УДК 518.12:517.55

А.І.Кардаш, О.М.Костовський, І.І.Чулик

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІАГРАМИ НЬЮТОНА ПОДВІЙНОГО РЯДУ ЛОРАНА

Нехай задано ряд Лорана

$$f(z,w)=\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} a_{kl} z^k w^l, \ a_{00}\neq 0, \qquad /1/$$

який збігається у бікруговій області D. Позначимо через E_f множину точок площини $\mu\nu$ з цілочисельними координатами k, l, для яких $a_{kl}\neq 0$, а через Q_f – опуклу оболонку множини E_f. Для кожної точки $(k,l)\in E_f$ побудуємо в евклідовому просторі змінних μ, ν, λ точку $P_{kl}(k,l,-\ln|a_{kl}|)$. Множину всіх точок P_{kl} запишемо як Φ_0, а опуклу оболонку множини Φ_0 як Φ_f. Нехай $\varkappa(\mu,\nu)=\inf\limits_{(\mu,\nu,\lambda)\in\Phi_f}\lambda$, тоді поверхню, яка описується рівнянням

$$\lambda=\varkappa(\mu,\nu), \ (\mu,\nu)\in\bar{Q}_f, \qquad /2/$$

назвемо діаграмою Ньютона ϑ_f ряду /1/. Функція $\varkappa(\mu,\nu)$ опукла на множині $\bar{Q}_f$. Якщо $A(\mu_1,\nu_1)$, $B(\mu_2,\nu_2)$ – дві довільні точки множини $\bar{Q}_f$, то для будь-якої точки $C(\mu,\nu)$ відрізка AB виконується нерівність

$$(\nu_2-\nu_1)\varkappa(\mu,\nu)\leq(\nu_2-\nu)\varkappa(\mu_1,\nu_1)+(\nu-\nu_1)\varkappa(\mu_2,\nu_2); \qquad /3/$$

при цьому $\nu_2>\nu_1$.

Введемо функцію $T(\mu,\nu)=\exp[-\varkappa(\mu,\nu)]$, визначену і неперервну на $\bar{Q}_f$. Ряд

$$\mathfrak{M}_f(z,w)=\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} T_{kl} z^k w^l, \qquad /4/$$

де $T_{kl}=T(k,l)$, назвемо мажорантою Ньютона ряду /1/.

Нехай R_1, R_2 – максимальні, а r_1, r_2 – мінімальні радіуси збіжності ряду /1/ по z і w відповідно.

Теорема I. Якщо максимальні та мінімальні радіуси збіжності ряду /1/ задовольняють умови

$$0 < r_1 < R_1 < \infty , \quad 0 < r_2 < R_2 < \infty , \qquad /5/$$

то для всіх a і b, де $|a| + |b| = 1$, існує скінченна границя

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varkappa(at, bt)}{t} = F(a, b) . \qquad /6/$$

Доведення. Як відомо [2],

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\varkappa(k,0)}{k} = \ln R_1 , \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{\varkappa(-k,0)}{k} = -\ln r_1 ,$$

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{\varkappa(0,l)}{l} = \ln R_2 , \quad \lim_{l \to +\infty} \frac{\varkappa(0,-l)}{l} = -\ln r_2 ,$$

тобто $F(1,0)$, $F(-1,0)$, $F(0,1)$, $F(0,-1)$ існують і скінченні. Нехай

$$c = \max\{F(1,0), F(-1,0), F(0,1), F(0,-1)\},$$

при цьому $c > 0$. Тоді для всіх $t > 0$

$$\frac{\varkappa(at, bt)}{t} \leq c . \qquad /7/$$

із /7/ випливає існування скінченної границі /6/. Розглянемо сім"ю площин вигляду

$$\begin{aligned} \mu &= at, \\ \nu &= bt , \quad |a| + |b| = 1 , \quad t > 0, \end{aligned} \qquad /8/$$

а також сім"ю поверхонь

$$\lambda = (|\mu| + |\nu|) F(a, b) , \quad |a| + |b| = 1 . \qquad /9/$$

Виключаючи параметри a, b, t, отримуємо у просторі $\mu \nu \lambda$ конічну поверхню з вершиною в початку координат, рівняння якої має вигляд

$$\lambda = F(\mu, \nu) . \qquad /10/$$

Нехай $A(\mu_1, \nu_1)$ і $B(\mu_2, \nu_2)$ – дві довільні точки, причому $\nu_2 > \nu_1$.

