотичними формулами /6/, /7/, /8/, при цьому

$$A(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=-\int_\tau^\infty\Big\{\tilde{q}_1[s,\Theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)]\times$$

$$\times\exp\Big[\int_\tau^s z(t,\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma))\,dt\Big]\Big\}\,ds;$$

$$\Psi(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\int_\tau^\infty\Big[\sqrt{\mu}\, z^{-1}(t)+\frac{\sin\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot\cos F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}{\sin^2 E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}\, l(t,\Theta,F,E)-$$

$$-\frac{\cos\Theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)\cdot\sin F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}{\sin^2 E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma)}\, K(t,\Theta,F,E);$$

$$C(\tau,\alpha,\beta,\gamma)=\int_{\tau}^{\infty}\{\tilde{q}_2[s,\theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)]\times$$

$$\times\exp[\int_{\tau}^{s} r(t,\theta(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),F(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma),E(t,\tau,\alpha,\beta,\gamma))dt]\}ds\;,$$

де $r(s,\theta,F,E)$, $l(s,\theta,F,E)$, $k(s,\theta,F,E)$, $f(s,\theta,F,E)$, $\tilde{q}_1(s,\theta,F,E)$, $\tilde{q}_2(s,\theta,F,E)$ визначені формулами /17/, /18/, /19/, /20/, /25/, /26/, а $\theta(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $F(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$, $E(s,\tau,\alpha,\beta,\gamma)$ – розв"язки задачі /27/.

Список літератури: 1. Бурим В.М., Павлюк І.А. Асимптотика розв"язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку. – УМЖ, 1974, т.26, № 6. 2. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. – Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 3. Wing G.M. Invariant Imbedding and the Asymptotic Behavior of Solution to Initial Value Problems.- J. Math. Anal. Appl., 1964, №9. 4. Hagin F.G. Some Asymptotic Behavior Results for Initial Value Problems: An Application of Invariant Imbedding.- J. Math. Anal. Appl. 1967, №20.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

АСИМПТОТИКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ШОСТОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

У прямокутнику $D:\{0<x<l,\ 0<t\leq T\}(0<l<\infty,\ 0<T<\infty)$ розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon^4\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}=f(x,t) \qquad /1/$$

з початковими

$$u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \qquad /2/$$

і граничними умовами

$$u(0,t)=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=u(l,t)=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}=0, \qquad /3/$$

це $\varepsilon > 0$ – малий дійсний параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

I/ в області $\bar{\bar{D}}$ існують неперервні й обмежені похідні

$$\frac{\partial^i f(x,t)}{\partial x^j \partial t^{i-j}} \quad (i=0,\dots,N+1;\ j=0,\dots,i),$$

2/ $$\frac{\partial^i f(0,0)}{\partial x^j \partial t^{i-j}}=\frac{\partial^i f(l,0)}{\partial x^i \partial t^{i-j}}=0 \quad (i=0,\dots,N+1;\ j=0,\dots,i).$$

Методом М.І.Вішика – Л.А.Люстерніка [I] побудуємо асимптотичний розклад по степенях параметра ε розв"язку задачі /I/ – /3/.

Розклад шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \bar{u}_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i \Pi_i(\xi,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i Q_i(\eta,t)+\varepsilon \overset{N+1}{Z}_{N}(x,t,\varepsilon), \qquad /4/$$

це $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $\eta=\frac{l-x}{\varepsilon}$ – регуляризуючі перетворення.

Функції $\bar{u}_i(x,t)$ визначаються з першого ітераційного процесу, як розв"язки змішаних задач для хвильових рівнянь

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x^2}=\frac{\partial^6 \bar{u}_{i-4}}{\partial x^6} \quad (i=0,\dots,N); \qquad /5/$$

$$\bar{u}_i(x,0)=\frac{\partial \bar{u}_i(x,0)}{\partial t}=0, \qquad /6/$$

$$\bar{u}_i(0,t)=-\Pi_{i-1}(0,t) \quad ; \quad \bar{u}_i(l,t)=-Q_{i-1}(0,t) \ . \qquad /7/$$

Тут і далі вважатимемо $\bar{u}_j(x,t)=\Pi_j(\xi,t)=Q_j(\eta,t)\equiv 0$, коли $j<0$, $\bar{u}_{N+1}(x,t)\equiv 0$.

Функції примежового шару в околі границі прямокутника отримують як розв"язки звичайних диференціальних рівнянь.

Отже, функції примежового шару в околі лівої границі прямокутника D є розв"язками таких задач:

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^6 \Pi_i}{\partial \xi^6} = \frac{\partial^2 \Pi_{i-2}}{\partial t^2} \quad (i=0,\dots,N+1), \qquad /8/$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{U}_i(0,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Pi_i(0,t)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \bar{U}_{i-1}(0,t)}{\partial x^2} \qquad /9/$$

при умовах $\lim\limits_{\xi \to \infty} \Pi_i(\xi,t) = 0$ в D.

Функції примежового шару в околі правої границі прямокутника D є розв"язками

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^6 Q_i}{\partial \eta^6} = \frac{\partial^2 Q_{i-2}}{\partial t^2} \quad (i=0,\dots,N+1) \quad ; \qquad /10/$$

$$\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{U}_i(l,t)}{\partial x} \; ; \quad \frac{\partial^2 Q_i(0,t)}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 \bar{U}_{i-1}(l,t)}{\partial x^2} \qquad /11/$$

при умовах $\lim\limits_{\eta \to \infty} Q_i(\eta,t) = 0$ в D.

Виродження - регулярне, бо серед коренів характеристичних рівнянь для рівнянь /8/, /10/ є рівно два корені, а саме $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, з від"ємними дійсними частинами, що збігається з кількістю граничних умов, які випадають при переході до виродженої задачі. Методом математичної індукції легко показати, що всі $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$ $(i=0,\dots,N+1)$ мають характер примежового шару. Легко побачити з /5/ - /6/, /8/ - /9/, /10/ - /11/, що, коли рекурентні процеси вести одночасно, то можна знайти всі $\bar{U}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$, $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$ $(i=0,\dots,N+1)$.

Залишковий член $Z_N(x,\varepsilon,t)$ є розв"язком задачі

$$\frac{\partial^2 Z_N}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z_N}{\partial x^2} - \varepsilon^4 \frac{\partial^6 Z_N}{\partial x^6} = \tilde{f}(x,t), \qquad /12/$$

$$Z_N(x,0) = \frac{\partial Z_N(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad /I3/$$

$$Z_N(0,t) = -\Pi_N(0,t) - \varepsilon \Pi_{N+1}(0,t),\ Z_N(l,t) = -Q_N(0,t) - \varepsilon Q_{N+1}(0,t),$$

$$\frac{\partial Z_N(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial Z_N(l,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 Z_N(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z_N(l,t)}{\partial x^2} = 0; \qquad /I4/$$

де $\tilde{f}(x,t) = \frac{\partial^6 \bar{U}_{N-3}}{\partial x^6} + \varepsilon \frac{\partial^6 \bar{U}_{N-2}}{\partial x^6} + \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \bar{U}_{N-1}}{\partial x^6} + \varepsilon^3 \frac{\partial^6 \bar{U}_N}{\partial x^6} -$

$- \frac{\partial^2 \Pi_N(\xi,t)}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi_{N+1}(\xi,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q_N(\eta,t)}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 Q_{N+1}(\eta,t)}{\partial t^2}$.

Методом інтегралів енергії [2] одержана оцінка залишкового члена Z_N у метриці L_2, що доводить асимптотичну коректність розкладу /4/. Результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай виконуються умови I/, 2/. Тоді розв"язок задачі /I/ – /3/ записуємо у вигляді /4/, це

$\bar{U}_i(x,t)\ (i=0,\ldots,N),\ \Pi_i(\xi,t),\ Q_i(\eta,t)\ (i=0,\ldots,N+1)$

знаходяться рекурентно відповідно з /5/ – /7/, /8/ – /9/, /I0/ – /II/, причому $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$ – функції типу примежового шару. Розклад /4/ асимптотично коректний у метриці L_2.

Список літератури: I. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – УМН, I957, № 5. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, I964.

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

У прямокутнику $Q\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}+b(t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

з умовами

$$u(x,0)=u(0,t)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ малий дійсний параметр.

Припустимо, що виконуються умови: 1/ $b(t)>0$ при $t\in[0,T]$, 2/ існують неперервні й обмежені похідні $\frac{d^i b(t)}{dt^i}$, $\frac{\partial^{i+j}f(x,t)}{\partial t^i\partial x^j}\,(i+j=0,\dots,N)$, 3/ $\frac{\partial^i f(0,0)}{\partial t^i}=0\,(i=0,\dots,N)$.

Методом М.І.Вішика – Л.А Люстерника [2] побудуємо асимптотичний розклад по степенях параметра ε розв"язку задачі /1/ –/2/. Розклад шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\xi)+\varepsilon^{N+1}Z_N(x,t), \qquad /3/$$

де $\xi=\frac{t}{\varepsilon}$ – регуляризуюче перетворення.

Функції $U_i(x,t)$ визначаємо з першого ітераційного процесу як розв"язки задач Коші для рівнянь першого порядку; $v_i(x,t)$ знаходимо у явному вигляді [4]

$$v_i(x,t)=\int_0^x\Psi_i(\alpha,t)\,e^{b(t)(\alpha-x)}\,d\alpha \quad (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $\Psi_0(x,t)=f(x,t)$, $\Psi_i(x,t)=-\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x\,\partial t}$ $(i=1,\dots,N)$.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\xi)$ є розв"язками задач Гурса для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Методом Рімана [5] $\Pi_i(x,\xi)$ знаходимо у явному вигляді

$$\Pi_i(x,\xi)=-e^{-\xi}\int_0^x J_0\left(2\sqrt{b(0)(x-\alpha)\xi}\right)v_i'(\alpha,0)\,d\alpha+ \qquad /5/$$

$$+ e^{-\xi}\int_0^{\xi}\int_0^{x} J_0\left(2\sqrt{b(0)(x-\alpha)(\xi-\eta)}\right)\Phi_i(\alpha,\eta)\,d\alpha\,d\eta,$$

де J_0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку [I];

$$\Phi_0(x,\xi)\equiv 0;\quad \Phi_i(x,\xi)=-\sum_{j=1}^{i}\frac{b^{(j)}(0)\xi^j}{j!}\Pi_{i-j}(x,\xi)\ (i=1,\dots,N).$$

Функції $V_i(x,t)$, $\Pi_i(x,\xi)$ рекурентно виражаються /4/, /5/, причому $\Pi_i(x,\xi)$ має характер примежового шару. Методом інтегралів енергії [3] одержана оцінка залишкового члена $Z_N(x,t)$ у L_2 нормі в Q. Результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема I. Нехай виконуються I/, 2/, 3/. Тоді розв"язок задачі /I/, /2/ зображаємо у вигляді /3/, де $V_i(x,t)$ і $\Pi_i(x,\xi)$ знаходяться рекурентно, відповідно з /4/ і /5/. Залишковий член $Z_N(x,t)$ оцінюється у L_2 нормі в Q.

У тій же області Q розглянемо задачу Гурса

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t), \qquad /6/$$

$$u(0,t)=u(x,0)=0 \qquad /7/$$

і мішану задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}+c(x,t)v=f(x,t), \qquad /8/$$

$$v(0,t)=v(x,0)=0. \qquad /9/$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

I/ $a(x,t)>0$ в Q;

2/ $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ – двічі неперервно диференційовані по сукупності аргументів і, як вони самі, так і їхні похідні, до другого порядку обмежені в Q;

3/ $f(0,0)=0$, $f'_t(0,0)-a(0,0)f'_x(0,0)=0$.

Тоді існує оцінка

$$\iint_Q |u-v|^2\,dQ\le\varepsilon C,$$

де $u(x,t)$ і $v(x,t)$ – розв"язки відповідно задач /6/-/7/ і /8/-/9/, константа C не залежить від ε .

Теорема доводиться методом інтегралів енергії [3].

Список літератури: I. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Т.I, М., ИЛ, I949. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.-УМН, I957, т.I2, № 5. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, I964. 4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, I970. 3. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, I957.

УДК 5I7.946

Л.С.Парасюк, Є.М.Парасюк

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ, ЩО ВИРОДЖУЄТЬСЯ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + x_n^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \lambda x_n^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} - \kappa^2 u = 0, \qquad /I/$$

де α, λ і κ – сталі параметри.

Рівняння /I/ розглядається у півпросторі $x_n > 0$, для якого ставиться перша крайова задача: знайти обмежений і два рази неперервно диференційований розв"язок рівняння /I/ у півпросторі $x_n > 0$, який би задовольняв умову

$$\lim_{x_n \to 0} u(x', x_n) = f(x'), \qquad /2/$$

де $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Зауважимо, що гіперплощина $x_n=0$, на якій вироджується рівняння /I/, є одночасно його характеристикою.

Доведемо теорему існування і єдності розв"язку задачі /I/, /2/ залежно від параметрів α і λ.

Розв"язок задачі шукаємо у вигляді перетворення Фур"є

$$u(x)=\frac{1}{(2\kappa)^{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{u}(\alpha';x_n)e^{i(x;\alpha')}d\alpha', \qquad /3/$$

це $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(x';\alpha')=x_1\alpha_1+\dots+x_{n-1}\alpha_{n-1}$, $d\alpha'=d\alpha_1\dots d\alpha_{n-1}$ – елемент об"єму в $(n-1)$ -мірному дійсному просторі.

Для трансформанти $\bar{u}(\alpha';x_n)$ одержуємо задачу

$$x_n^{\alpha}\frac{d^2\bar{u}}{dx_n^2}+\lambda x_n^{\alpha-1}\frac{d\bar{u}}{dx_n}-\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2+\kappa^2\right)\bar{u}=0, \qquad /4/$$

$$\bar{u}(\alpha',0)=\tilde{f}(\alpha'), \qquad /5/$$

це

$$\tilde{f}(\alpha')=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y')e^{-i(y',\alpha')}dy'. \qquad /6/$$

Легко показати, що загальний розв"язок рівняння /4/ має вигляд

$$\bar{u}(\alpha',x_n)=C_1x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}J_\nu(z)+C_2x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}\mathcal{K}_\nu(z), \qquad /7/$$

де $J_\nu(z)$ і $\mathcal{K}_\nu(z)$ – модифіковані циліндричні функції з показником $\nu=\frac{1-\lambda}{2-\alpha}$ дійсного аргументу

$$z=\frac{2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2+\kappa^2\right)^{1/2}}{2-\alpha}x_n^{\frac{2-\alpha}{2}}. \qquad /8/$$

Оскільки функція $J_\nu(z)$ зі збільшенням аргумента необмежено зростає, а розв"язок шукається обмеженим, то $C_1=0$ і, отже,

$$\bar{u}(\alpha',x_n)=C_2x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}\mathcal{K}_\nu(z). \qquad /9/$$

Для визначення сталої C_2 використовуємо асимптотику функції $\mathcal{K}_\nu(z)$ /функції Магдональда/

$$\mathcal{K}_\nu(z)\sim\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{z^\nu}, \quad \nu>0,\ z\to0. \qquad /I0/$$

Якщо прийняти $\lambda < 1$, $\alpha < 2$, то в формулі /9/ $\nu > 0$, і ми можемо скористатися цією оцінкою.

Використавши умову /5/, із /9/ одержимо

$$C_2 = \frac{2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + K^2\right)^{1/2}}{\Gamma(\nu)(2-\alpha)^{\nu}} \; \tilde{f}(\alpha') . \qquad /II/$$

Співвідношення /3/, /9/, /II/ дають змогу записати розв"язок задачі /I/, /2/ у вигляді

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x'-y', x_n) f(y') \, dy' , \qquad /I2/$$

де

$$G(\gamma', x_n) = \frac{2 x_n^{\frac{1-\lambda}{2}}}{(2\pi)^{n-1} \Gamma(\nu)(2-\alpha)^{\nu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_{\nu}(z) e^{i(\gamma', \alpha')} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 + K^2\right)^{1/2} d\alpha' , \qquad /I3/$$

а через γ' позначено різницю $x'-y'$.

