Пуассона – довільна гладка функція, то її завжди можемо рівномірно наблизити многочленом відповідного степеня. Причому похибка між точним розв"язком і тим, який ми одержали, згідно теореми Вейєрштраса [2], дорівнюватиме похибці наближення правої частини многочленом $P_n(x,y)$.

Список літератури: 1. Мартынюк В.Е. Основная краевая задача для обобщенного полигармонического уравнения.– Вычислительная и прикладная математика, 1973, вып.20. 2. Канторович Л.Б., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.

УДК 517.944+518.61

М.Д.Коркуна

ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНОГО МЕТОДУ ПРОГРАМУВАННЯ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Метод динамічного програмування /1/ застосовується до розв"язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа [2]. При цьому розглядають два алгоритми. Використання одного із них пов"язане з обчисленням обернених матриць, а практична реалізація другого не наведена.

У цій статті продовжуємо дослідження другого алгоритму і здійснюємо його реалізацію на ЕОМ.

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа у прямокутнику R

$$\Delta u = 0, \qquad /1/$$

$$u|_{\Gamma} = g(x,y) \qquad /2/$$

де Γ - границя області R), яка еквівалентна задачі про мінімум функціоналу

$$D(u) = \iint\limits_R (u_x^2 + u_y^2)\, dR \qquad /3/$$

у класі функцій $W_2^1(R)$, що задовольняють граничні умови /2/.

Виберемо в R сітку з кроком h по x і y. Введемо позначення

$$v_j = \begin{cases} u_{kj} & \text{для } j = 1, \ldots, l-1 \\ u_{k+1,j} & \text{для } j = l, \ldots, m-1 \end{cases}$$

Визначимо $f_{lk}(v_1, \ldots, v_{m-1})$ як

$$f_{lk}(v_1, \ldots, v_{m-1}) = \min_{\{u_{ij}\}} \Big[\sum_{j=1}^{l} (u_{k+1,j} - u_{k+1,j-1})^2 + \sum_{j=1}^{l-1} (u_{k+1,j} - u_{kj})^2 + \sum_{i=k+2}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{m} (u_{ij} - u_{i,j-1})^2 + \sum_{j=1}^{m-1} (u_{ij} - u_{i-1,j})^2 \Big]\Big]. \qquad /4/$$

Звідси отримуємо функціональне рівняння

$$f_{lk}(v_1, \ldots, v_{m-1}) = \min_{\omega} \left[(v_l - \omega)^2 + (v_{l-1} - \omega)^2 + f_{l-1,k}(v_1, \ldots, v_{l-2}, \omega, v_l, \ldots, v_{m-1}) \right], \qquad /5/$$

де $\omega = u_{k+1,l-1}$. Останнє співвідношення дає зв"язок між областями, які зображені на рис.1,2.

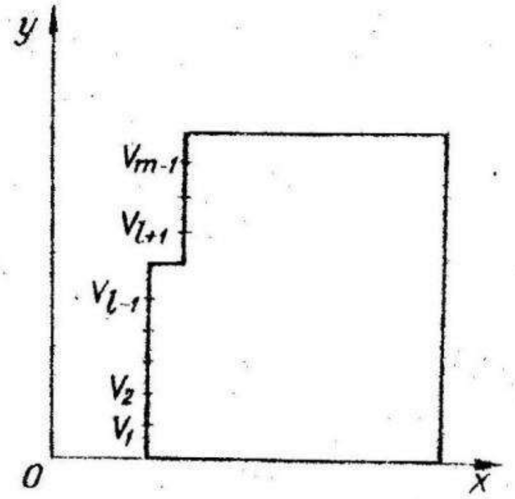

Рис.1.

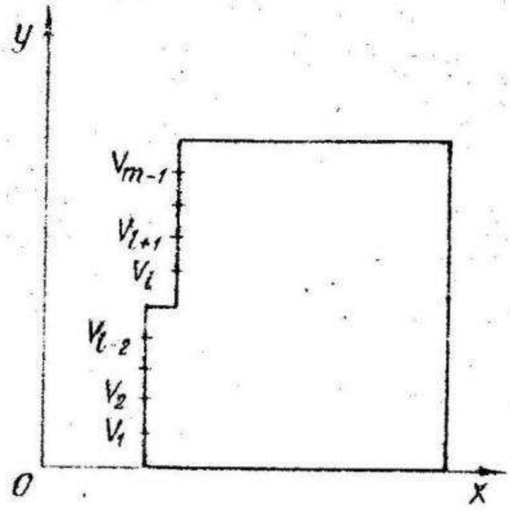

Рис.2.

