I	2	3	4	5
(15/16, 1/2)	0,49570	0,49570	0,62891	0,628906
(1/2, 1/2)	0,25001	0,24999	0,00000	0,000000
(1/2, 15/16)	0,02181	0,02181	-0,62891	-0,628906

Отже, отримані результати з певною точністю збігаються з точним розв"язком із праці [2].

Список літератури: I. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960. 2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М., Мир, 1974.

УДК 518.517.3

М.В.Жук

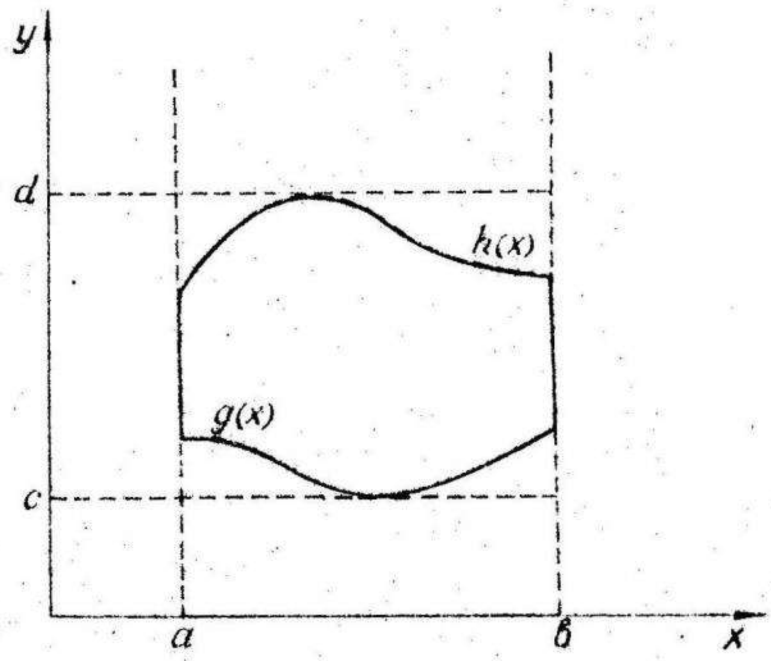
МЕТОД МЕХАНІЧНИХ КВАДРАТУР ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння

$$u_1(x,y)=\iint_{D_1} K_1(x,y,\xi,\eta)u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta+f_1(x,y) \qquad /1/$$

в області D_1, обмеженій по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y - кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$. Припускаємо, що ядро $K_1(x,y,\xi,\eta)$ неперервне в області $D_1\times D_1$, а вільний член $f_1(x,y)$ в області D_1.

Доповнюємо область D_1 до прямокутника $D=[a,b;c,d]$ /див. рисунок/.



Вважаємо, що ядро рівняння /I/ $\mathcal{K}_1(x,y,\xi,\eta)$ можна продовжити по неперервності в області $D \times D_1$ і отримати у цій області неперервну функцію $\tilde{\mathcal{K}}_1(x,y,\xi,\eta)$. Крім того, припускаємо, що вільний член рівняння /I/ $f_1(x,y)$ теж можна продовжити по неперервності в області D і отримати неперервну в області D функцію $f(x,y)$.

Тоді розглянемо рівняння

$$u(x,y) = \iint\limits_D \mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + f(x,y), \qquad /2/$$

де

$$\mathcal{K}(x,y,\xi,\eta) = \begin{cases} \mathcal{K}_1(x,y,\xi,\eta) & \text{при } x,y,\xi,\eta \in D_1 \times D_1, \\ \tilde{\mathcal{K}}_1(x,y,\xi,\eta) & \text{при } x,y,\xi,\eta \in D \times D_1, \\ 0 & \text{при } x,y,\xi,\eta \in D \times (D \setminus D_1). \end{cases} \qquad /3/$$

Наведемо деякі результати про збіжність квадратурних процесів [I].

Нехай $\mathcal{T}$ – метричний компакт; ν – додатна скінченна регулярна міра на $\mathcal{T}$ така, що $\nu(s(t_0,r)) = \nu(\bar{s}(t_0,r))$ при $r > 0$ для довільної відкритої сфери $s(t_0,r)$ і замкненої сфери $\bar{s}(t_0,r)$.