Використовуючи таку ж методику, як і в роботі [3] , вираз для функції $G(\gamma', x_n)$ можна спростити до вигляду

$$G(\gamma', x_n) = \frac{x_n^{1-\lambda} K^{1+\nu+\mu} \mathcal{K}_{1+\nu+\mu}(K\sqrt{R})}{2^{\mu-\nu} \pi^{\mu+1} \Gamma(\nu)(2-\alpha)^{2\nu} R^{\frac{1+\nu+\mu}{2}}} , \qquad /I4/$$

де

$$R = \frac{4 x_n^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2} + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2 , \quad \mu = \frac{n-3}{2} .$$

Простою перевіркою легко переконатись, що функція /I2/ задовольняє рівняння /I/. Покажемо, що вона задовольняє і умову /2/.

Позначимо через D гіперплощину $x_n = 0$, а через D_ε - $(n-1)$ - мірну кулю радіуса ε з центром у точці $x' \in D$.

Легко переконатись у справедливості рівностей [3]

$$\lim_{x_n \to 0} \int_{D \setminus D_\varepsilon} G(x'-y', x_n) \, dy' = 0 , \qquad /I5/$$

$$\lim_{x_n \to 0} \int_{D_\varepsilon} G(x'-y', x_n) \, dy' = 1 . \qquad /I6/$$

Виберемо число $r>0$ настільки малим, щоб при $|x'-y'|\leq r$ коливання функції f не перевищували заданого ε. Тоді в області D_r маємо

$$f(y')=f(x')+\varphi(y')\ ,\ |\varphi(y')|<\varepsilon.$$

Отже,

$$u(x)=\int_{D_r} G(x'-y',x_n)f(x')dy'+ \qquad /I7/$$
$$+\int_{D_r} G(x'-y',x_n)\varphi(y')dy'+\int_{D\setminus D_r} G(x'-y',x_n)f(y')dy'.$$

Звідси на основі /I5/, /I6/ і довільності ε із /I2/ випливає, що

$$\lim_{x_n\to 0} u(x',x_n)=f(x').$$

Єдиність побудованого розв"язку задачі /I/, /2/ випливає з принципу екстремальних значень розв"язків рівняння /I/: у півпросторі $x_n>0$ ці розв"язки не можуть досягти ні додатного максимуму, ні від"ємного мінімуму. Справді, якщо, наприклад, припустити, що у деякій точці M_0 півпростору $x_n>0$ розв"язок u рівняння /I/ досягає додатного максимуму, то, оскільки в цій точці $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}<0,\ i=1,2,\dots,n,$ $\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$, а $x_n>0$, маємо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+x_n^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}<0.$$

Це суперечить рівнянню /I/.

Таким чином, доведена така теорема. Якщо у рівнянні /I/ вважати $\alpha<2$, $\lambda<1$, то задача /I/, /2/ має єдиний розв"язок /I2/.

Ця теорема охоплює аналогічні результати із робіт [3, 4] як частинні випадки по параметрах α, λ і K.

Список літератури: I. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч.I.М,ИЛ,I949. 2. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы диференциальных уравнений эклиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. УМЖ,I953, т.5, № 2. 3. Парасюк Л.С. Граничні задачі для еліптичних диференціальних рівнянь, що виражаються на границі області.-Наукові записки УПІ,I96I,т.I3. 4. Парасюк Л.С. Краевые задачи для некоторых самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, вырождающихся на границе области.-УМЖ,I96I,т.I3, №3.

УДК 517.917

С.П.Лавренюк

ПРО СТІЙКІСТЬ В ЦІЛОМУ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ n РІВНЯНЬ

Розглянемо систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}(t, x_1, \dots, x_n) a_{ij}(x_j), \ i = 1, \dots, n, \qquad /1/$$

де функції ρ_{ij}, a_{ij} неперервні в $R^n \times J_q^+$, $J_q^+ = \{t / q < t < \infty\}$ і задовольняють умови

$$\begin{cases} a_{ij}(0) = 0, \ i, j = 1, \dots, n; \\ 0 \leq b_{ij} \leq \rho_{ij}(t, x_1, \dots, x_n) \dfrac{a_{ij}(x_j)}{x_j} \leq B_{ij}, \\ x_j \neq 0, \ i, j = 1, \dots, n, \ i \neq j; \\ -B_{ii} \leq \rho_{ii}(t, x_1, \dots, x_n) \dfrac{a_{ii}(x_i)}{x_i} \leq -b_{ii}, \\ x_i \neq 0, \ i = 1, \dots, n, \ b_{ii} > 0. \end{cases} \qquad /2/$$

Введемо допоміжні кусково-лінійні системи

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_j, \ i = 1, \dots, n, \qquad /3/$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}_{ij} x_j, \ i = 1, \dots, n, \qquad /4/$$

де

$$\mathcal{F}_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & x_j < 0, \\ B_{ij}, & x_j > 0, \end{cases} \qquad f_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & x_j < 0, \\ b_{ij}, & x_j > 0, \end{cases}$$

$$i, j = 1, \dots, n, \ i \neq j;$$

$$\mathcal{F}_{ii} = \begin{cases} -B_{ii}, & x_i < 0, \\ -b_{ii}, & x_i > 0, \end{cases} \qquad f_{ii} = \begin{cases} -b_{ii}, & x_i < 0, \\ -B_{ii}, & x_i > 0, \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n$$

і лінійні системи з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -B_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \dots + b_{1n} x_n, \\ \dot{x}_2 = b_{21} x_1 - B_{22} x_2 + \dots + b_{2n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \dots - B_{nn} x_n \end{cases} \qquad /5/$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -b_{11} x_1 + B_{12} x_2 + \dots + B_{1n} x_n, \\ \dot{x}_2 = B_{21} x_1 - b_{22} x_2 + \dots + B_{2n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = B_{n1} x_1 + B_{n2} x_2 + \dots - b_{nn} x_n . \end{cases} \qquad /6/$$

Теорема. Нехай функції p_{ij}, a_{ij} неперервні в $R^n \times J_q^+$ і задовольняють умови /2/. Якщо тривіальні розв"язки систем /5/ і /6/ асимптотично стійкі в цілому, то і нульовий розв"язок системи /I/ стійкий в цілому.

Доведення. Оскільки за умовою нульовий розв"язок системи /5/ стійкий, то існує визначено додатна квадратична форма $V(x), x \in R^n$ [I], похідна якої, згідно з системою /5/, знаковід"ємна. Використаємо $V(x)$ для системи /3/ на множині

$$M_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) / \; x_i > 0, \; i = 1, \dots, n\}.$$

Очевидно, на множині M_1 система /3/ збігається системою /5/. Далі, всі траєкторії системи /3/, які потрапляють в M_1, або там починаються, не можуть вийти за межі M_1. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що $|x(t; t_0, x^0)| < \varepsilon$ для всіх $t \in J^+_{t_0}$, як тільки $|x^0| < \delta$, де $x^0 \in M_1$ $(x(t; t_0, x^0)$ - розв"язок системи /3/ з початковими даними $t_0, x^0)$.

Крім того,

$$\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,a)=0$$

для всіх $a\in M_1$. Аналогічно, використавши стійкість у цілому нульовому розв"язку системи /6/, можна показати, що для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що з нерівності $/x^0/<\delta$, $x^0\in M_2$ буде випливати нерівність $/x(t;t_0,x^0)/<\varepsilon$ для всіх $t\in J^+_{t_0}$

$$\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,a)=0$$

і

для всіх $a\in M_2$. Тут

$$M_2=\{x=(x_1,\dots,x_n)\,|\,x_i<0,\ i=1,\dots,n\},$$

а $x(t;t_0,\xi)$ – розв"язок системи /3/.

Нехай тепер по заданому $\varepsilon>0$ вибрано $\delta>0$ таке, що справедливі нерівності

$$/x/t;t_0,\tilde{x}^0)/<\varepsilon,\quad t\in J^+_{t_0},$$
$$/x/t;t_0,\bar{x})/<\varepsilon,\quad t\in J^+_{t_0},$$

як тільки

$$/\tilde{x}^0/<\delta,\quad \tilde{x}^0\in M_2,$$
$$/\bar{x}^0/<\delta,\quad \bar{x}^0\in M_1.$$

Приймемо $\bar{x}_i^0=\frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $\tilde{x}_i^0=-\frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $i=1,\dots,n$.

Тоді для довільного

$$\tilde{x}_i^0\le x_i^0\le\bar{x}_i^0,\quad i=1,\dots,n,$$

за теоремою про диференціальні нерівності [2], маємо

$$/x(t;t_0,x^0)/<\varepsilon,\quad t\in J^+_{t_0},$$

і для будь-якого $a\in R^n$

$$\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,a)=0.$$

Тут $x/t;t_0,\xi)$ – розв"язок системи /3/ з початковими даними t_0,ξ. Тобто нульовий розв"язок системи /3/ стійкий в цілому.

Аналогічними міркуваннями доводиться стійкість у цілому нульового розв"язку системи /4/. Оскільки будь-який розв"язок системи /І/

можна помістити у вилку розв"язків систем /3/ і /4/, то і нульовий розв"язок системи /I/ стійкий у цілому.

Список літератури: I. **Барбашин** Е.А. Функции Ляпунова. М., Наука, 1970. 2. **Хартман** Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970.

УДК 517.944

М.Г.Шіпка

ПРО ДЕЯКІ ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Розглянемо еліптичне рівняння четвертого порядку

$$\mathcal{A}[u]\equiv(\Delta+k_1^2)(\Delta+k_2^2)u=0,\quad k_i=const,\ i=1,2. \qquad /I/$$

яке є частинним випадком метагармонійного рівняння [I].

Теорема I. Функція

$$\omega(P,Q)=\frac{1}{4\pi(k_1^2-k_2^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n(k_1^n-k_2^n)}{n!}\,r^{n-1}, \qquad /2/$$

де $r=|PQ|$ – фундаментальний розв"язок рівняння /I/.

Доведення цієї теореми полягає у перевірці рівномірної збіжності ряду /2/ для всіх $r\neq 0$ і безпосередній підстановці /2/ у рівняння /I/. При цьому одержується рівність

$$\mathcal{A}[\omega]=\delta(P-Q),$$

яка і доводить теорему [2].

Теорема 2. Нехай D – обмежена область у просторі E_3 з гладкою границею типу Ляпунова. Тоді довільна функція $u\in C^4(D)\cap C^3(\bar{D})$ зображається в області D у вигляді

$$u(P)=\frac{1}{4\pi(k_1^2-k_2^2)}\iint_S\Big[\Delta u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ik_1r}-e^{ik_2r}}{r}-\frac{\partial u}{\partial n}\frac{k_2^2e^{ik_2r}-k_1^2e^{ik_1r}}{r}+$$

$$+u\frac{\partial}{\partial n}\frac{k_2^2e^{ik_2r}-k_1^2e^{ik_1r}}{r}-\frac{e^{ik_1r}-e^{ik_2r}}{r}\cdot\frac{\partial\Delta u}{\partial n}+$$

$$+(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\left(u\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{i\kappa_1 r}-e^{i\kappa_2 r}}{r}-\frac{e^{i\kappa_1 r}-e^{i\kappa_2 r}}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big]\,d\sigma+ \qquad /3/$$

$$+\iiint\limits_D \omega\cdot\mathcal{A}[u]\,d\tau.$$

Приймемо $\mathcal{A}_i[u]\equiv\Delta u+\kappa_i^2 u \quad , \quad i=1,2.$

Використовуючи відому формулу Гріна, одержуємо

$$\iiint\limits_D (u\mathcal{A}_1[v]-v\mathcal{A}_1[u])\,d\tau=\iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad /4/$$

Замінюємо в /4/ спочатку u на $\mathcal{A}_2[u]$, а потім v на $\mathcal{A}_2[v]$

$$\iiint\limits_D (\mathcal{A}_2[u]\cdot\mathcal{A}_1[v]-v\mathcal{A}[u])\,d\tau=\iint\limits_S \left(\mathcal{A}_2[u]\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial \mathcal{A}_2[u]}{\partial n}\right)d\sigma,$$

$$\iiint\limits_D (u\mathcal{A}[v]-\mathcal{A}_2[v]\cdot\mathcal{A}_1[u])\,d\tau=\iint\limits_S \left(u\cdot\frac{\partial \mathcal{A}_2[v]}{\partial n}-\mathcal{A}_2[v]\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Звідси одержуємо

$$\iiint\limits_D (u\cdot\mathcal{A}[v]-v\mathcal{A}[u])\,d\tau=\iint\limits_S \Big[\Delta u\frac{\partial v}{\partial n}-\Delta v\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\partial\Delta v}{\partial n}-$$

$$-v\frac{\partial\Delta u}{\partial n}+(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big]\,d\sigma. \qquad /5/$$

Застосовуючи формулу /5/ до функції $v(P)=\omega(P,Q)$ і довільної функції $u(P)\in C^4(D)\cap C^3(\bar{D})$, дістаємо після стандартних міркувань теорії потенціалу формулу /3/.

Якщо $u(P)$ є розв"язок рівняння /I/, то об"ємний інтеграл в /3/ зникає.

Теорема 3. Кожний розв"язок рівняння /I/ записується у вигляді $u=u_1+u_2$, де u_i є розв"язком рівняння $\mathcal{A}_i[u]=0,\ i=1,2.$

Справді, формулу /3/ в цьому випадку можна записати таким чином:

$$u(P)=\frac{1}{4\pi(\kappa_1^2-\kappa_2^2)}\Big[\iint\limits_S \left(u_1\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{i\kappa_1 r}}{r}-\frac{\partial u_1}{\partial n}\,\frac{e^{i\kappa_1 r}}{r}\right)d\sigma-$$

$$-\iint\limits_S \left(u_2\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{i\kappa_2 r}}{r}-\frac{\partial u_2}{\partial n}\,\frac{e^{i\kappa_2 r}}{r}\right)d\sigma\Big].$$

Теорема 3 є частинним випадком відомої теореми І.Н.Векуа, одержаної іншим способом у роботі [I].

Список літератури: I. Векуа И.Н. О метагармонических функциях.– Труды/Тбилис. ин-т математики, 1943, т. I2. 2. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние. М., ИЛ, 1958.

УДК 512.4

О.Л.Горбачук, Р.І.Юрчишин

РОЗЩЕПЛЮВАННЯ І ПИСАННЯ РАДИКАЛІВ В АБЕЛЕВИХ ГРУПАХ

У цій роботі досліджуються радикали в абелевих групах, зокрема в групах без періодичних елементів рангу I і 2, а також дається достатній критерій нерозщеплюваності радикалів абелевих груп.

Всі означення, зв"язані з поняттям радикала, можна знайти у роботі [3].

<u>Теорема I.</u> Нехай задано довільний радикал r. Будь-яка абелева група рангу I без періодичних елементів або r -радикальна, або r - півпроста.

<u>Доведення.</u> Нехай G - довільна група без періодичних елементів рангу I.

Припустимо, що $r(G) \neq 0$. Тоді існує така радикальна група A, що $Hom(A, G) \neq 0$, тобто існує гомоморфізм $f: A \to G, f \neq 0$ [5]. Оберемо довільний елемент $a \in A$.

Тому що A - радикальна група, то $f(a) = h \in r(G)$.

Нехай $g \in G, g$ - довільне. Оскільки G група рангу I, то існують цілі m і n такі, що $mg = nh$. Розглянемо гомоморфізм $\alpha: G \to G$, це α - множення на число m, який індукує гомоморфізм α^*:

$Hom(A, G) \to Hom(A, G)$, це α^* - множення на число m [4,с.219].

Оскільки G - група без періодичних елементів, то і $Hom(A, G)$ - група без періодичних елементів [3,с.213], внаслідок чого

$$Hom(A, G) = Im\alpha^* = m\,Hom(A, G).$$

Звідси випливає, що існує гомоморфізм $\varphi \in Hom(A, G)$ такий, що $f = m\varphi$. Тоді маємо $f(na) = nh = mg$ і $f(na) = m\varphi(na)$, тобто $m\varphi(na)=mg$. Тому що група G – без періодичних елементів, то $\varphi(na)=g$, тобто $G\leq r(G)$, а отже, $r(G)=G$.

Таким чином, ми довели, що всі радикали на групах рангу і без періодичних елементів поводять себе тривіально.

З підвищенням рангу групи такої тривіальності вже не буде. Більше того, покажемо, що радикал групи рангу 2 не завжди виділяється прямим доданком. Для цього потрібна лема.

Лема. Нехай $\mathcal{T}$ – клас усіх p-цілимих груп. Тоді клас $\mathcal{T}$-радикальний. Лема доводиться простою перевіркою.

