УДК 517.949.8

В.А.Бакалець, Н.В.Людкевич

# МЕТОД НЕОЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Розглянемо точний метод розв"язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона на площині та в просторі у випадку замкнених кривих /поверхонь/ другого порядку, коли права частина рівняння – алгебраїчний поліном довільного степеня.

1. Запишемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u = P_n(x,y), \qquad /1/$$

$$u\big|_S = 0, \qquad /2/$$

де $P_n(x,y)$ – алгебраїчний поліном степеня $n$ виду

$$P_n(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n} \tilde{a}_{ij} x^i y^j ; \qquad /3/$$

$S$ – замкнута крива другого порядку.

Розв"язок задачі /1/–/2/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y) = w(x,y)\cdot Q_n(x,y), \qquad /4/$$

де $w(x,y)$ – функція, яка задає рівняння кривої $S$ ; $Q_n(x,y)$ – алгебраїчний поліном степеня $n$ з невідомими коефіцієнтами

$$Q_n(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j . \qquad /5/$$

Підставивши /4/ в /1/, маємо тотожність

$$\left[\frac{\partial^2 Q_n(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_n(x,y)}{\partial y^2}\right] w(x,y) + 2\left[\frac{\partial Q_n(x,y)}{\partial x}\,\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} + \qquad /6/$$

$$+ \frac{\partial Q_n(x,y)}{\partial y}\,\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right] Q_n(x,y) = P_n(x,y).$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$ та $y$, записуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $a_{ij}$. Очевидно, що одержаний розв"язок задовольнятиме граничну умову /2/.

Розглянемо деякі конкретні випадки. Нехай $S$ – коло радіуса $R$ з центром у початку координат. Розв"язок задачі /1/-/2/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y)=(x^2+y^2-R^2)\sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j. \qquad /7/$$

Тоді для визначення $a_{ij}$ отримаємо систему

$$a_{n-k,k}[(n-k)(n-k-1)+k(k-1)]+a_{n-k+2,k-2}(n-k-2)(n-k-1)+$$
$$+a_{n-k-2,k+2}(k+2)(k+1)-R^2[a_{n-k+2,k}(n-k+2)(n-k+1)+ \qquad /8/$$
$$+a_{n-k,k+2}(k+2)(k+1)]+4a_{n-k,k}(n+1)=\bar{a}_{n-k,k} \quad (k=0,1,\dots,n).$$

Очевидно, що $a_{lm}=0$, якщо $l$, $m$ лежать поза проміжком $[0,n]$. Вкажемо розв"язки /7/ для деяких $n$:

$$n=0,\ u_0(x,y)=\frac{1}{4}\bar{a}_{00}\cdot\omega(x,y),$$

$$n=1,\ u_1(x,y)=\left[\frac{1}{8}(\bar{a}_{10}x+\bar{a}_{01}y)+\frac{1}{4}\bar{a}_{00}\right]\omega(x,y),$$

$$n=2,\ u_2(x,y)=\left\{\frac{7\bar{a}_{20}-\bar{a}_{02}}{96}x^2+\frac{\bar{a}_{11}}{12}xy+\frac{7\bar{a}_{02}-\bar{a}_{20}}{96}y^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}(\bar{a}_{10}x+\bar{a}_{01}y)+\frac{1}{4}\left[\bar{a}_{00}+\frac{\bar{a}_{20}+\bar{a}_{02}}{8}\right]\right\}\omega(x,y),$$

$$n=3,\ u_3(x,y)=\left\{\frac{1}{192}[(9\bar{a}_{30}-\bar{a}_{12})x^3+(11a_{21}-\right.$$

$$-3\bar{a}_{03})x^2y + (11\bar{a}_{12} - 3\bar{a}_{30})xy^2 + (9\bar{a}_{03} - \bar{a}_{21})y^3\Big] + \frac{1}{96}\Big[(7\bar{a}_{20} -$$

