УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ПРО РОЗВ"ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У МНОГОЗВ"ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

У тривимірному евклідовому просторі розглянемо область D, обмежену скінченним числом замкнених поверхонь типу Ляпунова, які не перетинаються між собою. А саме, позначимо через $S=\bigcup_{k=0}^{n} S_k$ скінченну сукупність замкнених поверхонь S_k. Припустимо для простоти, що поверхня S_0 містить у собі всі поверхні S_k $(k=\overline{1,n})$, які не містяться одна в одній. Позначимо через D_0 внутрішність поверхні S_0, а через D_k – зовнішність поверхні S_k $(k=\overline{1,n})$. Нехай в області D задана еліптична система диференціальних рівнянь другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\equiv\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{3}A_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+A(x)u(x)=0, \qquad /1/$$

де $A_{ij}(x)=A'_{ji}(x)$, $A(x)=A'(x)$ /штрих означає транспонування/. Припустимо, що коефіцієнти $A_{ij}(x)$ задовольняють умову /1/

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\tilde{A}_{ij}\nu_i\tau_j=Re\{[\int A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta]^{-1}\int\beta A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\nu_i\nu_j, \qquad /2/$$

де $\tilde{A}_{ij}+\tilde{A}_{ji}=2A_{ij}$, $\tilde{A}_{ij}=\tilde{A}'_{ji}$, ν і τ – одиничні вектори; $(\tau,\nu)=0$, $\int(\dots)d\beta$ означає інтегрування по простому додатно орієнтованому замкненому контурі, що охоплює β –корені рівняння $\det A_0(\beta\nu+\tau)=0$ з додатними уявними частинами,

$$A_0(\alpha)=\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\alpha_i\alpha_j, \quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3).$$

Якщо систему /I/ зобразимо у вигляді

$$A(x,\frac{\partial}{\partial x})u(x) = A_0(x,\frac{\partial}{\partial x})u(x) + A_1(x,\frac{\partial}{\partial x})u(x) = 0,$$

де $A_0(x,\frac{\partial}{\partial x})$ – однорідний оператор другого порядку; $A_1(x,\frac{\partial}{\partial x})$ – оператор, який має всі інші похідні, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$, то припустимо, що коефіцієнти оператора $A_0(x,\frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовні три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j $/j=0;1/$ в операторі $A_1(x,\frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовні j разів у E_3; причому коефіцієнти оператора $A_0(x,\frac{\partial}{\partial x})$ будуть порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1(x,\frac{\partial}{\partial x})$ та їх похідні до другого порядку ростуть не швидше, ніж $F(x)$ при $|x|\to\infty$, це $F(x)$ – така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint\limits_{\infty}\frac{dx}{F(x)} < \infty \text{ і } \frac{|\det(A_0(x,2\pi i\alpha) - \lambda^2 I)|}{[F(x)]^p\,|\alpha|^{2p} + \lambda^{2p}} \geq \mu > 0$$

для кожної точки $x\in E_3$ і для кожної дійсної точки $(\lambda,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq 0$; λ – достатньо велике додатне число.

У цьому випадку існує фундаментальна матриця системи /I/ у всьому просторі [2], яку позначимо через $\omega(x,y)$, а у кожній із областей $D_0,\dots,D_n$ існує матриця Гріна, яка має тільки точкову особливість. Існування матриці Гріна для областей D_k $/k=\overline{0,n}/$ випливає з існування розв"язку задачі Діріхле для цих областей [1].

Теорема. Будь-який розв"язок системи /I/, неперервний та обмежений в області D і на її межі, зображується єдиним способом у вигляді суми розв"язків цієї системи в однозв"язних областях $D_0,\dots,D_n$, причому в необмежених областях $D_1,\dots,D_n$ відповідні розв"язки системи /I/ регулярні на безмежності.

Відзначимо, що такий розклад розв"язку системи /I/ випливає з інтегрального зображення розв"язків системи /I/ в D через узагальнені потенціали простого та подвійного шару, ядра яких внаслідок умови /2/ мають у цьому випадку тільки точкову особливість

$$u(x)=\sum_{K=0}^{n}\iint_{S_K}\left\{\omega'(x,y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)-\left[u'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(x,y)\right]'\right\}d_y S, \qquad /3/$$

де

$$B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)=-2\left[\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}(y)\nu_i(y)\frac{\partial}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{3}A_i'(y)\,\nu_i(y)\right]; \qquad /4/$$

$\nu(y)=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – орт внутрішньої нормалі до $S\bigcup\limits_{i=0}^{n}S_i$.

Таким чином,

$$u(x)=\sum_{K=0}^{n}V_K(x), \qquad /5/$$

де

$$V_K(x)=\iint_{S_K}\left\{\omega'(x,y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)-\left[u'(y)\,B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(x,y)\right]'\right\}d_y S \quad (K=\overline{0,n}) \qquad /6/$$

є розв"язок системи /I/ в D_K /$K=\overline{0,n}$/.