Вважатимемо, що група A розщеплюється, якщо існує розклад $A=r(A)\oplus A'$. Коли такий розклад існує для всіх груп, то радикал називається розщеплюваним.

Теорема 2. Нехай p – деяке просте число. Радикал r^p, що відповідає радикальному класу p-ділимих груп, не розщеплюється.

Доведення. Розглянемо групи G і H без періодичних елементів рангу I, де G – група раціональних чисел, знаменники яких у взаємності з простим числом q, а H – група раціональних чисел, знаменники яких степені числа q, причому $p\neq q$. Очевидно, що $r^p(G)=G$ і $r^p(H)=0$.

Щоб довести, що радикал не розщеплюється, досить показати, що існує нерозщеплюване розширення групи G за допомогою групи H, тобто, що $Ext(H,G)\neq 0$ [4].

Розглянемо точну послідовність $0\to G\to Q\to Z(q^\infty)\to 0$, де $Z(q^\infty)$- квазіциклічна група; Q – адитивна група раціональних чисел. Вона індукує точну послідовність

$$0\to Hom(A,G)\to Hom(A,G)\to Hom(A,Z(q^\infty))\to$$

$$\to Ext(A,G)\to Ext(A,Q)\to Ext(A,Z(q^\infty))\to 0,$$

причому A – довільна група [4,с.254].

Візьмемо $A=H$. Якщо припустити, що $Ext(H,G)=0$, то одержимо точну послідовність

$$0 \to Hom(H,G) \to Hom(H,Q) \to Hom(H,Z(q^{\infty})) \to 0.$$

Очевидно, що $Hom(H,G)=0$. Тому

$$Hom(H,Q) \simeq Hom(H,Z(q^{\infty})).$$

Але $Hom(H,G) \simeq Q$ [4,с.2I4] і $Hom(H,Z(q^{\infty})) \simeq G^{*}$, де Q^{*} - група q -адичних чисел [4,с.2I2]. Звідси випливає, що $Q \simeq Q^{*}$, а це неможливо. Отже, $Ext(H,G) \neq 0$. Теорема доведена.

Зауваження. З цієї теореми випливає, що на групах рангу 2 радикали поводять себе нетривіально. Справді, за теоремою існує група A рангу 2 без періодичних елементів, яка є нерозщеплюваним розширенням групи G за допомогою групи H. Причому $r(A)=G$ і G не виділяється прямим доданком.

Визначимо тепер достатній критерій нерозщеплюваності радикалів в абелевих групах.

Теорема 3. Нехай маємо групи G і H рангу 1 без періодичних елементів. Нехай $\mathcal{P}_1$ - множина всіх простих чисел p, для яких група G є p - ділима, а $\mathcal{P}_2$ - таких простих чисел q, для яких група H - q - ділима, і нехай $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$.

Якщо група G - радикальна, а група H - півпроста для деякого радикалу r, то радикал не розщеплюється.

Доведення. Нехай $s \in \mathcal{P}_2$ і $s \notin \mathcal{P}_1$.

Розглянемо групу A без періодичних елементів рангу I, тип якої містить характеристику, в якій простому числу s відповідає 0, а всім іншим простим числам - символ ∞, а також групу B, тип якої містить характеристику, в якій числу s відповідає символ ∞, а всім іншим простим числам - символ 0 /детально про типи абелевих груп без періодичних елементів рангу I [2]/.

Очевидно, що тип групи G не більше типу групи A, а тип групи B не більше типу групи H. Виходячи з цього, маємо $G \simeq G' \leq A$ і $B \simeq H' \leq H$, а отже, і $r(A) = A$, $r(B) = 0$.

Доведемо тепер, що $Ext(B, A) \neq 0$. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to A \to Q \to Z(s^{\infty}) \to 0,$$

яка індикує точну послідовність

$$0 \to Hom(C, A) \to Hom(C, Q) \to Hom(C, Z(s^{\infty})) \to$$

$$\to Ext(C, A) \to Ext(C, Q) \to Ext(C, Z(s^{\infty})) \to 0,$$

причому C – довільна група.

Візьмемо $C = B$. Якщо припустити, що $Ext(B, A) = 0$, то одержимо точну послідовність

$$0 \to Hom(B, A) \to Hom(B, Q) \to Hom(B, Z(s^{\infty})) \to 0.$$

Як і в попередній теоремі, маємо

$$Hom(B, A) = 0;\ Hom(B, Q) \simeq Q;\ Hom(B, Z(s^{\infty})) \simeq Q^{*},$$

де Q^{*} – група s -адичних чисел. Звідси випливає, що $Q \simeq Q^{*}$, а це неможливо. Отже, $Ext(B, A) \neq 0$. Теорема доведена.

З теореми видно, що для всіх розщеплюваних радикалів групи без періодичних елементів рангу I, тип яких містить характеристику, в якій хоча б один символ дорівнює ∞, потрапляють в один клас: або радикальний, або півпростий, причому у другому випадку всі групи рангу 1 без періодичних елементів /крім групи Q / півпрості.

Список літератури: I. Горбачук Е.Л. Расщепляемость кручения и перекручения в категории Λ -модулей. – Математические заметки, 1967, 2, № 6. 2. Курош А.Г. Теория групп. М., Наука, 1967. 3. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., Наука, 1969. 4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.I. М., I974. 5. Stenström B. Rings of quotiens. Berlin, Springer Verlag, 1974.

УДК 5I3.I93

О.Л.Горбачук, В.О.Оніщук

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ І РОЗШИРЕННЯ ПОЛІВ

Однією з найцікавіших класичних задач на побудову була задача "поділу кола", яка полягає у побудові циркулем і лінійкою правильного n-кутника при довільному натуральному n .

Гаусс вперше довів, що правильний n -кутник, де n -деяке просте число, тоді і лише тоді можна побудувати циркулем і лінійкою, якщо число n є числом виду $n = 2^{2^k}+1$.

Тому, природно, виникає така задача: які правильні многокутники можна побудувати, ввівши додаткові прилади, аналогічні циркулю.

Як відомо, якщо коло може бути поділене на p_1 і на p_2 частин і якщо p_1 і p_2 – числа взаємно-прості, то коло можемо поділити і на $p_1 p_2$ частин [4] . Але оскільки довільне натуральне число розкладається в добуток простих чисел, то зрозуміло, що нам достатньо розглянути побудову правильних многокутників, число сторін яких є простим чи степенем простого числа.

Означення. p -сектором, де p -деяке просте число, назвемо такий приклад, за допомогою якого можна поділити довільний даний кут на p рівних частин і побудувати величину відрізка $x = \sqrt[p]{a}$, тобто будується дійсна і уявна частина кореня двочленного рівняння p -го степеня $x^p - b = 0$, де b – комплексне число.

Як відомо із геометрії, двосектор збігається з циркулем.

Доведемо, що за допомогою трисектора, циркуля та лінійки можна побудувати корені рівнянь третього і четвертого степеня. Це випливає з формули Кардано і з формули знаходження коренів рівнянь четвертого степеня /метод Феррарі/.

Теорема I. Якщо $n > 3$ – просте число, то для того щоб побудувати правильний n -кутник за допомогою сукупності p_i -секторів $/ p_i \geq 2,\ i = 1,2,3,\ldots,s$ / і лінійки необхідно, щоб n було числом виду

$$n = p_1^{K_1} p_2^{K_2} \ldots p_i^{K_i} + 1.$$

Доведення. Як відомо, многочлен поділу кола на n рівних частин має вигляд

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1. \qquad /I/$$

Полем розкладу многочлена /I/ є поле поділу кола $Q(\xi)$, де ξ – довільний первісний корінь степеня p із одиниці. Оскільки многочлен /I/ незвідний, то степінь $(Q(\xi) : Q)$ поля $Q(\xi)$ над полем Q дорівнює $n-1$ /степеню многочлена /I//.

Нехай корінь ξ рівняння $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ виражається в радикалах. А це означає, що його можна одержати, розв"язавши ланцюг двочленних рівнянь виду

$$x^{p_1} - \alpha_1 = 0,\ x^{p_2} - \alpha_2 = 0, \ldots, x^{p_s} - \alpha_s = 0,$$

де число α_1 належить основному полю Q, число α_2 – полю $Q = Q(\sqrt[p]{\alpha_1})$, число α_3 – полю $Q_2 = Q_1(\sqrt[3]{\alpha_2})$ і т.д. p_i, $i = 1,2,\ldots,s$ – деякі дільники числа $n-1$ /. Прийнявши $Q_{(0)} = Q$, $Q_{(i)} = Q_{p_1 p_2 \cdots p_i}$ / $i = 1,2,\ldots,s$ /, одержимо в полі $Q(\xi)$ ланцюжок послідовно викладених одне в одне підполів

$$Q = Q_{(0)} \subset Q_{(1)} \subset Q_{(2)} \subset \ldots \subset Q_{(s-1)} \subset Q_{(s)} = Q(\xi)$$

з тієї властивістю, що кожне підполе цього ланцюжка /крім поля $Q_{(0)}$ / має над попереднім підполем простий степінь / а саме поле $Q_{(i)}, i = 1,2,\ldots,s$ має над полем $Q_{(i-1)}$ степінь p_i /.

Степінь розкладу $Q(\xi)$ над полем Q $(Q(\xi) : Q) = p_1 p_2 \ldots p_s$ [7]. А звідси-висновок, що n повинно мати вигляд

$$n = p_1 p_2 \ldots p_s + 1,$$

де p_i, $i = 1,2,\ldots,s$ можуть і повторюватися. Теорема доведена.

Теорема 2. Не існує скінченної кількості p_i –секторів /$p_i \geq 2, i=1,2,\ldots,s$/, за допомогою яких і лінійки можна було б побудувати всі правильні многокутники.

Доведення. Якщо за допомогою p_i –секторів /$p_i \geq 2$, $i=1,2,\ldots,s$/ і лінійки можна побудувати n –кутник, то n має вигляд

$$n = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} + 1 ,$$

де k, k_i , $i = 1, 2, \ldots, s$ – цілі невід"ємні числа.

Розглянемо таке просте число p , яке більше за довільне p_i. Тоді арифметична послідовність $px + 1$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$ має нескінченно багато простих чисел /теорема Діріхле [6] /. Покажемо, що ні одного правильного многокутника з простим числом виду $px + 1$ не можна побудувати за допомогою p_i –секторів / $p_i \geq 2$, $i = 1, 2, \ldots, s$/ і лінійки.

Дійсно, нехай $px + 1 = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} + 1$ або

$$px = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} .$$

Оскільки p не входить у праву частину, то за основною теоремою арифметики останнє рівняння не має розв"язку ні при якому цілому x. А це означає, що сукупності p_i –секторів /$p_i \geq 2$, $i = 1, 2, \ldots, s$ / і лінійки недостатньо, щоб побудувати правильні многокутники, число сторін яких є простим числом з арифметичної послідовності $px + 1$. Теорема доведена.

Список літератури: І. Артін Е. Теорія Галуа. К., Радянська школа, І963. 2. Завало С.Т., Костарчук В.М. Алгебра і теорія чисел, Ч.2, К., Вища школа, І976. 3. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки. К., Вища школа, І972. 4. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. М.-Л.,Гос.изд-во.техн.-теорет.лит. І949. 5. Постников М.М. Теория Галуа. М., Физматгиз, І963.

6. Трост, Эрнст. Простые числа. М., Физматгиз, 1959.
7. Школьников А.Г. Задача деления круга. 3-е изд. М., Учпедгиз, 1961.

УДК 517.9

Л.О.Старокадомский

ПРО ПОБУДОВУ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розв"язок u лінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними $\|B\|u=0$ часто шукають у вигляді $u=\|A\|v$, де v - розв"язок заданої /простішої/ системи $\|M\|v=0$ і називають загальним розв"язком системи $\|B\|u=0$. Тут $\|B\|, \|M\|, \|A\|$ - операторні матриці; u і v - вектор-стовпці. Наприклад, для рівнянь Ляме в теорії пружності

$$\|B\|=\|b_{ij}\|;\ b_{ii}=\Delta+\varkappa\partial_i^2;\ b_{ij}=\varkappa\partial_i\partial_j;\ i,j=1,2,3, \qquad /1/$$

де $\varkappa=\frac{1}{1-2\nu}$; /$\nu$ - коефіцієнт Пуассона/ відомі різні зображення $\|A\|$ і $\|M\|$, серед яких вкажемо на розв"язок Папковича [2]

$$\|A\|=\|a_{ij}\|;\ a_{ii}=-\frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}x_i\partial_i+\frac{2+\varkappa}{2(1+\varkappa)};\ a_{ij}=-\frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}x_j\partial_i,$$

$$\|M\|=\|m_{ij}\|;\ m_{ii}=\Delta,\ m_{ij}=0\ (i\neq j);\ i,j=1,2,3. \qquad /2/$$

де $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$; $x_i(i=1,2,3)$ - координати точки; ∂_i - оператор диференціювання по x_i.

Ми уточнимо поняття загального розв"язку та опишемо один загальний метод його побудови.

Зробимо необхідні попередні зауваження. Введемо позначення: K - кільце лівих операторів $\alpha=f_{k_1\ldots k_n}\partial_1^{k_1}\ldots\partial_n^{k_n}$ /повторення індекса тут і далі означатиме підсумовування за ним/ $\partial_i^0=1$; $0\leq k_1+\ldots+k_n<\infty$, C, C_0 і P - відповідно кільце степеневих рядів зі змінними

$x_1, \dots, x_n$, кільце степеневих рядів $f_{k_1 \dots k_n}(x_0)(x_1 - x_{10})^{k_1} \dots (x_n - x_{n0})^{k_n}$ та поле відношень степеневих рядів. Приймається $f_{k_1 \dots k_n} \in P$; M - k - членний лівий модуль кільця K, тобто множина стрічок $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \alpha_i \in K$, причому $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \in M, \alpha\bar{\alpha} \in M, \alpha \in K$.

Відомо [I], що модуль M має скінченний базис, який записується деякою матрицею $\|M\|$, і навпаки, матриця $\|M\|$ породжує певний модуль M. $M : \|A\|$ - такий модуль, що $\bar{\lambda} \in M : \|A\|$ рівнозначно $\bar{\lambda}\|A\| \in M$, це стовпець, що одержується транспонуванням стрічки, $\bar{v} = (v_1, \dots, v_k)$ будемо позначати просто через v, тобто $v = \bar{v}', v_i \in C_0$; $i = 1, \dots, k$.

Означення. I. Інтегралом $\bar{\alpha}(\bar{\alpha} \in M)$ називається v, якщо $\bar{\alpha}v = 0$. 2. Множина всіх інтегралів $\bar{\alpha}$ називається інтегральним многовидом $\bar{\alpha}$. Аналогічно визначаються інтегральний многовид модуля M і матриці $\|M\|$. Якщо $\|M\|$ базис M, то, очевидно, їх інтегральні многовиди однакові.

3. Назвемо v загальним розв"язком системи $\|M\|v = 0$, розуміючи під цим, що v змінна, визначена на інтегральному многовиді модуля M, породженого матрицею $\|M\|$.

4. Нехай задані системи $\|B\|u = 0$ і $\|M\|v = 0$, причому v - загальний розв"язок системи $\|M\|v = 0$. Загальним розв"язком системи $\|B\|u = 0$ назвемо вираз $u = \|A\|v$, де u - змінна визначена на інтегральному многовиді модуля B, породженого матрицею $\|B\|$. Інакше кажучи, $u = \|A\| \cdot v$ є загальним A -розв"язком, якщо u пробігає весь інтегральний многовид модуля B, а v пробігає весь інтегральний многовид модуля M. Відомі дві теореми [I].

Теорема I. Якщо v пробігає інтегральний многовид модуля M, то $\|A\|v$ пробігає інтегральний многовид модуля $M : \|A\|$.

Теорема 2. Для того щоб $\bar{\alpha} \in M$, необхідно і достатньо, щоб інтегральний многовид $\bar{\alpha}$ містив інтегральний многовид M. З теорем I, 2 легко одержуємо як наслідок наступну теорему.

Теорема 3. Для того щоб $u = \|A\| v$, де v – загальний розв"язок системи $\|M\| v = 0$, було загальним A-розв"язком системи $\|B\| u = 0$ необхідно і достатньо, щоб модуль $M : \|A\|$ дорівнював модулю B, породженим матрицею $\|B\|$.

На основі названих теорем можна зробити перевірку загальності і побудови загальних A-розв"язків.