$$-\bar{a}_{02})x^2 + (7\bar{a}_{02} - \bar{a}_{20})y^2\Big] + \frac{1}{12}\bar{a}_{11}xy + \Big[\bar{a}_{10} + \frac{R^2}{12}(\bar{a}_{12} +$$

$$+3\bar{a}_{30})\Big]x + \Big[\bar{a}_{01} + \frac{R^2}{12}(\bar{a}_{21} + 3\bar{a}_{03})\Big]y + \frac{1}{4}\Big[\bar{a}_{00} + \frac{\bar{a}_{20} + \bar{a}_{02}}{8}\Big]\Big\}\cdot\omega(x,y),$$

де $\omega(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$.

Знайдені розв"язки повністю збігаються з результатами роботи [I], в якій вони одержані значно складнішим способом і є частинними випадками формули /7/. Аналогічні розв"язки можна одержати для інших конкретних кривих другого порядку.

2. Результати, отримані вище, можна поширити на просторові задачі. Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона в просторі

$$\Delta u = P_n(x,y,z), \qquad /9/$$

$$u|_S = 0, \qquad /I0/$$

де

$$P_n(x,y,z) = \sum_{i+j+k=0}^{n} \bar{a}_{ijk}\, x^i y^j z^k; \qquad /II/$$

$S$ – замкнена поверхня другого порядку.

Розв"язок задачі /9/–/I0/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y,z) = \omega(x,y,z)\cdot Q_n(x,y,z), \qquad /I2/$$

де $\omega(x,y,z)$ – функція, яка задає рівняння поверхні $S$.

$$Q_n(x,y,z) = \sum_{i+j+k=0}^{n} a_{ijk}\, x^i y^j z^k. \qquad /I3/$$

Підставивши /I2/ у /9/, отримаємо тотожність

$$\Big[\frac{\partial^2 Q_n(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_n(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_n(x,y,z)}{\partial z^2}\Big]\omega(x,y,z) + 2\Big[\frac{\partial Q_n(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial \omega(x,y,z)}{\partial x} +$$

$$+\frac{\partial Q_n(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial \omega(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial Q_n(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial \omega(x,y,z)}{\partial z}\Big] + \Big[\frac{\partial^2 \omega(x,y,z)}{\partial x^2} + \qquad /I4/$$

$$+\frac{\partial^2 \omega(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega(x,y,z)}{\partial z^2}\Big]Q_n(x,y,z) = P_n(x,y,z).$$

Прирівнюючи в /I4/ коефіцієнти при однакових степенях $x$, $y$ та $z$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів $a_{ijk}$. Очевидно, що такий розв"язок задовольнятиме граничну умову /I0/.

Нехай $S$ – куля радіуса $R$ з центром у початку координат, тоді

$$u_n(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-R^2)\sum_{i+j+k=0}^{n} a_{ijk}x^i y^j z^k. \qquad /15/$$

Для визначення $a_{ijk}$ з /I4/ отримаємо систему

$$\begin{aligned} & a_{n-k,k-z,z}\left[(n-k)(n-k-1)+(k-z)(k-z-1)+z(z-1)\right]+ \\ & +(n-k+2)(n-k+1)\left[a_{n-k+2,k-z-2,z}+a_{n-k+2,k-z,z-2}\right]+ \\ & +(k-z+2)(k-z+1)\left[a_{n-k,k-z+2,z-2}+a_{n-k-2,k-z+2,z}\right]+ \\ & +(z+2)(z+1)\left[a_{n-k,k-z-2,z+2}+a_{n-k-2,k-z,z+2}\right]- \\ & -R^2\left[(n-k+2)(n-k-1)a_{n-k+2,k-z,z}+(k-z+2)(k-z+1)a_{n-k,k-z+2,z}+\right. \\ & \left.+(z+2)(z+1)a_{n-k,k-z,z+2}\right]+(4n+6)a_{n-k,k-z,z}=\bar{a}_{n-k,k-z,z} \end{aligned} \qquad /16/$$