Розглянемо довільну точку $C(\mu, \nu)$, яка лежить на відрізку AB. Використовуючи /3/ і /6/, одержуємо нерівність

$$(\nu_2 - \nu_1) F(\mu, \nu) \leq (\nu_2 - \nu) F(\mu_1, \nu_1) + (\nu - \nu_1) F(\mu_2, \nu_2),$$

тобто функція $F(\mu, \nu)$ – опукла. Враховуючи, що $a = a(b)$, позначимо $F(a(b), b) = \chi(b)$, де $\chi(b)$ – двозначна функція, визначена на проміжку $[-1, 1]$. На проміжку $[0, 1]$ функція $\chi(b)$ набуває значення

$$\chi_1(b) = F(1-b, b), \quad \chi_2(b) = F(b-1, b),$$

а на проміжку $[-1, 0]$ – відповідно

$$\chi_3(b) = F(-1-b, b), \quad \chi_4(b) = F(1+b, b).$$

Функції $\chi_1(b)$ і $\chi_4(b)$ та відповідно функції $\chi_2(b)$ і $\chi_3(b)$, які збігаються при $b = 0$, є однозначними вітками кривої $\lambda = \chi(b)$ при зміні b на проміжку $[-1, 1]$. Функції $\chi_1(b)$, $\chi_2(b)$ опуклі на $[0, 1]$ і набувають рівних значень при $b = 1$. Звідси випливає їх неперервність і диференційовність майже всюди на $(0, 1)$ та існування скінченних лівої і правої похідних у кожній точці інтервалу $(0, 1)$. Неважко переконатись, що на кінцях проміжка $[0, 1]$ має місце одностороння неперервність, а при виконанні умов /5/ на кінцях проміжка $[0, 1]$ існують скінченні ліва та права похідні цих функцій. Аналогічні властивості мають функції $\chi_3(b)$ і $\chi_4(b)$, які набувають рівних значень при $b = -1$.

Зі сказаного випливає також неперервність функції $F(\mu, \nu)$ за сукупністю змінних μ і ν. Частинні похідні функції $F(\mu, \nu)$ є функціями відношень

$$\frac{\mu}{|\mu| + |\nu|}, \quad \frac{\nu}{|\mu| + |\nu|}.$$

При цьому

$$\left(\frac{\partial F(\mu,\nu)}{\partial \mu}\right)_{\substack{\mu=\alpha(\theta)t\\ \nu=\theta t}} = \operatorname{sign} \alpha(\theta)\left[\chi(\theta)-\theta\chi'(\theta)\right], \qquad /11/$$

$$\left(\frac{\partial F(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right)_{\substack{\mu=\alpha(\theta)t\\ \nu=\theta t}} = \operatorname{sign} \theta\left[\chi(\theta)-\theta\chi'(\theta)\right]+\chi'(\theta), \qquad /12/$$

де $\chi'(\theta)=\dfrac{d\chi}{d\theta}$.

Позначимо через $\mathcal{V}_{k_f}$ поверхню /10/, яка є асимптотичним конусом діаграми $\mathcal{V}_f$.

<u>Теорема 2.</u> Поверхня $\mathcal{V}_{k_f}$ є діаграмою Ньютона ряду

$$\mathfrak{M}_{k_f}(z,w)=\sum_{k,l=-\infty}^{\infty}\exp\left[-F(k,l)\right] z^k w^l. \qquad /13/$$

Легко побачити, що мажоранта Ньютона ряду /13/ є цей же ряд.

Ряд /13/ назвемо асимптотичною мажорантою Ньютона подвійного ряду Лорана /1/.

Відзначимо, що при виконанні умов /5/ функція $F(\mu,\nu)$ визначена на всій площині $\mu\nu$. У загальному ж випадку функція $F(\mu,\nu)$ визначена на множині Q_{k_f}, яка є проекцією поверхні $\mathcal{V}_{k_f}$ на площину $\mu\nu$.

Доведені вище теореми є узагальненням результатів, одержаних у роботі /1/.

У випадку ряду Лорана часом зручніше замість параметра θ ввести параметр $\Theta\in[0, 2\pi]$.

<u>Теорема 3.</u> Якщо виконуються умови /5/, то для всіх $\Theta\in[0,2\pi]$ існує скінченна границя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varkappa(t\cos\Theta, t\sin\Theta)}{t}=\Phi(\Theta).$$

При цьому функція $\Phi(\theta)$ – тригонометрично опукла, тобто диференційована майже всюди на $[0, 2\pi]$ і для кожного $\theta \in [0, 2\pi]$ існують скінченні ліва та права похідні функції.

Розглянемо сім"ю площин вигляду

$$\mu = t \cos \theta, \quad \nu = t \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

і сім"ю поверхонь

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\ \Phi(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Після вилучення параметра θ отримаємо рівняння асимптотичного конуса /10/. При цьому для всіх θ, для яких $\Phi(\theta)$ диференційовна

$$\left(\frac{\partial F(\mu,\nu)}{\partial \mu}\right)_{\substack{\mu = t\cos\theta \\ \nu = t\sin\theta}} = \cos\theta\,\Phi(\theta) - \sin\theta\,\Phi'(\theta),$$

$$\left(\frac{\partial F(\mu,\nu)}{\partial \nu}\right)_{\substack{\mu = t\cos\theta \\ \nu = t\sin\theta}} = \sin\theta\,\Phi(\theta) + \cos\theta\,\Phi'(\theta).$$

Список літератури: 1. Кардаш А.І., Чулик І.І. Дослідження граничних властивостей мажоранти та діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних. – ДАН УРСР, серія А, 1972, № 4. 2. Костовський А.Н. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во при Львов. ун-те, 1967.