Зупинимось на побудові загальних A-розв"язків. Опишемо загальний метод цієї побудови на конкретному прикладі рівнянь Ляме. Нехай матриці $\|B\|$ і $\|M\|$ задаються формулами /1/, /2/, необхідно побудувати $\|A\|$. Обмежимося для простоти випадком, коли елементи матриці $\|A\|$ залежать лінійно як від x_i, так і від ∂_i /i=1,2,3/. Таким чином, кожний з трьох стовпців матриці $\|A\|$ матиме вигляд

$$z = \bar{z}' = (z_1, z_2, z_3)',$$
$$z_i = f_{ij}\partial_j + f_i, \quad f_{ij} = a_{ijk}x_k + a_{ij}, \quad f_i = b_{ik}x_k + b_i, \qquad /3/$$

де $a_{ijk}, a_{ij}, b_{ik}, b_i$ – деякі невизначені постійні.

Надалі застосовуватимемо алгоритм Евкліда ділення операторів, що виражаються поліномами по степенях ∂_i з фіксованим i. Зафіксуємо, наприклад, $i = 1$. Тоді доцільно записати $z_i = z_{i1}\partial_1 + z_{i0}$. Користуючись алгоритмом Евкліда, покажемо елемент $\xi \in M : \|A\|$ у вигляді $\bar{\xi} = \bar{\mu}\|B\| + \bar{\delta}$, де $\bar{\mu}$ – деяка стрічка з елементами $\mu_i \in K$; $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$; $\delta_i = \delta_{i1}\partial_1 + \delta_{i0}$; /$i$= 1,2,3/, причому δ_{i1}, δ_{i0} не залежать від ∂_1. Умова $\xi \in M : \|A\|$ рівнозначна тому, що

$$(\bar{\mu}\|B\| + \bar{\delta})\|A\| = \bar{\nu}\|M\|, \qquad /4/$$

де $\bar{\nu}$ – деяка стрічка з елементами $\nu_i \in K$.

З теореми 3 випливає, що модуль B повинен дорівнювати модулю $M : \|A\|$, отже, матриця $\|A\|$ повинна задовольняти рівняння /4/, крім того, $\bar{\delta} = 0$. Для кожного стовпця $\|A\|$ одержимо

$$\mu_1[(\Delta + \varkappa\partial_1^2)(z_{11}\partial_1 + z_{10}) + \varkappa\partial_1\partial_2(z_{21}\partial_1 + z_{20}) + \varkappa\partial_1\partial_3(z_{31}\partial_1 + z_{30})] +$$
$$+ \mu_2[\ldots] + \mu_3[\ldots] + \ldots + (\delta_{31}\partial_1 + \delta_{30})(z_{31}\partial_1 + z_{30}) = \nu\Delta. \qquad /5/$$

Коефіцієнти при μ_i повинні ділитися на Δ по ∂_1, що дає рівняння, які встановлюють залежності між постійними $a_{ijk}, a_{ij}, b_{ik}, b_i$.

Частина з цих постійних залишається невизначеною, чим можна скористатися, щоб забезпечити єдиність розв"язку цілком визначеної однорідної системи рівнянь відносно δ_{ij}, i = I,2,3; j = I,0. Ці рівняння випливають з виразу /5/ після виділення з $\delta\mathfrak{z}$ тієї частини, яка ділиться на Δ /по ∂_1/ справа, і прирівнювання залишку вигляду $P_k\partial_1 + Q_k$ /для k -го стовпця матриці $\|A\|$/ до нуля, тобто

$$P_k(\delta_{11}, \ldots, \partial_2, \partial_3) = 0, \quad Q_k(\delta_{11}, \ldots, \partial_2, \partial_3) = 0. \qquad /6/$$

Зауважимо, що для єдиності розв"язку однорідної системи /6/ потрібно, щоб число незалежних рівнянь було не менше шести, отже, ранг матриці $\|M\|$ повинен бути не менше трьох. Таким чином, u має виражатися не менше як через три гармонічних функції v.

При здійсненні описаної схеми знаходження $\mathfrak{z}$ не виникає принципових труднощів, хіба що викладки будуть дещо громіздкішими. Кінцевий результат можна описати формулами /для зручності постійні a_{ijk}, b_{ij}, ... перепозначені на a_i, b_i і т.п./.

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} A\partial_1 - B\partial_2 - C\partial_3 - D \\ B\partial_1 + A\partial_2 - E\partial_3 - F \\ C\partial_1 + E\partial_2 + A\partial_3 - G \end{pmatrix}. \qquad /7/$$

де

$$\begin{aligned} &A = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4; && D = ma_1 + nb_2; \\ &B = -b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4; && F = ma_2 + nb_1; \\ &C = -c_1x_1 - b_3x_2 + b_2x_3 + c_2; && G = ma_3 + nc_1; \qquad /8/ \\ &E = b_3x_1 - c_1x_2 + b_1x_3 + d_1; && m = \frac{2+\varkappa}{\varkappa} \\ & && n = \frac{2(1+\varkappa)}{\varkappa}, \end{aligned}$$

формули /8/ одержані без врахування /6/.

Інші два стовпці матриці $\|A\|$ можна дістати, фіксуючи відповідно $i=2$, $i=3$, що привело б знов до формул виду /7/, /8/ з відповідною заміною ∂_1 на ∂_2 і т.д., бо всі ∂_i входять у $\|B\|$ і $\|M\|$ рівноправно і симетрично. Але простіше одержати всі три стовпці з формул /7/, /8/, фіксуючи у них три різних набори постійних.

Приймемо всі постійні у виразах /8/ рівними нулю, крім a_1, a_2, a_3, для відповідно I,2,3-го стовпців матриці $\|A\|$, і кожного разу $a_i = -\frac{æ}{2(1+æ)}$. Тоді одержимо матрицю $\|A\|$, що відповідає розв"язку Папковича [2]. Рівняння /6/ при цьому матимуть лише нульовий розв"язок $\delta_{ij} = 0$. Це означає, що розв"язок Папковича буде загальним A-розв"язком, який виражається через три гармонічні функції.

Приймемо тепер відмінними від нуля лише постійні $a_4 = b_4 = c_2 = 1$ відповідно для I,2,3-го стовпців $\|A\|$. Тоді, очевидно, одержимо при

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -\partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{pmatrix},$$

що $u = \|A\| v$ є розв"язком системи $\|B\| u = 0$. Але чи u -загальний A -розв"язок? Одержимо рівняння /6/ і дослідимо їх

$$\delta_{31}(\partial_2^2 + \partial_3^2) + \delta_{10}\partial_3 = 0, \qquad \delta_{20} - \delta_{11}\partial_2 = 0,$$

$$\delta_{21}(\partial_2^2 + \partial_3^2) + \delta_{10}\partial_2 = 0, \qquad \delta_{30} - \delta_{11}\partial_3 = 0,$$

$$\delta_{11}(\partial_2^2 + \partial_3^2) - \delta_{20}\partial_2 - \delta_{30}\partial_3 = 0, \qquad \delta_{31}\partial_3 + \delta_{21}\partial_2 + \delta_{10} = 0.$$

З 4-го і 5-го рівнянь маємо $\delta_{20} = \delta_{11}\partial_2$; $\delta_{30} = \delta_{11}\partial_3$. Помноживши справа ці рівності на ∂_2, ∂_3 відповідно і підставивши у третє рівняння, одержимо $\delta_{11} \cdot 0 = 0$. Це означає, що одержані рівняння мають не лише нульовий розв"язок. Отже, вираз $u = \|A\| v$ не є загальний A -розв"язок системи $\|B\| u = 0$.

Список літератури: I. Лопатинский Я.Б. Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов. - Математический сборник, I945, т.I7 /59/, вып. 2. 2. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла уравнений теории упругости через гармонические функции. - Известия АН СССР, сер.мат. и ест.наук, I932, № I0.

УДК 5I7. 9I7

Б.В.Ковальчук, Я.М.Середа

ПОВНОТА ПРОСТОРУ S^p- МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

У роботі [2] введено поняття S^p - майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ $(-\infty<x<+\infty)$ і визначена норма / S^p-норма/ за формулою

$$\|F\|=\|F\|_{S^p}=\sup\sum_{j,k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{jk}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad /I/$$

Існують такі властивості норми:

I/ $\|F\|\geq 0$, причому $\|F\|=0$ тоді і тільки тоді, коли $F(x)=0$;

2/ $\|\lambda F\|=|\lambda|\|F\|$, де λ - будь-яке комплексне число;

3/ $\|F+G\|\leq\|F\|+\|G\|$, де $F(x)$ і $G(x)$ - будь-які S^p - майже періодичні матриці одного і того ж виміру.

Перші дві властивості норми очевидні. Третю властивість можна довести на основі нерівності Мінковського. Справді, для двох S^p - майже періодичних матриць одного й того ж виміру $F(x)=[f_{jk}(x)]$ і $G(x)=[g_{jk}(x)]$ справедливо

$$\|F+G\|=\sup_x\sum_{j,k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{ik}(t)+g_{jk}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\sup_x\sum_{j,k}\left(\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{jk}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|g_{ik}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\leq$$

$$\leq\sup_x\sum_{j,k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{jk}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}+\sup_x\sum_{j,k}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|g_{ik}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\|F\|+\|G\|.$$

Крім цього, відзначимо ще такі властивості норми (I):

4/ $\|f_{jk}\| \leq \|F\|$ для всіх j, k;

5/ $\left|\|F\| - \|G\|\right| \leq \|F-G\|$, де $F(x)$ і $G(x)$ – будь-які S^p – майже періодичні матриці одного і того ж виміру;

6/ $\|FG\|_S \leq \|F\|_{S^p} \|G\|_{S^q}$, де $F(x)$ – S^p – майже періодична матриця, а $G(x)$ – S^q – майже періодична матриця, причому матриці $F(x)$ і $G(x)$ допускають множення.

Властивості 4/ і 5/ доводяться легко. Доведемо властивість 6/ для випадку квадратичних матриць одного й того ж порядку. Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)]$ і $G(x)=[g_{jk}(x)]$ – квадратичні матриці порядку z. На основі нерівності Гельдера одержуємо

$$\|F\cdot G\|_S = \sup_x \sum_{j=1}^{z}\sum_{k=1}^{z}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}\left|\sum_{i=1}^{k} f_{ji}(t)g_{ik}(t)\right|dt\right\} \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j=1}^{z}\sum_{k=1}^{z}\sum_{i=1}^{z}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{ji}(t)g_{ik}(t)|dt\right\} \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j=1}^{z}\sum_{k=1}^{z}\sum_{i=1}^{z}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{ji}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|g_{ik}(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j=1}^{z}\sum_{i=1}^{z}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f_{ji}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_x \sum_{i=1}^{z}\sum_{k=1}^{z}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|g_{ik}(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \|F\|_{S^p}\|G\|_{S^q}.$$

Увівши для матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ поняття модуля $|F| = \operatorname{mod} F = [|f_{jk}(x)|]$, відзначимо, що

$$\|F\| = \|\operatorname{mod} F\|. \qquad /2/$$

Позначаємо

$$|F|^p = [|f_{jk}(x)|^p]. \qquad /3/$$

Множину Σ_p всіх S^p – майже періодичних матриць одного й того ж виміру називаємо простором S^p – майже періодичних матриць.

Легко зауважити, що Σ_p є лінійним нормованим простором, який перевіряється на основі властивостей S^p– майже періодичних матриць [2]. Норма у просторі Σ_p визначається за формулою /I/ і для неї виконуються умови /аксіоми норми/ I/...3/. Далі покажемо, що Σ_p є повним простором, а отже, і простором Банаха.

Будемо вважати, що послідовність S^p – майже періодичних матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p збігається за S^p -нормою до граничної матриці $F(x)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_{S^p} = 0. \qquad /4/$$

У роботі [2] доведено, що послідовність матриць $\{F_n(x)\} = \{[f_{jk}^{(n)}(x)]\}$ збігається за S^p -нормою до матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ тоді і тільки тоді, коли послідовність функцій $\{f_{jk}^{(n)}(x)\}$ збігається до $f_{jk}(x)$ за цією ж нормою для всіх j, k. Гранична матриця $F(x) = [f_{jk}(x)]$ є також S^p – майже періодичною матрицею [2].

Теорема I. Послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p може збігатися тільки до однієї границі. Справді, нехай послідовність $\{F_n(x)\}$ із Σ_p збігається до двох граничних матриць $F(x)$ і $G(x)$. На основі властивості норми 3/ можна записати

$$\|F-G\| \le \|F-F_n\| + \|F_n-G\|.$$

Перейшовши тепер до границі, коли $n\to\infty$, одержуємо

$$\|F-G\| = 0.$$

Звідси, згідно з властивістю норми I/ маємо, що $F(x)-G(x)=0$, тобто $F(x) = G(x)$.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n-F\|=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n\| = \|F\|$. Це твердження доводиться на основі властивості норми 5/.

Наслідок I. Члени збіжної послідовності матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p обмежені за S^p-нормою.

Наслідок 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n-F\|=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n\|^2 = \|F\|^2$.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|F_n - F\| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \| |F_n| - |F| \| = 0$.

Справді, на основі (2) можна одержати співвідношення

$$\|F_n - F\| = \| mod\,(F_n - F) \| \geq \| |F_n| - |F| \|.$$

Звідси і випливає дане твердження.

Теорема 4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|F_n - F\|_{S^2} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \| |F_n|^2 - |F|^2 \|_S = 0$.

Справді, на основі нерівності Буняковського маємо

$$\| |F_n|^2 - |F|^2 \|_S = \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| |f_{jk}^{(n)}(t)|^2 - |f_{jk}(t)|^2 \right| dt \right\} =$$

$$= \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| |f_{jk}^{(n)}(t)| - |f_{jk}(t)| \right| \cdot \left| |f_{jk}^{(n)}(t)| + |f_{jk}(t)| \right| dt \right\} \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| |f_{jk}^{(n)}(t)| - |f_{jk}(t)| \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} \left| |f_{jk}^{(n)}(t)| + |f_{jk}(t)| \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Використавши тепер обмеженість норми членів збіжних послідовностей S^p – майже періодичних функцій $\{f_{jk}^{(n)}(x)\}$, на основі теореми 3 одержуємо доведення цього твердження.

Послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p будемо називати фундаментальною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що як тільки $n > N$ і $m > N$, то

$$\|F_n - F_m\|_{S^p} < \varepsilon. \qquad /5/$$

Теорема 5. Якщо послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p збігається до граничної матриці $F(x)$, то вона є фундаментальною.

Справді, на основі властивості норми 3/ можемо записати

$$\|F_n - F_m\| \leq \|F_n - F\| + \|F - F_m\|,$$

звідки одержуємо твердження.

Існує і обернене твердження, яке виражає повноту простору Σ_p.

Теорема 6. Якщо послідовність матриць $\{F_n(x)\}$ із Σ_p є фундаментальною, то вона збігається до граничної матриці $F(x)$ з цього ж простору.

Доведення. Нехай послідовність матриць $\{F_n(x)\} = \{[f_{jk}^{(n)}(x)]\}$ із Σ_p задовольняє умову (5). Прийнявши $\max\limits_{m,n\geq i} \|F_n - F_m\| = \varepsilon_i$, можна побудувати таку зростаючу збіжну послідовність індексів $\{n_i\}$, що для кожного i буде виконуватися нерівність

$$\| F_{n_i} - F_{n_{i+1}} \| < \varepsilon_{n_i} .$$

Але згідно властивості норми 4/ маємо

$$\| f_{jk}^{(n_i)} - f_{jk}^{(n_{i+1})} \| \leq \| F_{n_i} - F_{n_{i+1}} \|$$

для всіх j, k . А тому для всіх j, k справедлива нерівність

$$\| f_{jk}^{(n_i)} - f_{jk}^{(n_{i+1})} \| < \varepsilon_{n_i} .$$

Тепер на основі нерівності Гельдера одержуємо

$$\frac{1}{l} \int_x^{x+l} | f_{jk}^{(n_i)}(t) - f_{jk}^{(n_{i+1})}(t) | dt \leq \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} | f_{jk}^{(n_i)}(t) - f_{jk}^{(n_{i+1})}(t) |^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Отже, тим більше буде виконуватися нерівність

$$\sup_x \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} | f_{jk}^{(n_i)}(t) - f_{jk}^{(n_{i+1})}(t) | dt \right\} < \varepsilon_{n_i}$$

для всіх j, k .