Враховуючи те, що $f_{lk}(v_1, \dots, v_{m-1})$ є квадратичною формою по v, отримаємо

$$f_{lk}(v) = (A^{(l,k)} v, v) - 2(b^{(l,k)}, v) + c^{(l,k)}, \qquad /6/$$

де $A^{(l,k)}$ – симетрична матриця; $b^{(l,k)}$ і $c^{(l,k)}$ – вектори, $v = (v_1, \dots, v_{m-1})$. Тоді вираз /5/ набуде вигляду

$$f_{lk}(v) = \min_{\omega} [(v_l - \omega)^2 + (v_{l-1} - \omega)^2 + (A^{(l-1,k)} v, v) - 2(b^{(l-1,k)}, v) + c^{(l-1,k)} . \qquad /7/$$

Значення ω, за якого $f_{lk}(v)$ набуває мінімуму, одержуємо з рівності нулеві похідної по ω виразу /7/

$$\omega = \frac{v_l + v_{l-1} + b_{l-1}^{(l-1,k)} - \sum_{j=1}^{l-2} a_{l-1,j}^{(l-1,k)} v_j - \sum_{j=l}^{m-1} a_{l-1,j}^{(l-1,k)} v_j}{2 + a_{l-1,l-1}^{(l-1,k)}} . \qquad /8/$$

Тут $a_{l-1,j}^{(l-1,k)}$ і $b_{l-1}^{(l-1,k)}$ – невідомі. Для їх визначення підставимо /8/ у /7/. Тоді

$$f_{lk}(v) = [(\alpha, v) + \beta]^2 + [(\alpha', v) + \beta]^2 + $$
$$+ (A^{(l-1,k)}(v + \delta v), v + \delta v) - 2(b^{(l-1,k)}, v + \delta v) + c^{(l-1,k)}; \qquad /9/$$

$$\alpha_j = \begin{cases} -(1 + a^{(l-1,k)}_{l-1,l-1} + a^{(l-1,k)}_{l-1,l})\gamma & \text{при} \quad j = l, \\ \gamma & \text{при} \quad j = l-1, \\ -a^{(l-1,k)}_{l-1,j}\gamma & \text{для решти} \quad j; \end{cases}$$

$$\alpha'_j = \begin{cases} (1 - a^{(l-1,k)}_{l-1,l})\gamma & \text{при} \quad j = l, \\ -(1 + a^{(l-1,k)}_{l-1,l-1})\gamma & \text{при} \quad j = l-1, \\ -a^{(l-1,k)}_{l-1,j}\gamma & \text{для решти} \quad j; \end{cases}$$

$$\beta = b^{(l-1,k)}_{l-1}\gamma, \qquad \gamma = \frac{1}{2 + a^{(l-1,k)}_{l-1,l-1}} .$$

$$\delta v = (\delta v_1, \ldots, \delta v_{m-1});$$

$$\delta v_j = \begin{cases} (\alpha', v) + \beta & \text{при} \quad j = l-1, \\ 0 & \text{для решти} \quad j . \end{cases}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях v в /9/ і /6/, одержуємо співвідношення для визначення $\tilde{a}_{ij}^{(l,k)}$ і $b_j^{(l,k)}$:

$$\tilde{a}_{ij}^{(l,k)} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_i' \left(\alpha_j' + 2a_{l-1,j}^{(l-1,k)} + a_{l-1,l-1}^{(l-1,k)} \alpha_j'\right) + a_{ij}^{(l-1,k)}, \qquad /10/$$

$$b_j^{(l,k)} = b_j^{(l-1,k)} + b_{l-1}^{(l-1,k)} \alpha_j' - \beta \left(\alpha_j + \alpha_j' + a_{l-1,j}^{(l-1,k)} + \right.$$

$$\left. + a_{l-1,l-1}^{(l-1,k)} \alpha_j'\right) \qquad /11/$$

при $l = 2, \ldots, m-1$.