Розбиття компакта J на ν -вимірні підмножини $J_{1n}, J_{2n}, \dots, J_{kn}$, які не перетинаються,

$$J_{kn} \cap J_{ln} = \phi \qquad \text{при} \quad k \neq l\,, \quad \cup J_{kn} = J, \qquad /4/$$

що $\nu(J^{o}_{kn}) = \nu(J_{kn}) = \nu(\bar{J}_{kn})$, називається правильним, якщо при $n \to \infty$ діаметри підмножин J_{kn} прямують до нуля

$$\max_{1 \le k \le n} diam\,(J_{kn}) \to 0, \qquad /5/$$

де J^{o}_{kn} та $\bar{J}_{kn}$ – відповідно внутрішня частина та замкнення J_{kn}.

Нехай X – банахів простір. Обмежена на J функція $\varphi(\tau)$ зі значеннями в X є ν-інтегровною, тоді і лише тоді, коли для кожної правильної послідовності ν- розбить $J = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_{kn}$ виконується умова

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(\varphi, J_{kn})\, \nu(J_{kn}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,, \qquad /6/$$

де $\omega(\varphi, J_{kn})$ – коливання функції φ на J_{kn}.

Рівномірно обмежена система $\mathfrak{M} = \{\varphi(\tau)\}$ ν- інтегровних функцій називається рівномірно ν - інтегровною, якщо для кожної правильної послідовності ν -розбить $J = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_{kn}$ збіжність /6/ відбувається рівномірно відносно $\varphi \in \mathfrak{M}$

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} \sum_{k=1}^{n} \omega(\varphi, J_{kn})\, \nu(J_{kn}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,. \qquad /7/$$

У праці [I] доведено, що для довільної ν -інтегровної функції $\varphi(\tau)$ квадратурний процес

$$\int_J \varphi(\tau)\, \nu(d\tau) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}\, \varphi(\tau_{kn}) + R_n(\varphi) \qquad /8/$$

з вузлами $\tau_{kn} \in J$ та коефіцієнтами $\alpha_{kn} > 0$ збігається $\big(R_n(\varphi) \to 0$ при $n \to \infty\big)$ тоді і лише тоді, коли для кожного n = I,2... існує така правильна послідовність ν -розбить $J = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_{kn}$, що

$$\tau_{kn} \in J_{kn}\,, \quad k = 1, 2, \dots, n\,, \; n = 1, 2, \dots, \qquad /9/$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{kn} - \nu(J_{kn})| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,. \qquad /10/$$

За допомогою квадратурної формули /8/ запишемо рівняння /2/ у вигляді

$$u(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\int_a^b \alpha_{kn} K(x,y,\xi,\eta_{kn})u(\xi,\eta_{kn})d\xi = f(x,y)+\int_a^b \rho_n(x,y,\xi)d\xi \qquad /11/$$

де $\rho_n(x,y,\xi)=R_n(Ku)$, $c\le \eta_{1n}<\eta_{2n}<\ldots<\eta_{nn}\le d$.

Приймемо в /11/ послідовно $y=y_{1n},\ldots,y_{nn}$. Тоді приходимо до наступної системи рівнянь, яку задовольняють функції $u(x,y_{mn})$, $/m=1,2,\ldots,n/$ – значення шуканого розв"язку рівняння /2/ на прямих $(x,y_{1n}),(x,y_{2n}),\ldots,(x,y_{mn})$

$$u(x,y_{mn})-\sum_{k=1}^{n}\int_a^b \alpha_{kn} K(x,y_{mn},\xi,\eta_{kn})u(\xi,\eta_{kn})d\xi = f(x,y)+\int_a^b \rho_n(x,y,\xi)d\xi.$$

Тоді наближені значення $c_{mn}(x)\approx u(x,y_{mn})$ шукаємо з системи n інтегральних рівнянь

$$c_{mn}(x)-\sum_{k=1}^{n}\int_a^b \alpha_{kn} K(x,y_{mn},\xi,\eta_{kn})c_{kn}(\xi)d\xi = f(x,y_{mn}),\ m=1,\ldots,n. \qquad /12/$$

<u>Теорема.</u> Нехай рівняння /1/ має єдиний неперервний розв"язок $u_1^*(x,y)$, а квадратурний процес /8/ збігається.

Тоді система інтегральних рівнянь /12/ при достатньо великих має єдиний неперервний розв"язок $c_{1n}(x),\ldots,c_{nn}(x)$ і

$$\max_k \max_{(x,y_{kn})\in D_1} |c_{kn}(x)-u_1^*(x,y_{kn})| \to 0, \qquad /13/$$

якщо $n\to\infty$.

Швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$\max_k \max_{(x,y_{kn})\in D_1} |c_{kn}(x)-u_1^*(x,y_{kn}| \le p\tau_n, \qquad /14/$$

де $p=const>0$,

$$\tau_n=\max_{a\le x\le b}\max_{1\le k\le n} \left|\int_a^b \tilde\rho_n(x,y_{mn},\xi)d\xi\right|,\ \tilde\rho_n(x,y_{mn},\xi)=R_n(\tilde K_{mn}u_1^*), \qquad /15/$$
$$\tilde K_{mn}u_1^*=\tilde K_1(x,y_{mn},\xi,\eta)u_1^*(\xi,\eta).$$

Доведення. Інтегральне рівняння /2/ розглянемо як операторне

$$u = Tu + f \qquad /2/$$

у банаховому просторі E неперервних по x та обмежених і вимірних по y в області D функцій $u(x,y)$

$$\| u(x,y) \| = \max_{a \le x \le b} \sup_{c \le y \le d} | u(x,y) |,$$

$$Tu = \iint_D K(x,y,\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad /16/$$

Інтегральний оператор T буде цілком неперервним як оператор із E у простір $C(D)$ і тим більше як оператор в E. Рівняння /1/ має єдиний неперервний розв"язок, тому для однорідного рівняння $u_1 = T_1 u_1$ із цілком неперервним у $C(D_1)$ оператором $T_1 u_1 = \iint_{D_1} K_1(x,y,\xi,\eta) u_1(\xi,\eta) d\xi d\eta$ існує лише нульовий розв"язок у $C(D_1)$. Звідси випливає, що рівняння $u = Tu$ теж має тільки нульовий розв"язок у просторі $C(D)$, оскільки

$$u(x,y) = \iint_D K(x,y,\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_{D_1} K_1(x,y,\xi,\eta)\, u_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Таким чином, для оператора $I - T$ існує обмежений обернений у $C(D)$ і /2/ має єдиний неперервний розв"язок u^*, який у D_1 збігається з u_1^*.

Із збіжності процесу /8/ випливає, що існує послідовність розбить $[c,d] = J = \bigcup_{k=1}^{n}$, $n = 1, 2, \dots$, для якої виконуватимуться співвідношення /4/, /5/, /9/, /10/, причому /5/ і /10/ матимуть вигляд

$$\max_{1 \le k \le n} \sup_{\eta', \eta'' \in J_{kn}} |\eta' - \eta''| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \qquad /5'/$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{kn} - \beta_{kn}| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{kn}| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \beta_{kn} = mes J_{kn}. \qquad /10'/$$

Позначимо через $\chi_{kn}(\eta)$ характеристичну функцію множини J_{kn} [1]. Множину функцій вигляду $u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) \chi_{kn}(y)$, де $l_k(x)$ – довільні неперервні функції, позначимо через E_n; очевидно, що E_n – замкнений підпростір в E. Введемо проекційний оператор P_n, який проектує E на E_n,

$$P_n h(x,y)=\sum_{k=1}^{n} h(x,y_{kn})X_{kn}(y),\quad h(x,y)\in E.$$

Очевидно, що $P_n E=E_n$, $P_n z_n = z_n$ для $z_n\in E_n$ і $\|P_n\|=1$. Із /6/ і /5/ для довільної неперервної у D функції $z(x,y)$, а отже, і рівномірно неперервної маємо

$$\|z-P_n z\|=\max_{a\le x\le b}\max_{1\le k\le n}\sup_{y\in J_{kn}}|z(x,y)-z(x,y_{kn})|\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Інакше, послідовність P_n як операторів із $C(D)$ в E сильно прямує до оператора вкладення $C(D)$ в E. Оскільки T цілком неперервний як оператор із E в $C(D)$, то на основі леми 15.5 із праці [2] отримуємо

$$\|U_n\| = \|T-P_nT\|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \qquad /17/$$

Із лінійної незалежності $X_{kn}(y)$ випливає, що система /12/ рівносильна операторному рівнянню

$$z_n = P_n z_n + f_n, \qquad /18/$$

де

$$f_n=\sum_{m=1}^{n} f(x,y_{mn})X_{mn}(y),\quad z_n(x,y)=\sum_{m=1}^{n} l_m(x)X_{mn}(y)\in E_n, \qquad /19/$$

$$T_n z_n=\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_a^b \alpha_{kn}K(x,y_{mn},\xi,\eta_{kn})l_k(\xi)d\xi\right\}X_{mn}(y). \qquad /20/$$

Рівносильність розуміємо у такому сенсі: вектор $l_1(x),\dots,l_n(x)$ буде розв"язком системи /12/ тоді і лише тоді, коли $u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} l_k(x)X_{mn}(y)$ буде розв"язком рівняння /18/.