Далі показуємо [I], що в просторі S^p – майже періодичних функцій послідовність $\{ f_{jk}^{(n)}(x) \}$ збігається до граничної функції $f_{jk}(x)$ для всіх j, k . А це означає, що послідовність матриць $\{ F_n(x) \} = \{ [f_{jk}^{(n)}(x)] \}$ у просторі Σ_p збігається до граничної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$. Теорема доведена.

Зауваження. Розглянемо тригонометричний матричний ряд

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu e^{i \lambda_\nu x} \qquad /6/$$

і його частинні суми

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} C_\nu e^{i \lambda_\nu x} . \qquad /7/$$

Теорема 7. Якщо $\lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha > 0$ і $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \| C_\nu \|^2 < \infty$, то послідовність матричних сум /7/ збігається за S^2 –нормою до граничної матриці.

Ця теорема узагальнює аналогічну теорему Степанова [I], одержану для випадку S^p – майже періодичних функцій, і доводиться таким самим методом.

Тепер на основі повноти простору Σ_2 можна довести справедливість твердження.

Теорема 8. Якщо $\lambda_{n+1}-\lambda_n>\alpha>0$ і $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\|C_\nu\|^2<\infty$, то в просторі Σ_2 існує S^2- майже періодична матриця $F(x)$, для якої ряд /6/ є її матричним рядом Фур"є.

Список літератури: I. Левитан Б.М. Почти периодические функции. М., Гостехиздат, 1953. 2. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. S^p - майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p- майже періодичною правою частиною. - Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, 1973, вип. 8. 3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ПРО КЛАС ДОДАТНИХ ВИПАДКОВИХ ЗМІННИХ, ЩО МАЮТЬ ЛИШЕ РОЗЩЕПНІ ФАКТОРИ

Визначимо такі чотири класи випадкових змінних:

I. Клас L додатних випадкових змінних ξ /для $\xi\in L$ функція розподілу ймовірностей $F(t)\equiv0$ при $t\leq0$ /.

2. Клас Φ цих змінних із класу L , що мають відбиття

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\,dF(t),\ 1-\alpha<\operatorname{Re}z<1+\beta,\ (\alpha>0,\ \beta>0). \qquad /I/$$

/Класи L,Φ та відповідна термінологія з робіт [I, 2] /.

3. Клас B цих змінних із класу Φ , що при довільному натуральному $n=2,3,4,\ldots$ можна записати як добуток n незалежних однаково розподілених випадкових змінних /для $\xi\in B$ відбиття є n -й степінь іншого відбиття/.

4. Клас S цих змінних із класу B , що не мають нерозщепних факторів.

З означення класів маємо співвідношення

$$L \supset \Phi \supset B \supset S . \qquad /2/$$

Покажемо на прикладах, що включення у співвідношенні /2/ строгі. Справді, випадкова змінна ξ логарифмічно Коші з густиною

$$p(t) = \frac{1}{\pi t\,(1+\ln^2 t)} \; , \; t > 0$$

податна, але не має відбиття; $\xi \in L$ і $\xi \overline{\in} \Phi$.

Логарифмічно біномна випадкова змінна ξ з функцією розподілу

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ q, & 1 \le t < e,\ 0 < q < 1, \\ 1, & e \le t \end{cases}$$

належить до класу L і має відбиття

$$\varphi(z) = q + (1-q)e^{z-1} \; , \; -\infty < Re z , \qquad /3/$$

але не може бути записана як добуток хоча б двох незалежних однаково розподілених випадкових змінних; $\xi \in \Phi$ і $\xi \overline{\in} B$.

Логарифмічно геометрична випадкова змінна ξ з функцією розподілу

$$F(t) = \begin{cases} 0 \; , \; t < e, \\ \sum\limits_{k=1}^{[\ln t]} (1-q)q^{k-1}, \; e \le t,\ 0 < q < 1 \end{cases} \qquad /4/$$

має відбиття

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{k(z-1)}(1-q)q^{k-1} = \frac{(1-q)e^{z-1}}{1-qe^{z-1}} \; , Re z < 1 + \ln \frac{1}{q} . \qquad /5/$$

Оскільки відбиття /5/

$$\varphi(z) = e^{z-1+\ln(1-q)-\ln(1-qe^{z-1})} = e^{z-1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}(e^{k(z-1)}-1)}$$

при довільному натуральному n =2,3,4,... можна записати як n -й степінь відбиття

$$\varphi_n(z) = \exp\left\{ \frac{z-1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}\left(e^{k(z-1)}-1\right) \right\} ,$$

то випадкова змінна з розподілом /4/ належить до класу B. Але, на основі тотожності

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{k=0}^{\infty} (1+x^{2^k}) \ , \ |x|<1$$

відбиття /5/ набуває вигляду

$$\varphi(z) = e^{z-1} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+q^{2^k} e^{2^k(z-1)}}{1+q^{2^k}} = e^{z-1} \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z),$$

де кожний множник $\varphi_k(z)$, як і /3/, нерозщепний; $\xi \in B$ і $\xi \bar{\in} S$.

Теорема. Добуток імпульсу, логарифмічно нормальної та логарифмічно пуасонівської випадкових змінних належить до класу S.

Дійсно, якщо додатна випадкова змінна ξ має відбиття

$$\varphi_\xi(z) = e^{\alpha(z-1)-\beta(z-1)^2+\lambda(e^{z-1}-1)}, \ -\infty < \mathrm{Re}\, z \qquad /6/$$
$$(\mathrm{Jm}\, \alpha = 0, \ \beta \geq 0, \ \lambda > 0)$$

то відбиття її довільного фактора η представляється у вигляді

$$\varphi_\eta(z) = e^{\gamma(z-1)-\mu(z-1)^2+\nu(e^{z-1}-1)}, \ -\infty < \mathrm{Re}\, z,$$
$$(\mathrm{Jm}\, \gamma = 0, \ 0 \leq \mu \leq \beta, \ 0 \leq \nu \leq \lambda).$$

Отже, випадкова змінна з відбиттям /6/ має лише континуально розщепні фактори.

Відзначимо, що класи B та S відповідно є аналогами класу безмежно подільних випадкових змінних та класу J_0 випадкових змінних, що мають лише розкладні доданки /про клас J_0 див. у роботі [3]/. Як показують розглянуті приклади, приналежність чи неприналежність випадкової змінної до класу B та S повністю визначається її відбиттям.

Список літератури: 1. Квит И.Д. О расщеплении положительных случайных величин на независимые факторы. - В кн.: Материалы Всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. Киев, 1973. 2. Квіт І.Д., Косарчин В.М. Експоненті та логарифмічні розподіли. Відбиття та проблема моментів. - Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип.13. 3. Линник Ю.В. Разложения вероятностных законов. Изд-во Ленинград. ун-та, 1960.

УДК 5I7.5I2

У.А.Мишковець

КРИТЕРІЙ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР"Є В ТЕРМІНАХ ЗГОРТКИ

У роботі [3] наводиться побудова гільбертового простору майже періодичних функцій. Цей клас функцій позначаємо через Q^2- м.п.

Теорема. Ряд Фур"є

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_R(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$$

майже періодичної функції $R(x)$ збігається абсолютно тоді і лише тоді, коли $R(x)$ може бути зображена у вигляді згортки

$$R(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{g(t)}\,dt,$$

де

$$f(t) \in Q^2\text{-м.п.}, \quad g(t) \in Q^2\text{-м.п.}$$

Доведення. Необхідність. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ збігається. Тоді

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\lambda_n x}$$

є майже періодичною функцією Бора [I]. Приймемо

$$A_n = \sqrt{|C_n|}\ , \quad B_n = \sqrt{|C_n|}\, e^{-i\alpha_n},$$

де $\alpha_n = \arg C_n$. Тоді ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^2$$

збігаються. На основі теореми Фішера-Рісса існують функції $f(x)$ і $g(x)$, які належать до Q^2- м.п. , і такі, що

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|C_n|}\, e^{i\lambda_n t},$$

$$g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{i\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|C_n|}\, e^{-i\alpha_n} e^{i\lambda_n t}.$$

Для функції $F(x)$, яка визначається за формулою

$$F(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{g(t)}\,dt,$$

ряд Фур"є матиме вигляд

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|e^{i\alpha_n}e^{i\lambda_n x}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\lambda_n x}$$

Оскільки функції $F(x)$ і $R(x)$ майже періодичні функції Бора, у яких коефіцієнт і показники Фур"є збігаються, то $F(x)=R(x)$ на всій числовій осі. Функція $R(x)$ зображається у вигляді згортки.

Достатність. Для загального випадку допускаємо, що показники Фур"є λ_n функцій $f(t)$ і $g(t)$ збігаються

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_f(\lambda_n)e^{i\lambda_n t}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{i\lambda_n t},$$

$$g(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}B_g(\lambda_n)e^{i\lambda_n t}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{i\lambda_n t}.$$

Тоді

$$R(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+t)\overline{g(t)}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\lambda_n x},$$

де $C_n=A_n\bar{B}_n$.

Оскільки $f(t)$ і $g(t)$ функції з класу Q^2- м.п, то

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2<\infty;\quad \|g\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|B_n|^2<\infty.$$

З нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n\bar{B}_n|\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|A_n|^2+|B_n|^2\right)$$

одержуємо абсолютну збіжність ряду Фур"є

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\lambda_n x}=R(x).$$

Теорема доведена. Вона узагальнює відому теорему М.Рісса [2] для чисто періодичного випадку.

У класі майже періодичних функцій Безіковича / B^2- м.п / не було введено поняття скалярного добутку та згортки. З цієї причини теорема М.Рісса не піддавалась узагальненню. Побудований клас Q^2- м.п функцій дає змогу одержувати нові результати з теорії майже періодичних функцій. Зокрема, вдалося ввести поняття скалярного добутку і згортки для B^2- м.п функцій і показати, що простір B^2- м.п функцій гільбертовий. У роботі [3] дається співвідношення між класами Q^2- м.п і B^2- м.п.

Список літератури: I. Бор Г. Почти периодические функции. М., Гостехиздат, 1934. 2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, I96I. 3. Мишковец У.А. Некоторые вопросы теории почти периодических функций. Автореф.дис... канд.физ.-мат.наук, Львов, 1972.

УДК 517.942+534.014.5

П.І.Тацуняк

РОЗВ"ЯЗОК РІВНЯННЯ ДЛЯ ОДНОГО ТИПУ АНГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa_1^2 x + \kappa_2^2 \left[(x - x_0)_+ + (x + x_0)_- \right] = 0, \qquad /I/$$

це для скорочення введемо позначення $(x-x_0)_+ = (x-x_0)\Theta(x-x_0)$; $(x+x_0)_- = (x+x_0)\Theta(-x-x_0)$, $\Theta(x)=\begin{cases}1; x>0\\0; x<0\end{cases}$ – функція стрибка. Рівняння /I/ описує рух матеріальної точки одиничної маси під дією пружних сил: сили $f_1 = -\kappa_1^2 x$, визначеної на всьому інтервалі $-\infty < x < \infty$, та сили $f_2 = -\kappa_2^2 [(x-x_0)_+ + (x+x_0)_-]$, що включається на відстані x_0 від положення рівноваги і визначена тим самим для $|x| > x_0$ /рис.I./. Така модель осцилятора має механічний зміст і може бути апроксимацією для більш загального виду ангармонічного осцилятора, відновлююча сила якого зображена на рис.I пунктиром /для його розв"язання застосовуються тільки наближені методи [I] /.

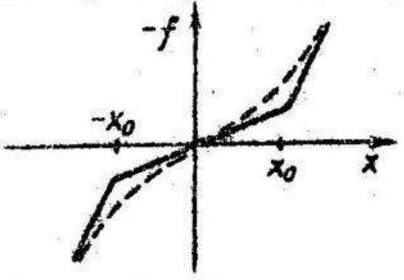

Рис.I.

Рух розглядуваного осцилятора повністю визначається коефіцієнтами пружності κ_1^2 та κ_2^2, критичним параметром відхилення $x_0 > 0$ та початковими умовами, які для конкретності виберемо

$$x(0)=0\,; \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=v_0\,, \qquad /2/$$

де v_0 – початкова швидкість матеріальної точки.

Введемо заміну

$$\frac{dx}{dt}=p\,; \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dx}\;\frac{dx}{dt}=\frac{dp}{dx}\cdot p=\frac{1}{2}\,\frac{dp^2}{dx}\,, \qquad /3/$$

яка перетворює рівняння /I/ у рівняння I-го порядку

$$\frac{dp^2}{dx}=-2k_1^2x-2k_2^2\left[(x-x_0)_+ +(x+x_0)_-\right]\,, \qquad /4/$$

що легко інтегрується

$$p^2=-k_1^2x^2-2k_2^2\left[\int t_1\theta(t_1)dt_1+\int t_2\theta(-t_2)dt_2\right],$$

де $t_1=x-x_0\,;\;t_2=x+x_0$. Зокрема, інтегруючи частинами і використовуючи властивість δ – функції Дірака

$$\int t_1\theta(t_1)dt_1=\int\theta(t)d\left(\frac{t_1^2}{2}\right)=\frac{t_1^2}{2}\theta(t_1)-\int\frac{t_1^2}{2}d\theta(t_1)=\frac{t_1^2}{2}\theta(t_1)-\int\frac{t_1^2}{2}\delta(t_1)dt_1=$$

$$=\frac{t_1^2}{2}\theta(t_1)=\frac{1}{2}(x-x_0)^2\theta(x-x_0)=\frac{1}{2}(x-x_0)_+^2\,,$$

аналогічно $\int t_2\theta(-t_2)dt_2=\frac{1}{2}(x+x_0)^2\,\theta(-x-x_0)=\frac{1}{2}(x-x_0)_-^2$

одержимо розв"язок рівняння /4/

$$p^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-k_1^2x^2-k_2^2\left[(x-x_0)_+^2+(x+x_0)_-^2\right]+C^2,$$

а також перший інтеграл рівняння /I/

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{C_0^2-k_1^2x^2-k_2^2\left[(x-x_0)_+^2+(x+x_0)_-^2\right]} \qquad /5/$$

Підставляючи у /5/ початкові умови /2/, маємо $\frac{dx(0)}{dt}=v_0=C$.

Як відомо [3], рівняння типу

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\varphi(x)}$$

має періодичні розв"язки, якщо в $\varphi(x)$ є прості нулі при $x=a$ та $x=\text{в}$ і якщо $a<x(0)<\text{в}$. Тоді період коливання можна визначити безпосередньо з виду самого рівняння за формулою

$$T=2\int_a^{\text{в}}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\,. \qquad /7/$$

Для цього із /5/ знайдемо найближчі до $x=0$ корені $a<0<\text{в}$ функції $\varphi(x)$, що задовольняють нерівності $|x_{a,\text{в}}|>x_0$:

$$-\varphi(x)=(k_1^2+k_2^2)x^2\mp 2k_2^2x_0x+k_1^2x_0^2-v_0^2=0,$$

звідки

$$x_a = a = -\frac{k_2^2 x_0 + \sqrt{\Delta'}}{k_1^2 + k_2^2} \;;\; x_a < -x_0 , \qquad /8/$$

$$x_b = b = \frac{k_2^2 x_0 + \sqrt{\Delta'}}{k_1^2 + k_2^2} \;;\; x_b > x_0 ,$$

де $\Delta' = v_0^2 (k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 k_2^2 x_0^2 > 0 .$

Підставляючи x_a та x_b у /7/ та враховуючи парність підінтегрального виразу, одержуємо після інтеграції величину періоду

$$\frac{T}{4} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x^2}} + \int_{x_0}^{\frac{k_2^2 x_0 + \sqrt{\Delta'}}{k_1^2 + k_2^2}} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x^2 - k_2^2 (x - x_0)^2}} =$$

$$= \frac{1}{k_1} \arcsin \frac{k_1 x_0}{v_0} + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \arccos \frac{k_1^2 x_0}{\sqrt{\Delta'}} . \qquad /9/$$

Очевидно, що період коливань /9/ залежить від початкової швидкості v_0 , тому що коливання ангармонічного осцилятора не ізохронні.

