УДК 518.12:517.55

А.І.Кардаш, О.М.Костовський, І.І.Чулик

ПРО ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ПОДВІЙНОГО РЯДУ ЛОРАНА
І ЙОГО АСИМПТОТИЧНОЇ МАЖОРАНТИ НЬЮТОНА

Нехай задано ряд Лорана

$$f(z,w)=\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} a_{kl} z^k w^l, \quad a_{00}\neq 0, \qquad /1/$$

збіжний у біКруговій області D. У праці [4] розглянуто поняття діаграми Ньютона $\mathcal{V}_f$ і мажоранти Ньютона $\mathcal{M}_f(z,w)$ ряду /1/ та досліджено їх асимптотичні властивості.

Позначимо через R_1, R_2 – максимальні, а через r_1, r_2 – мінімальні радіуси збіжності ряду /1/ по z і w відповідно та припустимо, що виконуються умови

$$0<r_1<R_1<\infty, \quad 0<r_2<R_2<\infty. \qquad /2/$$

Тоді на проміжку $[0, 2\pi]$ визначена функція $\Phi(\theta)$, асимптотичний конус $\mathcal{V}_{k_f}$ діаграми $\mathcal{V}_f$ та асимптотична мажоранта Ньютона ряду /1/ [4].

Позначимо через M множину всіх точок проміжку $[0, 2\pi]$, а через m – множину точок розриву похідної $\Phi'(\theta)$.

Кожному $\theta\in M\setminus m$ поставимо у відповідність точку з координатами

$$\begin{aligned} x&=\exp[\cos\theta\,\Phi(\theta)-\sin\theta\,\Phi'(\theta)],\\ y&=\exp[\sin\theta\,\Phi(\theta)+\cos\theta\,\Phi'(\theta)], \end{aligned} \qquad /3/$$

а кожному $\theta\in m$ – множину точок, що лежать на кривій

$$x^{\cos\theta}y^{\sin\theta}=\exp[\Phi(\theta)], \qquad /4/$$

де

$$\exp[\cos\theta\,\Phi(\theta)-\sin\theta\,\Phi'(\theta+0)]\leq x\leq \exp[\cos\theta\,\Phi(\theta)-\sin\theta\,\Phi'(\theta-0)],$$
$$\exp[\sin\theta\,\Phi(\theta)+\cos\theta\,\Phi'(\theta-0)]\leq y\leq \exp[\sin\theta\,\Phi(\theta)+\cos\theta\,\Phi'(\theta-0)].$$

Рівняння /3/, /4/ визначають криву

$$\Psi(x, y) = 0, \qquad /5/$$

яка має такі властивості:

Теорема I. Числа x, y, які задовольняють рівняння /3/, /4/, є спряженими радіусами збіжності ряду /I/.

Множина спряжених радіусів збіжності ряду /I/ вичерпується точками, що лежать на кривій /5/, і тому правильна.

Теорема 2. Якщо ряд Лорана /I/ збіжний у бікруговій області D, то крива /5/ є границею області D_+ на діаграмі Рейнкарта.

Теорема 3. Області збіжності подвійного ряду Лорана /I/, його мажоранти й асимптотичної мажоранти Ньютона збігаються.

Відзначимо, що сформульовані вище результати правильні і при відсутності обмеження /2/, яке накладене для зручності викладу, та відіграє ту ж роль, що й обмеженість повної бікругової області збіжності у випадку подвійних рядів Тейлора [2,3].

Області збіжності рядів Лорана логарифмічно опуклі. Відома теорема Гартогса про логарифмічну опуклість області збіжності ряду Тейлора узагальнена на ряди Лорана Н.Б.Енгібаряном /I/. Оскільки ми границю області збіжності ряду Лорана /I/ записуємо в аналітичному вигляді, то неважко переконатись, що з формул /3/, /4/ випливає логарифмічна випуклість кривої /5/, її диференційовність майже всюди та існування не більш ніж зчисленної множини кутових точок. При виконанні умов /2/ крива за формулою /5/ замкнута. У протилежному випадку крива з /5/ може не бути замкнутою і мати спільні точки з координатними осями, що безпосередньо пов"язане з архітектурою асимптотичного конуса діаграми Ньютона ряду /I/. Зупинимось докладніше на можливих випадках.