Покажемо тепер, що

$$\|S_n\| = \|T_n - P_nT\|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \qquad /21/$$

Для $z_n=\sum_{k=1}^{n} l_k(x)X_{kn}(y)\in E_n$ маємо

$$P_nTz_n=\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} l_k(\xi)\int_{J_{kn}} K(x,y_{mn},\xi,\eta)d\eta\, d\xi\right\}X_{mn}(y).$$

5

Але, враховуючи /20/, отримуємо

$$T_n z_n = \sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\int_{J_{kn}} \mathcal{K}(x,y,\xi,\eta_{kn})\,d\eta\, l_k(\xi)\,d\xi\right\} X_{mn}(y) +$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_a^b \gamma_{kn}\mathcal{K}(x,y_{mn},\xi,\eta_{kn})\, l_k(\xi)\,d\xi\right\} X_{mn}(y).$$

Тоді

$$\|S_n z_n\| \le \Big[\max_{a\le x\le b}\max_{1\le m\le n}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\int_{J_{kn}}|\mathcal{K}(x,y,\xi,\eta_{kn})-\mathcal{K}(x,y_{mn},\xi,\eta)|\,d\xi\, d\eta +$$

$$+ M(b-a)\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{kn}|\Big]\,\|z_n\|,$$

де

$$M = \max_{a\le x,\xi\le b}\ \max_{c\le y\le d}\ \max_{g(\xi)\le\eta\le h(\xi)} |\tilde{\mathcal{K}}_1(x,y,\xi,\eta)|.$$

Із рівномірної інтегровності по η відносно x,y,ξ сімейства функцій

$$\{\varkappa_{x,y,\xi} = \mathcal{K}(x,y,\xi,\eta)\}\ x,y\in D,\ \xi\in[a,b]$$

та співвідношення /10'/ випливає, що

$$\|S_n\| \le (b-a)\Big[\sup_{x,y,\xi}\sum_{k=1}^{n}\omega(\varkappa_{x,y,\xi};J_{kn})\,\beta_{kn} + M\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{kn}|\Big]\to 0$$

при $n\to\infty$. Отже, /21/ виконується.

Таким чином, враховуючи виконання співвідношень /17/, /21/ та співвідношень $f_n = P_n f$ і $\|f - P_n f\|\to 0$ при $n\to\infty$ можемо застосувати теорему 17.1 із праці [2]. При цьому отримуємо, що при достатньо великих n рівняння /18/ має єдиний розв"язок $u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_{kn}(x)X_{kn}(y)$, а система /12/ – єдиний розв"язок $c_{1n}(x), c_{2n}(x),\ldots, c_{nn}(x)$. Збіжність /13/ випливає зі збіжності $\|u_n - u^*\|\to 0$ та нерівності

$$\|u_n - u^*\| \ge \|u_n - P_n u^*\| = \max_{a\le x\le b}\ \max_{1\le k\le n} |c_{kn}(x) - u^*(x,y_{kn})|. \quad /22/$$

Згідно з цією ж теоремою маємо

$$\tilde{\rho} r_n \le \| u_n - P_n u^* \| \le \rho r_n ,$$

де

$$\tilde{\rho}, \rho = const > 0, \quad r_n = \| (T_n P_n - P_n T) u^*(x,y) \|,$$

звідки отримуємо /14/.

Список літератури: 1. Вайникко Г.М. О сходимости метода механических квадратур для интегральных уравнений с разрывными ядрами. – Сиб.математ.журн., 1971, 12, № 1. 2. Приближенное решение операторных уравнений /М.А.Красносельський, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко и др. М., Наука, 1969.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ряд задач математичної фізики формулюють у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} q_i(\tau)\left[D_i(\tau,\bar{\tau})\ln\frac{1}{|\tau-\bar{\tau}|}+R_i(\tau,\bar{\tau})\right]d\tau + \sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau)K_j(\tau,\bar{\tau})\,d\tau = U^*(\bar{\tau}) \quad (i=1,2,\ldots,m), \; j\neq i, \qquad /1/$$

де $U^*(\bar{\tau})$ – задана функція $(\bar{\tau}\in[\alpha_i,\beta_i])$; $q_i(\tau)$ – шукані функції, про які відомо наперед, що вони на кінцях проміжків (α_i,β_i)