З огляду на періодичність розв"язок достатньо визначити в інтервалі $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи рівняння /5/, маємо відповідно до областей значень функції $x(t)$ три інтеграли

$$J = J_- + J_0 + J_+ = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x - k_2^2 [(x - x_0)_+^2 + (x + x_0)_-^2]}} = t + C ; \qquad /10/$$

$$J_0 = J \cdot [\theta(x + x_0) - \theta(x - x_0)] = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x^2}} = \frac{1}{k_1} \arcsin \frac{k_1 x}{v_0} + C_0 ; \qquad /11/$$

$$J_\pm = J \theta(\pm x - x_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k_1^2 x_0^2 \pm 2 k_2^2 x_0 x - (k_1^2 + k_2^2) x^2}} + C_\pm . \qquad /12/$$

Інтеграли $J_\pm$, а також /9/, беруть за формулою довідника [2]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}}$$

за умови $c < 0$ та $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ для дискримінанта

$$J_\pm = \frac{\theta(\pm x - x_0)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \arcsin \frac{(k_1^2 + k_2^2) x \mp k_2^2 x_0}{\sqrt{\Delta'}} + C_\pm , \qquad /12a/$$

де умова $c < 0$ виконується автоматично. Нерівність $\Delta' = \frac{1}{4} \Delta = v_0^2 (k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 k_2^2 x_0^2 > 0$ дає необхідну умову для коливного процесу, що зв"язує параметри k_1 , k_2 , x_0 осцилятора та початкову швидкість

$$|v_0| > \frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} x_0 . \qquad /13/$$

Враховуючи /II/ та /I2a/ перейдемо в /I0/ до обернених функцій, що дає розв"язок у кусковому вигляді

$$x(t)=\begin{cases} -\frac{k_2^2 x_0}{k_1^2+k_2^2}+\frac{\sqrt{\Delta'}}{k_1^2+k_2^2}\sin\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t+C_-); & x<-x_0 \\ \frac{v_0}{k_1}\sin k_1\,(t+C_0) & ;-x_0<x<x_0 \\ \frac{k_2^2 x_0}{k_1^2+k_2^2}+\frac{\sqrt{\Delta'}}{k_1^2+k_2^2}\sin\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t+C_+); & x>x_0 \end{cases} \qquad /I4/$$

Якщо врахувати неперервність руху точки у критичних значеннях $x=\pm x_0$, то із /I4/ можна побудувати схематичний графік коливання для одного періоду /рис.2/. З огляду на непарність $x(t)$ достатньо визначити на півперіоді. Критичному значенню $x=x_0$ на півперіоді відповідають два значення аргумента: t_1, та t_2 /рис.2/, які визначаються із /I4/ та /I9/

$$t_1=\frac{1}{k_1}\arcsin\frac{k_1}{v_0}x_0\,; \qquad /I5/$$

$$t_2=\frac{T}{2}-t_1=\frac{1}{k_1}\arcsin\frac{k_1}{v_0}+\frac{2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\arccos\frac{k_1^2 x_0}{\sqrt{\Delta'}} \qquad /I6/$$

Критичні значення t_1 та t_2 ділять період на три інтервали, $x(t)$ для яких одержимо, обчислюючи в /I4/ відповідні фазові константи C_0, C_+, C_0'. Із початкової умови $x(0)=0$ та другого рівняння /I4/ маємо $C_0=0$. Константи C_+ та C_0' можна визначити із неперервності руху в критичних точках t_1 та t_2, але простіше використати симетрію графіка, із якої випливає, що $x(t)$ має максимум у точці $t=\frac{T}{4}$, тому із третього рівняння /I4/ маємо

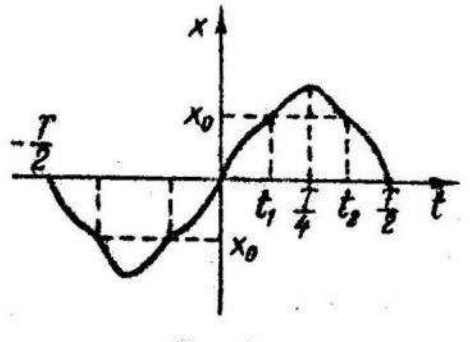

Рис.2.

$$x'(t)\Big|_{t=\frac{T}{4}}=\frac{\sqrt{\Delta'}}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\cos\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,(t+C_+)\Big|_{t=\frac{T}{4}}=0. \qquad /I7/$$

Звідки, враховуючи /9/, одержимо константу C_+

$$C_+=\frac{\pi}{2\sqrt{k_1^2+k_2^2}}-\frac{T}{4}\,, \qquad /I7/$$

що підставлена в трете рівняння /I4/ визначає $x(t)$ на інтервалі $t_1<t<t_2$. Для знаходження $x(t)$ на інтервалі $t_2<t<\frac{T}{2}$ виконаємо з огляду на симетрію дзеркальне відображення $x(t)$ із інтервалу $0<t<t_1$ відносно точки $t=\frac{T}{4}$, що дає $x(t)=-\frac{v_0}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1\left(t-\frac{T}{2}\right)$. Остаточно розв"язок рівняння /I/ на півперіоді має вигляд

$$x(t)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{v_0}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1 t & ;0\leq t\leq t_1\\ \frac{\varkappa_2^2 x_0}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}+\frac{\sqrt{\Delta'}}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\cos\sqrt{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\left(t-\frac{T}{4}\right) & ;t_1\leq t\leq t_2\\ -\frac{v_0}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1\left(t-\frac{T}{2}\right) & ;t_2\leq t\leq\frac{T}{2}\end{array}\right\} \qquad /I8/$$

або, враховуючи /I5/ та /I6/ у /I8/,

$$x(t)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{v_0}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1 t & ;0\leq t\leq t_1\\ \frac{\varkappa_2^2 x_0}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}+\frac{\sqrt{\Delta'}}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\cos\sqrt{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\left(t-\frac{t_1+t_2}{2}\right) & ;t_1\leq t\leq t_2\\ -\frac{v_0}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1\left(t-t_1-t_2\right) & ;t_2\leq t\leq t_1+t_2\end{array}\right\} \qquad /I8a/$$

Це нелінійне неізохронне коливання, що повністю визначається чотирма параметрами / $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, x_0, v_0 / та $x(0)=0$.

Зауваження. Із першого рівняння /I8/ з огляду на неперервність у критичних точках t_1 та t_2 випливає, що параметри осцилятора мусять задовольняти нерівність

$$|v_0|>\varkappa_1 x_0, \qquad /I9/$$

яка порівняно з нерівністю /I3/ є більш сильною і тому визначальною. Якщо нерівність /I9/ не виконується, то сила f_2 не включається і маємо звичайне гармонічне коливання.

Якщо прийняти $\varkappa_1=0$, то одержимо частинний випадок розглянутого ангармонічного осцилятора, рух якого відбувається тільки під дією сили f_2 і описується періодичною функцією вигляду

$$x(t)=\left\{\begin{array}{l}v_0 t\\ x_0+\frac{v_0}{\varkappa_2}\cos\varkappa_2\left(t-\frac{T}{4}\right),\\ -v_0\left(t-\frac{T}{2}\right)\end{array}\right. \qquad /20/$$

де період T визначається формулою

$$\frac{T}{4} = \frac{x_0}{|v_0|} + \frac{1}{\kappa_2} \arcsin \kappa_2 .$$

Необхідна умова руху: $|v_0| > 0$; випадок $v = 0$ виключається. Із /20а/ видно, що малим початковим швидкостям $|v_0| \ll x_0$ відповідає великий період. При великих швидкостях $|v_0| \gg x_0$ період прямує до $\frac{4}{\kappa_2} \arcsin \kappa_2$.

Аналіз руху даного осцилятора завершимо розглядом діаграми у фазовому просторі / x, $\dot{x}$ / /точка означає похідну по часу/. Із /5/ одержуємо рівняння фазової траєкторії

$$\kappa_1^2 x^2 + \dot{x}^2 = v_0^2 , \quad (|x| < x_0), \qquad /2I/$$

$$(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) x^2 \mp 2\kappa_2^2 x_0 x + \dot{x}^2 = v_0^2 - \kappa_2^2 x_0 ; \ (\pm x - x_0 > 0), \qquad /22/$$

що є частинами трьох еліпсів. Канонічна форма рівнянь еліпсів /2I/ та /22/ є

$$\frac{x^2}{\frac{v_0^2}{\kappa_1^2}} + \frac{\dot{x}^2}{v_0^2} = 1 \quad , \ (|x| < x_0) \qquad /23/$$

$$\frac{(x \mp x_1)^2}{\frac{\Delta'}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} + \frac{\dot{x}^2}{\Delta'} = 1 \ , \ (\pm x - x_0 > 0), \qquad /24/$$

де $x_1 = \frac{\kappa_2^2 x_0}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$ – координата центра еліпса. Фазова траєкторія замкнута /рис.3/, що відповідає періодичному руxові. Координати центра еліпсів /24а/ лежать у межах $|x_1| \leq x_0$, причому випадок $|x_1| = x_0$ відповідає частинному випадку $\kappa_1 = 0$, розглянутому вище /20/, $x_1 = 0$ відповідає випадку $\kappa_1 \neq 0$; $\kappa_2 = 0$, тобто гармонічному осцилятору.

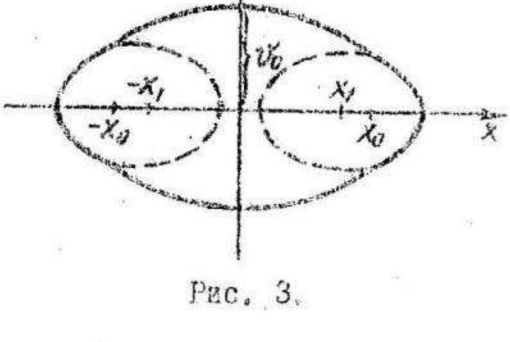

Рис. 3.

Висловлюємо щиру подяку И.М.Стахері за постановку задачі.

Список літератури: 1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974. 2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М., Наука, 1971. 3. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т.3. М., Мир, 1970.

УДК 517.948

М.Й. Михалюк, Є.М. Парасюк

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ЗІ ЗМІННОЮ ГУСТИНОЮ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв"язну область T, при заповненні якої речовиною зі змінною густиною $\mu(x,y)$ породжується заданий зовнішній потенціал $V_0(x,y)$.

Припустимо, що

$$V_0(x,y)=a_0\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+V(x,y), \qquad /1/$$

де a_0 – дійсне додатне число; $V(x,y)$ – гармонійна зовні нуля і зникає на нескінченності.

Нехай D – обмежена, однозв"язана область на площині $z=x+iy$. Розглянемо введений у роботі [2] клас $A(D)$ функцій $\mu(z,\bar{z})$ таких, що функція $\mu(z,w)$ двох незалежних комплексних змінних аналітична в області $D\times D_*$ і неперервна в $\overline{D\times D_*}$, де D_* – область симетрична D відносно дійсної осі.

Введемо допоміжну функцію $z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область $T\subset D$ площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію

$z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини $\mu(z,\bar{z}) \in \mathcal{A}(D)$.

Нехай

$$U_e(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z}, \quad U_i(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_i}{\partial z}, \qquad /2/$$

де

$$V_i(x,y;T) = \iint\limits_T \mu(\zeta,\bar{\zeta}) \ln\frac{1}{|\zeta - z|}\, d\xi\, d\eta; \qquad /3/$$

$\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$ – внутрішній потенціал, що породжується областю $T \subset D$ в густиною $\mu(z,\bar{z}) \in \mathcal{A}(D)$.

Оскільки V_{ez} аналітична функція зовні нуля і зникає на нескінченності, тобто

$$U_e(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad \text{де } b_1 = \frac{a_0}{\pi},$$

а функція $U_i(z)$ записується

$$U_i(z) = M(z,\bar{z}) + g(z), \qquad /4/$$

$$M(z,\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \mu(z,w)\, dw, \qquad /5/$$

де $g(z)$ – регулярна всередині T і неперервна включно до границі, то з огляду на неперервність перших похідних потенціалу на границі ∂T області T існує рівність

$$U_e(z) = M(z,\bar{z}) + g(z), \quad z \in \partial T. \qquad /6/$$

Інтегруючи /6/ по границі ∂T області $T \subset D$, одержуємо

$$\iint\limits_T \mu(z,\bar{z})\, dS_z = a_0. \qquad /7/$$

Таким чином, існує така лема.

Лема. Область $T \subset D$, що є розв"язком оберненої задачі для потенціалу /I/ і густини $\mu(z,\bar{z}) \in \mathcal{A}(D)$ задовольняє умову /7/.

Нехай дійсна строго додатна функція $\mu(z,\bar{z}) \in \mathcal{A}(|z| < R)$, де R – довільне додатне число.

Звернемося тепер до рівняння /6/, що дає рівність частинних похідних внутрішнього $V_i(x,y;T)$ і зовнішнього $V_e(x,y)$ потенціалів на границі ∂T області T . Спираючись на результати роботи [2], отримуємо, що функція $z(t)$ є цілою функцією, оскільки $U_e(z)$ аналітична зовні нуля. Таким чином, $z=z(e^{i\varphi})$, $0<\varphi<2\pi$ – аналітична крива. Звідси випливає, що в точках кривої $z=z(e^{i\varphi})$, $0<\varphi<2\pi$ існує рівність радіальних похідних внутрішнього $V_i(x,y;T)$ і зовнішнього $V_e(x,y)$ потенціалів.

Користуючись елементарними обчисленнями і враховуючи результати попередньої леми, неважко показати, що радіальна похідна внутрішнього $V_i(x,y;T)$ потенціалу в точках границі області T , яка є розв"язком обереноної задачі для потенціалу $V_e(x,y)$ і густини $\mu(z,\bar{z})\in A(|z|<R)$, рівномірно обмежена константою, що залежить від потенціалу $V_e(x,y)$ і густини $\mu(z,\bar{z})$.

Радіальна похідна зовнішнього $V_e(x,y)$ потенціалу має особливість у початку координат. Звідси випливає таке твердження.

Теорема. Будь-який розв"язок $z=z(t)$, $z(0)=0$, $z'(0)>0$ оберненої задачі для потенціалу /I/ і дійсної строго додатної густини $\mu(z,\bar{z})\in A(|z|<R)$, $R>0$ – довільне число, задовольняє умову

$$|z(e^{i\varphi})|\geq r_0(V_e,\mu)>0,$$

де постійна $r_0(V_e,\mu)$ визначається потенціалом $V_e(x,y)$ і густиною $\mu(z,\bar{z})$.

Список літератури: I. Михалюк М.Й. Про локальну єдність розв"язку оберненої задачі логарифмічного потенціалу для змінної густини. – Математична фізика, 1974, №2. 2. Чередниченко В.Г. Обратные задачи логарифмического потенциала с аналитической плотностью. – Дифференциальные уравнения, 1973, т.9, № 2.

УДК 517.926

І.П.Пустомельников

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Одним з методів сучасної математичної і теоретичної фізики є апарат узагальнених функцій [7,6]. Вивченню дій над ними присвячено багато робіт. Відомо [3], що нормальна лінійна однорідна система звичайних диференціальних рівнянь з нескінченно диференційованими коефіцієнтами не має інших розв"язків в узагальнених функціях, крім класичних. Але для рівнянь з особливостями в коефіцієнтах можуть з"являтися нові розв"язки в узагальнених функціях.

У цій замітці розроблено метод знаходження розв"язків рівняння

$$t\,\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\,\frac{dx}{dt}+q(t)x=0 \qquad /1/$$

у класі узагальнених функцій з точковим носієм

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m}x_k\,\delta^{(k)}(t). \qquad /2/$$

Усі функції розглядаються в області дійсної змінної t. Число m називається порядком розподілення /2/, якщо $x_m\neq 0$.

Теорема I. Нехай $p(t)$ і $q(t)$ неперервно диференційовані відповідно $m+1$ і m - раз у деякому околі початку координат. Для існування узагальненого розв"язку порядку m рівняння /I/ необхідно і достатньо виконання сукупності умов:

$$p(0)=m+2; \qquad /3/$$

система

$$n(n+1-p_0)X_{n-1}+\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\left[q_{k-1}-(n+k)p_k\right]X_{n+k-1}=0 \qquad /4/$$
$$(n=0,\ldots,m+1;\ p_k=\frac{1}{k!}p^{(k)}(0),\ \ q_k=\frac{1}{k!}q^{(k)}(0))$$

має нетривіальний розв"язок відносно невідомих $X_0,\ldots,X_m$.