2

I. Функція $F(\mu,\nu)$ визначена для всіх μ, ν, а $\vartheta_{\varkappa_f}$ – випуклий конус, який не містить прямої. Тоді крива з /5/ замкнута і не має спільних точок з координатними осями ox та oy.

2. Функція $F(\mu,\nu)$ визначена на множині

$$a\mu + b\nu \geq 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

або її частині, що містить область $\mu \geq 0, \ \nu \geq 0$:

а/ якщо $a > 0$, $b > 0$, то крива з /5/ замкнута і має одну спільну точку з ox і oy – початок координат;

б/ якщо $a > 0$; $b = 0$ /або $a = 0, b > 0$ /, то крива з /5/ замкнута і містить відрізок осі oy /відповідно ox /, виключаючи початок координат;

в/ функція $F(\mu,\nu)$ визначена на множині $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$. Тоді крива з /5/ замкнута і включає відрізки координатних осей.

3. Функція $F(\mu,\nu)$ визначена на множині

$$a\mu + b\nu \leq 0, \ a \geq 0, \ b \leq 0$$

або її частині:

а/ якщо $a > 0$, $b > 0$, то рівняння /5/ визначає необмежену область. Вітки кривої з /5/, які відповідають твірним асимптотичного конуса $\vartheta_{\varkappa_f}$, що проектуються на пряму $a\mu + b\nu = 0$, прямують у безмежність при зростанні x;

б/ якщо $a > 0$, $b = 0$ /або $a = 0$, $b > 0$ /, то область збіжності, яка визначається рівнянням /5/, необмежена і має вигляд горизонтальної /відповідно вертикальної/ смуги, обмеженої зліва /відповідно знизу/ кривою з /5/.

4. Функція $F(\mu,\nu)$ визначена на множині $a\mu - b\nu \leq 0$, $a > 0$, $b > 0$ або її частині. При цьому область збіжності, що визначається рівнянням /5/, є горизонтальною /вертикальною при $a < 0$, $b < 0$ / нескінченною криволінійною смугою. При цьому твірним

асимптотичного конуса $v_{\Re_f}$, які проектуються на пряму $a\mu - b\nu = 0$, відповідають криві вигляду з /5/, що асимптотично наближаються до осі ox /відповідно – осі oy /.

5. Функція $F(\mu, \nu)$ визначена на множині

$$a_1\mu - b_1\nu \geq 0 \ , \quad a_1 > 0 \ , \ b_1 > 0 \ ,$$

$$a_2\mu + b_2\nu \geq 0 \ , \quad a_2 > 0 \ , \ b_2 \geq 0 .$$

При цьому область, яка визначається кривою з /5/, необмежена. Складовими частинами цієї кривої є криві вигляду з /5/ і координатні осі, до яких ці криві асимптотично прямують.

Приклад. Задано ряд Лорана

$$f(z, w) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} exp\left[-\sqrt{k^2+l^2}\right] z^k w^l \ . \qquad /6/$$

Крива спряжених радіусів збіжності ряду /6/ має вигляд

$$ln^2 x + ln^2 y = 1 .$$

Отже, одержано результати, які можуть бути використані для визначення кривої спряжених радіусів збіжності та дослідження її властивостей.

С п и с о к л і т е р а т у р и : І. Е н г и б а р я н Н.Б. Области сходимости рядов Лорана. – Известия АН Арм.ССР. Математика, 1967, т.2, № 6. 2. К а р д а ш А.І., Ч у л и к І.І. Дослідження граничних властивостей мажоранти та діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних. – ДАН УРСР, серія А, 1972, №4. 3. К а р д а ш А.І., Ч у л и к І.І. Дослідження області збіжності степеневих рядів функцій двох комплексних змінних.– ДАН УРСР, серія А, 1972, № 5. 4. К а р д а ш А.І., К о с т о в с ь к и й О.М., Ч у л и к І.І. Асимптотичні властивості діаграми Ньютона подвійного ряду Лорана. У цьому ж Віснику.