Єдиність стверджуваного у теоремі зображення розв"язку системи /I/ доведемо від супротивного. Припустимо існування двох зображень одного й того ж розв"язку $u(x)$ системи /I/

$$u(x)=\sum_{K=0}^{n}V_K^{(1)}(x)=\sum_{K=0}^{n}V_K^{(2)}(x),$$

де $V_K^j(x)$ $(j=1;2)$ – розв"язки системи /I/ в D_K $(K=\overline{0,n})$. Тоді, приймаючи $V_K^{(1)}-V_K^{(2)}=\bar V_K$, маємо в D таку рівність

$$\sum_{K=0}^{n}\bar V_K(x)=0,$$

яку можна зобразити у вигляді

$$\bar V_0(x)=-\sum_{K=1}^{n}\bar V_K(x). \qquad /7/$$

Із рівності /7/ випливає, що вектор-функція $\bar{V}_0(x)$, визначена раніше як розв"язок системи /I/ в D_0, є регулярним розв"язком /I/ у всьому просторі, оскільки $\bar{V}_\kappa(x)$ $(\kappa=\overline{1,n})$ визначені зовні D_0.

Скористаємося тепер теоремою Ліувілля, доведеною Д.П.Мельник [2]. Якщо $2s$ раз неперервно диференційований розв"язок еліптичної системи, що задовольняє умови теореми існування /класичної/ фундаментальної матриці, порядку $O(|x|^\kappa)$ при $|x|\to\infty$, то воно являє собою тотожний нуль /тут κ – будь-яке ціле число/.

Оскільки система /I/ і $\bar{V}_\kappa(x)$ $(\kappa=\overline{1,n})$ задовольняють умови цієї теореми, то із виразу $\bar{V}_0(x)$, що є регулярним розв"язком системи /I/ у всьому тривимірному просторі, випливає його тотожна рівність нулеві $\bar{V}_0(x)\equiv 0$. Аналогічно доводиться, що $\bar{V}_\kappa(x)\equiv 0$ $(\kappa=\overline{1,n})$. Таким чином,

$$V_\kappa^{(1)}(x)\equiv V_\kappa^{(2)}(x) \quad (\kappa=\overline{0,n}).$$

Доведена теорема обгрунтовує наступний метод розв"язування задачі Діріхле для системи /I/ в області D. Позначимо через $f_\kappa(x)$ межове значення шуканого розв"язку системи /I/ на поверхні S_κ, а через $G_\kappa(x,y)$ – матрицю Гріна системи /I/ для області D_κ $(\kappa=\overline{0,n})$. Зобразимо розв"язок задачі

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0 \quad (x\in D), \qquad /8/$$

$$u(x)\Big|_{S_\kappa}=f_\kappa(x) \quad (\kappa=\overline{0,n}) \qquad /9/$$

у вигляді

$$u(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\iint_{S_\kappa}u_\kappa(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_\kappa(x,y)\,d_yS, \qquad /10/$$

де $B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ визначено формулою /4/; $u_\kappa(y)$ – невідомі густини, для знаходження яких одержимо таку систему інтегральних рівнянь:

$$u_\ell(x)+\sum_{\kappa+\ell=0}^{n}\iint_{S_\kappa}u_\kappa(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_\kappa(x,y)\,d_yS=f_\ell(x) \quad (\ell=\overline{0,n}). \qquad /11/$$

Систему регулярних інтегральних рівнянь /11/ можна розв"язати за першою теоремою Фредгольма. Для доведення цього розглянемо відповідну однорідну систему і позначимо через $u^{0}_{\kappa}(x)$ її розв"язок

$$u^{0}_{l}(x)+\sum_{\kappa\neq l=0}^{n}\iint_{S_\kappa} u^{0}_{\kappa}(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_{\kappa}(x,y)\,d_yS=0\,. \qquad /12/$$

Нехай $V^{0}_{\kappa}(x)$ – розв"язок системи /1/ в області D_κ, який набуває на S_κ значення $u^{0}_{\kappa}(x)$, тобто

$$V^{0}_{\kappa}(x)=\iint_{S_\kappa} u^{0}_{\kappa}(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_{\kappa}(x,y)\,d_yS\,. \qquad /13/$$

Тоді вектор-функція

$$u^{0}(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\iint_{S_\kappa} u^{0}_{\kappa}(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G_{\kappa}(x,y)\,d_yS=\sum_{\kappa=0}^{n}V^{0}_{\kappa}(x)$$

є розв"язок системи /1/ в області D, який набуває внаслідок /12/ на межі нульового значення і тому дорівнює тотожно нулеві скрізь у D

$$u^{0}(x)\equiv\sum_{\kappa=0}^{n}V^{0}_{\kappa}(x)\,, \qquad /14/$$

Звідси міркуваннями, використаними при доведенні єдиності зображення розв"язку системи /1/ у наведеній вище теоремі, одержимо

$$V^{0}_{\kappa}(x)\equiv 0 \qquad (x\in D_\kappa)\,. \qquad /15/$$

Оскільки $u^{0}_{\kappa}(x)$ – значення $V^{0}_{\kappa}(x)$ на поверхні S_κ, то з /10/ записуємо $u^{0}_{\kappa}(x)=0$, тобто система /12/ має тільки нульовий розв"язок. Отже, для системи /1/ існує єдиний розв"язок.

Список літератури: 1. Волошина М.С. Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. – ДАН УРСР, 1958, № 10. 2. Мельник Д.П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору.– ДАН УРСР, 1958, № 6. 3. Марія Мартиненко. Деякі крайові задачі для еліптичних систем.– ДАН УРСР, серія А, 1968, № 8.