Доведення. Припустимо, що узагальнена функція /2/, для якої $x \neq 0$ є розв"язком рівняння /I/. Для знаходження невідомих коефіцієнтів x_k підставимо /2/ в /I/. Оскільки

$$t^n\delta^{(k)}(t) = \begin{cases} (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!}\,\delta^{(k-n)}(t), & n < k \\ 0, & k < n, \end{cases} \qquad /5/$$

то можна замінити $p(t)$ і $q(t)$ поліномами

$$p_{m+1}(t) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{p^{(k)}(0)}{k!}t^k, \qquad q_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{q^{(k)}(0)}{k!}t^k.$$

Внаслідок цього одержуємо рівняння

$$t\sum_{k=0}^{m} x_k\delta^{(k+2)}(t) + \sum_{n=0}^{m+1} p_n t^n \sum_{k=0}^{m} x_k\delta^{(k+1)}(t) + \sum_{n=0}^{m} q_n t^n \sum_{k=0}^{m} x_k\delta^{(k)}(t) = 0.$$

Звідси з врахуванням формули /5/ випливає

$$-\sum_{k=0}^{m}(k+2)x_k\delta^{(k+1)}(t) + \sum_{n=0}^{m+1}(-1)^n p_n\sum_{k=0}^{m}\frac{(k+1)!}{(k+1-n)!}x_k\delta^{(k+1-n)}(t) + \sum_{n=0}^{m}(-1)^n q_n\sum_{k=0}^{m}\frac{k!}{(k-k)!}x_k\delta^{(k-n)}(t) = 0.$$

Зміна порядку сумування приводить до співвідношення

$$-\sum_{n=1}^{m+1}(n+1)x_{n-1}\delta^{(n)}(t) + \sum_{n=0}^{m+1}\frac{1}{n!}\delta^{(n)}(t)\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k(n+k)!\,p_k x_{n+k-1} + \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\delta^{(n)}(t)\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}(n+k-1)!\,q_{k-1}x_{n+k-1} = 0.$$

Збираючи коефіцієнти при однакових похідних $\delta^{(n)}(t)$ і прирівнюючи до нуля, запишемо

$$(p_0 - n - 1)x_{n-1} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\left[q_{k-1} - (n+k)p_k\right]\cdot(n+k-1)!\,x_{n+k-1} = 0. \qquad /6/$$

Залишається ввести позначення

$$X_n = n!\,x_n, \qquad /7/$$

щоб прийти до системи рівнянь /4/.

Останнє з них

$$(m+2-p_0)X_m = 0$$

повинно мати ненульовий розв"язок, оскільки порядок розв"язку /2/ дорівнює m . Отже, необхідність умов /3/ і /4/ доведена.

Достатність встановлюється просто: обираючи нетривіальний розв"язок системи /4/, складаємо узагальнену функцію

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} X_k \delta^{(k)}(t).$$

Підставляючи ЇЇ у рівняння /1/, переконуємося в тому, що вона дійсно є розв"язком. Залишається показати, що його порядок дорівнює m, тобто $X_m \neq 0$. Нехай $X_m = 0$.

Оскільки

$$n+1+p_0 \neq 0, \quad n = m, m-1, \ldots, 0,$$

то просуваючись від останнього рівняння системи /4/ до попередніх, виявляємо, що $X_{m-1} = 0$, $X_{m-2} = 0, \ldots, X_0 = 0$. Таким чином, у нетривіальному розв"язку системи /4/ $X_m \neq 0$.

<u>Теорема 2.</u> Вироджене гіпергеометричне рівняння [5, с.388]

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (b-t)\frac{dx}{dt} - ax = 0 \qquad /8/$$

має розв"язок скінченного порядку з носієм $t=0$ у тому і лише в тому випадку, коли коефіцієнти a, b – цілі додатні числа і $b > a+1$.

<u>Доведення.</u> Система /6/, яка відповідає рівнянню /8/, має вигляд

$$(a-1)x_0 = 0, \quad (b-n)x_{n-2} - (a-n)x_{n-1} = 0,$$

$$n = 2, \ldots, m+1, \quad (b-m-2)x_m = 0.$$

Для існування узагальненого розв"язку порядку m необхідно і достатньо, щоб ця система мала нетривіальний розв"язок, в якому $x_m \neq 0$. Тому повинна виконуватись умова

$$b = m+2. \qquad /9/$$

Це означає, що параметр b є натуральним числом, причому $b > 2$.

Обираючи довільне $x_m \neq 0$, визначаємо решту невідомих величин

$$x_{m-k} = \frac{(a-m-1)(a-m)\cdots(a-m+k-2)}{k!} x_m, \quad k \geq 1.$$

Оскільки $(a-1)x_0 = 0$, то розглянемо два випадки: $a = 1$ і $a \neq 1$. У першому з них можна прийняти $x_0 \neq 0$. Тоді всі інші коефіцієнти $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$ також відмінні від нуля. Якщо ж $a \neq 1$, то $x_0 = 0$ і

$$(a-m-1)(a-m)\cdots(a-2)x_m = 0.$$

Тому що $x_m \neq 0$, то параметр a повинен дорівнювати одному з чисел 2, 3, $\ldots, m,$ $m+1$. Отже, у будь-якому випадку a – натуральне число і

$$a \leq m+1. \qquad /10/$$

З порівняння /9/ і /10/ одержуємо $b \geq a+1$. Повертаючись до величин x_{m-k}, можна записати

$$x_{m-k} = (-1)^k \binom{b-a-1}{k} x_m, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Таким чином, шуканий розв"язок вдається записати у явній формі

$$x(t) = C\left(\frac{d}{dt} - 1\right)^{b-a-1} \delta^{(a-1)}(t), \quad C = const \neq 0.$$

У застосуваннях трапляються рівняння [5,с.386]

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + btx = 0. \qquad /11/$$

Воно споріднене з рівнянням Бесселя, зводиться до нього за допомогою деякої підстановки.

Теорема 3. Рівняння /11/, в якому $b \neq 0$, має розв"язок виду /2/ тоді і лише тоді, коли коефіцієнт a є додатним парним числом.

Доведення. Рівняння /11/ належить до типу /1/ з коефіцієнтами

$$p_0 = a, \quad p_k = 0, \quad (k \geq 1),$$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = b, \quad q_k = 0, \quad (k \geq 2).$$

Визначаюча система /4/

$$\begin{gathered} b X_1 = 0, \\ (2-a)X_0 + b X_2 = 0, \\ 2(3-a)X_1 + b X_3 = 0, \\ 3(4-a)X_2 + b X_4 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m-1)(m-a)X_{m-2} + b X_m = 0, \\ m(m+1-a)X_{m-1} = 0, \\ (m+2-a)X_m = 0. \end{gathered}$$

Перше рівняння дає $X_1 = 0$. Просуваючись далі вздовж рівнянь системи, знаходимо, що усі невідомі з непарними індексами дорівнюють нулеві. Таким чином, розв"язок $x(t)$ рівняння /II/ містить лише похідні парного порядку δ -функції. Отже, порядок m - парне число. Вимога $X_m \neq 0$ потребує рівності

$$a = m+2.$$

Але $m = 2n$. Тому $a = 2(n+1)$.

Застосування підстановки /7/ дає

$$(a-2)x_0 = 2bx_2\ , \quad (a-4)x_2 = 4bx_4,$$
$$(a-6)x_4 = 6bx_6\ , \ldots, \ (a-m)x_{m-2} = mbx_m.$$

Оскільки $a = m+2$, то

$$x_{m-2k} = \binom{\frac{m}{2}}{k} b^k x_m\ , \quad k = 0, \ldots, \frac{m}{2}\ .$$

Підставляючи ці коефіцієнту у /2/, остаточно знайдемо формулу для розв"язку $x(t)$

$$x(t) = C\left(\frac{d^2}{dt^2} + b\right)^{\frac{a-2}{2}} \delta(t), \quad C = const \neq 0.$$

Список літератури: I. Алиев Ф.С. О решениях некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций. - Вестн.Моск.ун-та, сер. матем., механ., 1973, № 3, 5. 2. Боголюбов Н.Н., Широков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1974. 3. Винер И.Я. Решения линейных систем в обобщенных функциях. - Дифференциальные уравнения, 1975, II, № 6. 4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958. 5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971. 6. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М., Мир, 1965.

УДК 517.926

І.П.Пустомельников

ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Відомо [3], що розв"язана відносно похідних лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з нескінченно диференційованими коефіцієнтами не має інших розв"язків в узагальнених функціях, крім класичних. Але в рівняннях з особливостями в коефіцієнтах можуть появлятися нові розв"язки в узагальнених функціях [1,2]. У цій роботі викладена методика знаходження розв"язків виду скінченої лінійної комбінації дельта-функції та її похідних лінійних систем диференціальних рівнянь. Виявлена ознака існування зводиться до розв"язання деякої системи матричних рівнянь і дає змогу досить просто обчислити шуканий розв"язок.

Теорема I. Нехай у системі

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)x, \qquad /1/$$

де $x(t) \in N$ – мірний вектор; $A(t), B(t)$ – матриці порядку $(N \times N)$, неперервно диференційовані відповідно $m+1$ і m-раз у деякому околі точки t_0, $A(t_0) = 0$. Тоді, якщо існує розв"язок

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} x_k \delta^{(k)}(t-t_0), \quad x_m \neq 0, \qquad /2/$$

то матриця $B(t_0) + (m+1)A'(t_0)$ – вироджена. Обернено, якщо $m+1$ – найменший цілий додатний корінь рівняння

$$\det\left(B(t_0)+\lambda A'(t_0)\right)=0, \qquad /3/$$

то розподіл /2/ є розв"язком системи /I/.

Доведення. Припустимо, що узагальнена вектор-функція /2/ є розв"язком системи /I/. Підставивши її в /I/, знайдемо невідомі вектори x_k. Запишемо $A(t)$ і $B(t)$ за формулою Тейлора в околі точки t_0

$$A(t)=\sum_{n=1}^{m+1} A_n (t-t_0)^n + R_{m+1}(A),$$

$$B(t)=\sum_{n=0}^{m} B_n (t-t_0)^n + R_m(B).$$

Сумування у першій з цих формул починається з $n=1$, оскільки $A(t_0)=0$. Тому що залишкові члени $R_{m+1}(A)$ і $R_m(B)$ обертаються в нуль у точці t_0 разом з усіма своїми похідними до порядків $m+1$ і m включно

$$(t-t_0)^n\,\delta^{(k)}(t-t_0)=0, \quad k<n,$$

то для будь-якої функції $x(t)$ виду /2/

$$R_m(B)\,x(t)=0, \quad R_{m+1}(A)\,x'(t)=0. \qquad /4/$$

Підставляючи шуканий розв"язок /2/ у рівняння /I/ і враховуючи співвідношення /4/, одержуємо

$$A_{m+1}(t)\frac{dx}{dt}=B_m(t)x, \qquad /5/$$

де

$$A_{m+1}(t)=\sum_{n=1}^{m+1} A_n (t-t_0)^n, \quad B_m(t)=\sum_{n=0}^{m} B_n (t-t_0)^n.$$

Обчислимо тепер похідні розподілу $\delta^{(k)}(t-t_0)$ на будь-яку нескінченно диференційовану функцію $\alpha(t)$. Для цього розглянемо значення функціонала $\alpha(t)\delta^{(k)}(t-t_0)$ на фінітній нескінчено диференційованій функції $\varphi(t)$. Маємо

$$\langle \alpha(t)\delta^{(k)}(t-t_0),\varphi(t)\rangle=\langle \delta^{(k)}(t-t_0),\alpha(t)\varphi(t)\rangle,$$

$$\langle \delta^{(k)}(t-t_0),\alpha(t)\varphi(t)\rangle=(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\alpha(t)\varphi(t)\right]\Big|_{t=t_0}$$

Застосовуючи формулу Лейбніца для похідної добутку функцій, знаходимо

$$\langle a(t)\delta^{(k)}(t-t_0), \varphi(t)\rangle = (-1)^k \sum_{n=0}^{k} C_k^n a^{(k-n)}(t_0)\varphi^{(n)}(t_0).$$

Але

$$\varphi^{(n)}(t_0) = (-1)^n \langle \delta^{(n)}(t-t_0), \varphi(t)\rangle.$$

Тому

$$a(t)\delta^{(k)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n a^{(k-n)}(t_0)\delta^{(n)}(t-t_0).$$

Використання цієї рівності дає

$$A_{m+1}(t)\delta^{(k+1)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{k+1-n} C_{k+1}^n A_{m+1}^{(k+1-n)}(t_0)\delta^{(n)}(t-t_0),$$

$$B_m(t)\delta^{(k)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n B_m^{(k-n)}(t_0)\delta^{(n)}(t-t_0).$$

Таким чином, після підстановки виразу /2/ в систему /I/ маємо

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{k+1-n} C_{k+1}^n A_{m+1}^{(k+1-n)}(t_0) x_k \delta^{(n)}(t-t_0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n B_m^{(k-n)}(t_0) x_k \delta^{(n)}(t-t_0).$$

Оскільки

$$\frac{A_{m+1}^{(k+1-n)}(t_0)}{(k+1-n)!} = A_{k+1-n}, \quad \frac{B_m^{(k-n)}(t_0)}{(k-n)!} = B_{k-n},$$ то

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^{k+1-n}(k+1) \frac{A_{k+1-n}}{n!} x_k \delta^{(n)}(t-t_0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} \frac{B_{k-n}}{n!} x_k \delta^{(n)}(t-t_0).$$

При $n = k+1$ у лівій частині рівності містяться доданки з коефіцієнтом A_0 , який дорівнює нулеві. Отже, останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{k-n}}{n!} \left(B_{k-n} + (k+1)A_{k+1-n}\right) x_k \delta^{(n)}(t-t_0) = 0.$$

Тут зручно поміняти порядок сумування

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(t-t_0) \sum_{k=n}^{m} (-1)^k \left(B_{k-n} + (k+1)A_{k+1-n}\right) x_k = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при всіх похідних $\delta^{(n)}(t-t_0)$, прийдемо до системи матричних рівнянь для знаходження невідомих векторів x_k

$$\begin{gathered}(B_0+A_1)x_0-(B_1+2A_2)x_1+(B_2+3A_3)x_2-\dots+(-1)^m(B_m+(m+1)A_{m+1})x_m=0\\ (B_0+2A_1)x_1-(B_1+3A_2)x_2+\\ +(B_2+4A_3)x_3+(-1)^{m-1}(B_{m-1}+(m+1)A_m)x_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (B_0+mA_1)x_{m-1}-(B_1+(m+1)A_2)x_m=0,\\ (B_0+(m+1)A_1)x_m=0.\end{gathered}\qquad /6/$$

У зв"язку з тим, що $x_m\neq 0$, матриця $B_0+(m+1)A_1$ повинна бути особливою. Необхідність доведена. Достатність встановлюється просто. Якщо число $m+1$ є найменшим цілим додатним коренем співвідношення /3/, то останнє рівняння системи /6/ має нетривіальний розв"язок x_m.

Підставляючи x_m в передостаннє рівняння, можемо знайти вектор x_{m-1}, оскільки матриця B_0+mA_1 не вироджена. Продовжуючи цей процес, визначимо усі вектори x_m, $x_{m-1},\dots,x_1,x_0$. Розв"язання відповідних рівнянь забезпечується умовою

$$\det(B_0+kA_1)\neq 0,\quad k=1,2,\dots,m.$$

Залишається зауважити, що, якщо матриця $B(t)$ стала і $A(t)=(t-t_0)E$, система /6/ розпадається на незалежні рівняння

$$(B+E)x_0=0,\quad (B+2E)x_1=0,\dots,$$
$$(B+(m+1)E)x_m=0.$$

У цьому випадку необхідною і достатньою умовою існування розв"язку порядку m системи /I/ є виродженість матриці $B+(m+1)E$.

Доведена теорема узагальнює результати статті [2].

Приклад I. Для системи

$$t\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}x$$

з особливою точкою $t_0 = 0$ маємо

$$B + (m+1)E = \begin{pmatrix} m-4 & 4 \\ -3 & m+3 \end{pmatrix}.$$

Рівняння

$$\det\,(B + (m+1)E\,) = m^2 - m = 0$$

має цілі невід"ємні корені $m = 0\,,\ m = 1$. Тому існує розв"язок

$$x(t) = x_0\delta(t) + x_1\delta'(t)\,,$$

в якому x_0 і x_1 – власні вектори матриці $B + (m+1)E$, що відповідають власним значенням $m = 0$ і $m = 1$. Обчислення дають

$$x_0 = C_0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad x_1 = C_1\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},$$

де $C_0\,,\ C_1$ – довільні сталі.