$$(k=0,1,\dots n;\ z=0,1,\dots,k)$$

Але, очевидно, що $a_{lmp}=0$, коли $l,m,p$ лежать поза проміжком $[0,n]$. Наведемо розв"язки /I5/ для деяких $n$

$$n=0,\quad u_0(x,y,z)=\frac{1}{6}\bar{a}_{000}\,\omega(x,y,z);$$

$$n=1,\quad u_1(x,y,z)=\left\{\frac{1}{10}\left(\bar{a}_{100}x+\bar{a}_{010}y+\bar{a}_{001}z\right)+\frac{1}{6}\bar{a}_{000}\right\}\omega(x,y,z);$$

$$n=2,\quad u_2(x,y,z)=\Big\{\frac{1}{140}\Big[(9\bar a_{200}-\bar a_{020}-\bar a_{002})x^2+(9\bar a_{020}-$$

$$-\bar a_{200}-\bar a_{002})y^2+(9\bar a_{002}-\bar a_{200}-\bar a_{020})z^2\Big]+\frac{1}{14}\Big[\bar a_{110}\,xy+$$

$$+\bar a_{101}\,xz+\bar a_{011}\,yz\Big]+\frac{1}{10}\Big[\bar a_{100}\,x+\bar a_{010}\,y+\bar a_{001}\,z\Big]+\frac{1}{6}\Big[\bar a_{000}+$$

$$+\frac{R^2}{10}(\bar a_{200}+\bar a_{020}+\bar a_{002})\Big]\Big\}\,\omega(x,y,z),$$

де $\omega(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$.

3. Відзначимо, що вимога нульових граничних умов для задач /1/–/2/ і /9/–/10/ не зменшує їх загальності. Наприклад, розглянемо задачу

$$\Delta u=P_n(x,y),\qquad /17/$$

$$u|_S=P_m(x,y),$$

де $P_m(x,y)$ – многочлен степеня $m$.

У цьому випадку будуємо такий многочлен $h(x,y)$, що $h(x,y)|_S=P_m(x,y)$. Зробивши заміну

$$z(x,y)=u(x,y)-h(x,y),$$

очевидно, для $z(x,y)$ маємо задачу

$$\Delta z=\tilde P_n(x,y),\quad z|_S=0,\qquad /18/$$

причому

$$\tilde P_n(x,y)=P_n(x,y)-\Delta h(x,y).$$

Аналогічно не зменшує загальності вимога, щоб центр границі області знаходився у початку координат. Якщо центр кривої /поверхні/ є в точці $x=a$, $y=b$, то заміною $x'=x-a$, $y'=y-b$ зведемо його в початок координат, при цьому відповідно зміняться гранична умова та права частина рівняння Пуассона. Якщо права частина рівняння

Пуассона - довільна гладка функція, то її завжди можемо рівномірно наблизити многочленом відповідного степеня. Причому похибка між точним розв"язком і тим, який ми одержали, згідно теореми Вейєрштраса [2], дорівнюватиме похибці наближення правої частини многочленом $P_n(x,y)$.

Список літератури: 1. Мартынюк В.Е. Основная краевая задача для обобщенного полигармонического уравнения.- Вычислительная и прикладная математика, 1973, вып.20. 2. Канторович Л.Б., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.

УДК 517.944+518.61

М.Д.Коркуна

## ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНОГО МЕТОДУ ПРОГРАМУВАННЯ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Метод динамічного програмування /1/ застосовується до розв"язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа [2]. При цьому розглядають два алгоритми. Використання одного із них пов"язане з обчисленням обернених матриць, а практична реалізація другого не наведена.

У цій статті продовжуємо дослідження другого алгоритму і здійснюємо його реалізацію на ЕОМ.

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа у прямокутнику $R$

$$\Delta u = 0, \qquad /1/$$

$$u|_{\Gamma} = g(x,y) \qquad /2/$$