Зі співвідношення

$$f_{1k}(v_1, \ldots, v_{m-1}) = (v_1 - u_{k+1,0})^2 + f_{0k}(v_1, \ldots, v_{m-1})$$

маємо формули при $l = 1$

$$a_{ij}^{(1,k)} = \begin{cases} a_{11}^{(0,k)} + 1 & \text{при} \quad i = j = 1, \\ a_{i,j}^{(0,k)} & \text{для решти} \quad j, \end{cases} \qquad /12/$$

$$b_i^{(1,k)} = \begin{cases} b_1^{(0,k)} + u_{k+1,0} & \text{при} \quad i = j, \\ b_i^{(0,k)} & \text{для решти} \quad i. \end{cases} \qquad /13/$$

При $l = m$ елементи матриць $A^{(l,k)}$ рахуватимуться за формулою /10/, а елементи векторів $b^{(l,k)}$ за

$$b_j^{(m,k)} = b_j^{(m-1,k)} + b_{m-1}^{(m-1,k)} \alpha_j' -$$

$$-\gamma\left[\left(b_{m-1}^{(m-1,\kappa)}-u_{\kappa+1,m}\left(1+a_{m-1,m-1}^{(m-1,\kappa)}\right)\right)\alpha_j+\right.$$ /I4/

$$\left.+\left(u_{\kappa+1,m}+b_{m-1}^{(m-1,\kappa)}\right)\left(\alpha_j+a_{m-1,j}^{(m-1,\kappa)}+a_{m-1,m-1}^{(m-1,\kappa)}\alpha_j'\right)\right].$$

Вимагаючи, щоб $A^{(\ell,\kappa)}$ була симетричною, маємо

$$a_{ij}^{(\ell,\kappa)}=\frac{1}{2}\left[\bar{a}_{ij}^{(\ell,\kappa)}+\bar{a}_{ji}^{(\ell,\kappa)}\right]. \qquad /I5/$$

Враховуючи те, що $A^{(m,n-1)}=J$, $b^{(m,n-1)}=u_n$ (u_n – значення $u(x,y)$ на правій границі), $A^{(m,\kappa+1)}=A^{(0,\kappa)}$, $b^{(m,\kappa+1)}=b^{(0,\kappa)}$ у кожній точці сітки елементи матриць $A^{(\ell,\kappa)}$ і векторів $b^{(\ell,\kappa)}$ шукаємо за формулами /I2/, /I3/, /I0/, /II/, /I4/, /I5/, запам"ятовуючи при цьому рядок матриці $a_{\ell-1,j}^{(\ell-1,\kappa)}$ і елемент вектора $b_{\ell-1}^{(\ell-1,\kappa)}$. Далі за формулою /8/ знайдемо розв"язок нашої задачі.

Для ілюстрації описаного методу розглянемо такі два приклади:
I/ одиничний квадрат з кроком $h=1/16$ та граничними умовами

$$u(0,y)=u(1,y)=u(x,1),\ u(x,0)=1;$$

2/ одиничний квадрат з кроком $h=1/16$ та граничними умовами

$$u(0,y)=-y^2,\ u(1,y)=1-y^2,\ u(x,0)=x^2,\ u(x,1)=x^2-1.$$

Результати обчислень порівнювали для задачі I з даними праці [2], а для задачі 2 – з точним розв"язком /див. таблицю/.

Точка	Задача I. Метод динамічного програмування	Розв"язок з праці [2]	Задача 2. Метод динамічного програмування	Точний розв"язок
I	2	3	4	5
(1/16, 1/16)	0,49571	0,49570	0,00000	0,000000
(1/2, 1/16)	0,87408	0,87407	0,24609	0,246093

Закінчення таблиці

I	2	3	4	5
(15/16, 1/2)	0,49570	0,49570	0,6289I	0,628906
(1/2, 1/2)	0,2500I	0,24999	0,00000	0,000000
(1/2, 15/16)	0,02I8I	0,02I8I	-0,6289I	-0,628906

Отже, отримані результати з певною точністю збігаються з точним розв"язком із праці [2].

Список літератури: I. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960. 2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М., Мир, 1974.

УДК 518.517.3

М.В.Жук

МЕТОД МЕХАНІЧНИХ КВАДРАТУР ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння

$$u_1(x,y) = \iint\limits_{D_1} K_1(x,y,\xi,\eta)\, u_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + f_1(x,y) \qquad /1/$$

в області D_1, обмеженій по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y — кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$. Припускаємо, що ядро $K_1(x,y,\xi,\eta)$ неперервне в області $D_1 \times D_1$, а вільний член $f_1(x,y)$ в області D_1.

Доповнюємо область D_1 до прямокутника $D=[a,b;\,c,d]$ /див.рисунок/.