Приклад 2. Диференціальне рівняння

$$\sin t\,\frac{dx}{dt} = -\,x\cos t$$

має зчисленну множину особливих точок

$$t_n = n\pi \quad (\,n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,).$$

Виписуємо величини

$$A(t) = \sin t, \qquad B(t) = -\cos t,$$
$$A'(t_n) = (-1)^n; \qquad B(t_n) = (-1)^{n+1}.$$

Характеристичне рівняння $B(t_n) + (m+1)A'(t_n) = 0$ має єдиний цілий невід"ємний корінь $m = 0$.Отже,вихідне рівняння має розв"язок

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(t - n\pi)$$

з довільними сталими коефіцієнтами C_n .

Теорема 2. Система диференціальних рівнянь [4,c.535]

$$t\,\frac{dx}{dt} = -\,2x\ ,\quad t\,\frac{dy}{dt} = (t+2)x + ty$$

має розв"язок

$$x = c\delta'(t)\,,\quad y = -\,c\delta'(t)\,,$$

це c – довільна стала.

Доведення. Особливою точкою системи є $t_0 = 0$. Обчислимо матриці

$$A_1 = A'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0 = B(0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = B'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k > 1$$

Єдиним цілим невід"ємним коренем рівняння

$$\det\left(B_0 + (m+1)A_1\right) = 0$$

є $m = 1$. Тому система /7/ має своїм розв"язком розподілення першого порядку

$$x(t) = a_1 \delta(t) + b_1 \delta'(t),$$

$$y(t) = a_2 \delta(t) + b_2 \delta'(t).$$

Для знаходження векторів

$$x_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

звернемося до системи /6/, яка має у цьому випадку вигляд

$$(B_0 + A_1)x_0 - B_1 x_1 = 0, \quad (B_0 + 2A_1)x_1 = 0.$$

Друге з цих рівнянь дає $b_2 = -b_1$. Переходячи до першого рівняння, одержуємо

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $a_1 = a_2 = 0$. Теорема доведена.

На закінчення, наведемо приклад системи [4, с.540]

$$at \frac{dx}{dt} = bc(y - z),$$

$$bt \frac{dx}{dt} = ca(z - x),$$

$$ct \frac{dx}{dt} = ab(x - y),$$

який не має розв"язків типу /2/, не зважаючи на наявність особливої точки $t_0 = 0$. Справді, рівняння

$$\det(B(0) + \lambda A'(0)) = \begin{vmatrix} \lambda a & bc & -bc \\ -ca & \lambda b & ca \\ ab & -ab & \lambda c \end{vmatrix} = 0,$$

яке перетворюється до виду

$$abcs(s^2+a^2+b^2+c^2)=0,$$

не має цілих додатних коренів. Тому, згідно з першою теоремою, розв"язки в класі розподілу скінченного порядку відсутні.

Список літератури: I. Алиев Ф.С. О решениях некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций. - Вестн.Москов. ун-та, сер. матем., механ., 1975,II, № 6. 2. Винер И.Я. Решение линейных систем в обобщенных функциях. - Дифференциальные уравнения, 1975, т.II, № 6. 3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958. 4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971.

ЗМІСТ

УДК 517.512

Равенство Парсеваля и теорема Фишера-Рисса для почти ортогональных рядов. Г у к е в и ч В.И. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 14. Математический анализ и его приложение, Львов, "Вища школа", изд-во при Львов.ун-те, 1979, с. 3-8 /на укр.яз./.

На основе использования принципа "неподвижной точки" доказывается, что для почти ортогональных по Беллману систем функций имеет место равенство типа Парсеваля, а также теорема Фишера-Рисса. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.512

О распределении положительных и отрицательных значений функций полной почти ортогональной системы. Г у к е в и ч В.И. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 9-12 /на укр.яз./.

Доказывается теорема: если $\{\varphi_n(x)\}$ - полная почти ортогональная по Беллману система функций,

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & \text{когда } \varphi_n(x)>0\\ 0, & \text{когда } \varphi_n(x)<0,\end{cases}$$

$\varphi_n^-(x)=\varphi_n(x)-\varphi_n^+(x)$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^-(x)]^2$ расходятся почти всюду.

Результат является обобщением известной теоремы В.Я.Козлова для ортонормированных полных систем на системы почти ортогональные по Беллману.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.535.4

О регулярном росте мероморфных функций с положительными нулями и отрицательными полюсами. Гольдберг А.А., Фридман А.Н. – "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.13-18 /на укр.яз./.

Показано существование мероморфных функций порядка ρ, $0<\rho<1$, с положительными нулями и отрицательными полюсами таких, что $T(r,f)\sim\Delta r^{\rho}$, $r\to\infty$, $0<\Delta<\infty$, у которых обе функции $N(r,0,f)$ и $N(r,\infty,f)$ имеют порядок ρ и произвольный нижний порядок ε, $0\leq\varepsilon<\rho$. Тем самым опровергнута одна гипотеза А.Бернштейна /1969 г./.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513.88

О возмущении краевого оператора. Лянце В.Э., Сторож О.Г. – "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.18-21 /на укр.яз./.

Введено понятие краевого оператора. Доказано, что при определенных условиях конечномерное и малое по норме возмущение нормального разрешимого краевого оператора являются нормально разрешимыми краевыми операторами.

Список лит.: 2 назв.

УДК 517.521.7

О задаче Абеля-Гончарова для целых функций, заданных лакунарными степенными рядами. Скаскив А.Б., Шеремета М.М. – "Бестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.21-28 /на укр.яз./.

Доказывается одна теорема о разложимости целой функции, заданной лакунарным степенным рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{\lambda_n}$ с условием на лакуны $\sum_{n=0}^{\infty}(1/\lambda_n)<\infty$ в интерполяционный ряд Абеля-Гончарова.

Список лит.: 5 назв.

УДК 517.535.4

Рациональная аппроксимация на $[0,1]$ целых функций произвольного роста. Иванюк М.В., Шеремета М.М. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.24-29. /на укр. яз./.

Исследуется рациональная аппроксимация на $[0,1]$ целых функций конечных обобщенных порядков с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами.
Список лит.: 8 назв.

УДК 517.521.6

Асимптотические свойства целых функций, заданных рядами Дирихле. Хомяк М.М. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.29-31 /на укр.яз./.

Для целой функции f, представленной рядом Дирихле $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^z$, удовлетворяющей условию $M(x)\sup\{|f(x+iy)|: |y|<\infty\} \leq Ax^{\rho}$, $1<\rho<\infty, 0<A<\infty$, даются оценки $M(x)$ через максимальный член и центральный индекс этого ряда.

УДК 517.5

О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$. Винницкий Б.В. - "Вестник Львов.ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.31-33 /на укр.яз./.

Указаны условия, при которых некоторые целые функции можно представить во всей плоскости рядом $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$.

УДК 517.518.6

Условия принадлежности почти периодических функций обобщенным классам Липшица и Зигмунда. Притула Я.Г., Сютрик И.С. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.33-37 /на укр.яз./.

Для равномерных почти периодических функций получены условия принадлежности их обобщенным классам Липшица и Зигмунда.
Список лит.: 3 назв.

УДК 539.3

Осесимметричный изгиб круглой пластинки гладким штампом. Хлебников Д.Г., Паращак А.М. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, I979, с.37-43 /на укр.яз./.

Решена осесимметричная задача об изгибе свободно опертой пластинки штампом. Для расчета пластинки используется теория А.И.Лурье. С помощью операторного метода для контактного давления получено дифференциальное уравнение бесконечно высокого порядка. Рассмотрено приближенное уравнение, на основе которого дано решение, свободное от физических несоответствий.
Ил.3. Список лит.:9 назв.

УДК 5I7.5I2

Некоторые свойства функций, имеющих ограниченную вторую вариацию. Михалюк М.И. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, I979, с.43-45 /на укр.яз./.

Рассматриваются некоторые свойства действительных функций, имеющих ограниченную вторую вариацию. Результаты могут быть использованы в теории тригонометрических рядов.
Список лит.:2 назв.

УДК 5I7.9I3

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения пятого порядка, интегрируемые в замкнутой форме. Жерновой Ю.В., Костенко В.Г. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, I979, с.45-48 /на укр.яз./.

Выделена совокупность линейных обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка, интегрируемых в замкнутой форме, и показана схема определения фундаментальной системы их решений.
Список лит.: 2 назв.

УДК 517.913

Асимптотические свойства решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Костенко К.С.- "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 48-51 /на укр.яз./.

Найдены достаточные условия, при которых все решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка будут ограниченными при $x \to \infty$.

Список лит.: 2 назв.

УДК 517.913

Асимптотика решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Карпа М.П. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.52-56 /на укр.яз./

Найдена для линейного обыкновенного уравнения третьего порядка асимптотика решения задачи Коши для случая, когда система решения для этого уравнения ограничена на бесконечности.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.946

Асимптотика решения смешанной задачи для уравнения шестого порядка с малым параметром при старшей производной. Цимбал В.М. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов.ун-те, 1979, с.56-59 /на укр.яз./.

Методом М.И.Вишика - Л.А.Люстерника построено асимптотическое разложение решения смешанной задачи для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = f(x,t)$ по степеням малого параметра ε.

Список лит.: 2 назв.

УДК 517.946

Задача Гурса для гиперболического уравнения второго порядка с малым параметром. Цимбал В.М. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.60-62 /на укр.яз./.

Рассмотрена задача Гурса для гиперболического уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Выделен случай, когда можно применить метод М.И.Вишика - Л.А.Люстерника, и построено асимптотическое разложение решения задачи по степеням малого параметра. Погранслой описывается гиперболическим уравнением. Показано, что в некоторых случаях погранслоя не возникает.
Список лит.: 3 назв.

УДК 517.946

Краевые задачи для одного эллиптического уравнения с параметром, вырождающегося на границе области. Парасюк Л.С., Парасюк Е.Н. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.62-65 /на укр.яз./.

Методом интегральных преобразований решается первая краевая задача для одного эллиптического уравнения второго порядка с переменными, вырождающегося на границе области.
Список лит.: 2 назв.

УДК 517.917

Об устойчивости в целом одной системы * уравнений. Лавренюк С.П. - "Вестник Львов ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.66-69 /на укр.яз./.

Рассмотрена одна нелинейная система * дифференциальных уравнений. Для этой системы получены достаточные условия устойчивости в целом нулевого решения. При доказательстве используются дифференциальные неравенства.
Список лит.: 2 назв.

УДК 5I7.944

О некоторых эллиптических уравнениях высших порядков. Шипка И.Г.– "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, I979, с.69-70/на укр.яз./.

Рассматривается эллиптическое уравнение четвертого порядка. Выводятся формулы типа формул Грина и интегрального представления решения.
Список лит.: 2 назв.

УДК 5I2.4

Расщепляемость и описание радикалов в абелевых группах. Горбачук Е.Л., Юрчишин Р.И. – "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение..Львов, "Вища школе", изд-во при Львов. ун-те, I979,с.7I-75 /на укр.яз./.

Изучаются радикалы в абелевых группах. Устанавливается, что все абелевы группы без периодических элементов ранга 1 ведут себя тривиально относительно всякого радикала. Доказывается, что на группах ранга 2 такой тривиальности уже нет. Приводится также достаточный критерий нерасщепляемости радикалов.
Список лит.: 5 назв.

УДК 5I3.I93

Задачи на построение и расширение полей. Горбачук Е.Л., Онищук В.А. – "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.I4. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, I979, с.75-78 /на укр.яз./.

Исследуются возможности построения правильных многоугольников с простым числом сторон с помощью совокупности p -секторов /$p > 2$ / и линейки. Доказывается теорема, что не существует конечного колличества p_i -секторов /$p_i > 2, i = 1,2,\dots,s$ /, с помощью которых и линейки можна было бы построить все правильные многоугольники.
Список лит.: 7 назв.

УДК 517.9

О построении общего решения некоторых систем дифференциальных уравнений. Старокадомский Л.А. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.78-83 /на укр. яз./.

Для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными $\|B\|u = 0$ предлагается метод построения общего A -решения, то есть такого представления $u = \|A\|b$, которое было бы общим решением $\|B\|u = 0$, если b есть общее решение некоторой данной системы $\|M\|\cdot b = 0$. Метод описывается на примере уравнений Ляме путем построения в общем виде матрицы $\|A\|$,элементы которой линейно зависят от координат и операторов дифференцирования по ним, а элементы столбца b есть гармонические функции. Известное решение Папковича, например, содержится в построенном A -решении как частный случай.

Список лит.: 2 назв.

УДК 517.917

Полнота пространства S^p- почти периодических матриц. Ковальчук Б.В., Середа Я.М. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов.ун-те, 1979, с.83-88 /на укр.яз./.

Исследуется пространство S^p - почти периодических матриц. Доказа полнота пространства.

Список лит.: 3 назв.

УДК 519.21

О классе положительных случайных переменных, имеющих только расщепляемые факторы. Квит И.Д., Косарчин В.Н. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат", вып. 14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.88-90 /на укр.яз./.

Показано, что произведение импульса логарифмически нормальной и логарифмически пуассоновской случайных величин принадлежит к классу случайных величин, имеющих только расщепляемые факторы.

Список лит.: 3 назв.

УДК 517.512

Критерий абсолютной сходимости обобщенных рядов Фурье в терминах свертки. Мишковец У.А. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.91-93 /на укр.яз./.

Доказывается теорема: ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_R(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$$

почти периодической функции $R(x)$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда $R(x)$ может быть представлена в виде свертки

$$R(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)\overline{g(t)}\, dt,$$

где $f(t) \in Q^2$-п.п., $g(t) \in Q^2$-п.п.

Доказанная теорема обобщает известную теорему М.Рисса для чисто периодического случая.

Список лит.: 3 назв.

УДК 517.942+534.014.5

Решение уравнения для одного типа ангармонического осцилятора. Тацуняк П.Н. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.93-99 /на укр.яз./.

Решается уравнение для простой модели ангармонического осцилятора, движущая сила которого состоит из суммы двух упругих сил, из них первая определена на всем интервале, а вторая включается на некотором расстоянии от положения равновесия. Решение выражается в элементарных функциях и может рассматриваться как асимптотика для более сложного жесткого ангармоничного осцилятора.

Ил.3. Список.лит.: 3 назв.

УДК 517.948

Некоторые свойства решений обратной задачи логарифмического потенциала с переменной плотностью. Михалюк М.И., Парасюк Е.Н. - "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.99-101/на укр.яз./.

Рассматривается обратная задача логарифмического потенциала с переменной плотностью и доказываются некоторые локальные свойства ее решений.

Список лит.: 2 назв.

УДК 517.926

Исследование некоторых дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций. Пустомельников И.П. – "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.102-107 /на укр.яз./.

Применительно к уравнениям

$$t\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0,$$

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+tp(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$$

в статье разработаны методы нахождения их решений в классе распределений с точечным носителем

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m}x_k\delta^{(k)}(t).$$

Список лит.: 6 назв.

УДК 517.926

Существование решений линейных дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций. Пустомельников И.П. – "Вестник Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып.14. Математический анализ и его приложение. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с.107-113 /на укр.яз./.

В работе изложена методика нахождения решений вида конечной линейной комбинации дельта-функции и ее производных линейных систем дифференциальных уравнений. Установленный признак существования сводится к разрешимости некоторой системы матричных уравнений и позволяет вычислить искомое решение.

Список лит.: 4 назв.

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Вестник Львовского университета

Выпуск I4

Серия механико-математическая

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО
ПРИЛОЖЕНИЕ
/На украинском языке/

Львов
Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа"

Редактор В.В.Войтович
Художній редактор І.С.Куючко
Технічний редактор Т.М.Веселовський
Коректор Т.Т.Козак

Інформ.бланк 4059

Підп. до друку 17.01.79. БГ II015. Формат 60x90/16. Папір друк. № 3.

8 умовн. друк.арк. 5,4 обл.-вид.арк. Тираж 600 прим. Вид. № 572.

Зам. 4109. Ціна 65 коп.

Видавництво при Львівському державному університеті видавничого

об"єднання "Вища школа". 290000, Львів, вул.Університетська, I.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління в справах

видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі. 290000, Львів,

вул.Стефаника, II.

65 коп.

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, 1979, вип. 14, 1—127.