Згідно з цією ж теоремою маємо

$$\tilde{p} r_n \leq \| u_n - P_n u^* \| \leq p r_n ,$$

де

$$\tilde{p}, p = const > 0, \quad r_n = \| (T_n P_n - P_n T) u^*(x,y) \|,$$

звідки отримуємо /14/.

Список літератури: 1. Вайникко Г.М. О сходимости метода механических квадратур для интегральных уравнений с разрывными ядрами. - Сиб.математ.журн., 1971, 12, № 1. 2. Приближенное решение операторных уравнений /М.А.Красносельський, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко и др. М., Наука, 1969.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ряд задач математичної фізики формулюють у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} q_i(\tau) \left[D_i(\tau,\bar{\tau}) \ln \frac{1}{|\tau - \bar{\tau}|} + R_i(\tau,\bar{\tau}) \right] d\tau + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) K_j(\tau,\bar{\tau}) d\tau = U^*(\bar{\tau}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad /1/$$

де $U^*(\bar{\tau})$ – задана функція $(\bar{\tau} \in [\alpha_i, \beta_i])$; $q_i(\tau)$ – шукані функції, про які відомо наперед, що вони на кінцях проміжків (α_i, β_i)

мають особливості виду $(\tau-\alpha_i)^{-n_i}(\beta_i-\tau)^{-m_i}$ $(n_i, m_i < 1)$;

$D_i(\tau,\bar\tau)$, $R_i(\tau,\bar\tau)\in C[P_i]$, $\bar{K}_j(\tau,\bar\tau)\in C[P_j]$, а $P_k=[\alpha_k,\beta_k]\times[\alpha_i,\beta_i]$.

Рівняння /I/ належать до класу некоректних задач, а тому для його розв"язування застосовують метод саморегуляризації [I,2]. Суть його полягає в тому, що, враховуючи особливість в ядрі інтегрального рівняння /I/ та припускаючи, що функція

$$\omega_i(\tau)=q_i(\tau)(\tau-\alpha_i)^{n_i}(\beta_i-\tau)^{m_i}$$

мало змінюється на достатньо невеликому проміжку довжини h, рівняння /I/ зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\omega_j(\tau)K_j(\tau,\bar\tau)d\tau-\omega_i(\bar\tau)G_i(\bar\tau)=U^*(\bar\tau), \qquad /2/$$

де $K_j(\tau,\bar\tau)\in C[P_j]$; $G_i(\bar\tau)$ – відома функція, яка при достатньо малих h поводить себе як добуток $h\cdot\ln h$.

Для отримання гладкого розв"язку задачі /2/ застосуємо апарат інтерполяційних кубічних сплайнів [3]. Для цього розіб"ємо кожний з проміжків $[\alpha_j,\beta_j]$ на N_j частин точками

$$\tau_k^j=\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}-\frac{\beta_j-\alpha_j}{2}\cos\frac{2k-1}{2N_j}\pi \quad (k=1,2,\dots,N_j-1), \qquad /3/$$
$$\tau_0^j=\alpha_j,\quad \tau_{N_j}^j=\beta_j.$$

Запишемо через ω_k^j значення шуканої функції $\omega_j(\tau)$ в точці τ_k^j. Очевидно, що $\omega_0^j=\omega_{N_j}^j=0$. Відносно нерівномірної сітки /3/ побудуємо інтерполяційний кубічний сплайн

$$S(\omega_j,\tau)=M_{k-1}^j\frac{(\tau_k^j-\tau)^3}{6h_{k-1}^j}+M_k^j\frac{(\tau-\tau_{k-1}^j)^3}{6h_{k-1}^j}+\left[\omega_{k-1}^j-\frac{M_{k-1}^j(h_{k-1}^j)^2}{6}\right]\times$$
$$\times\frac{(\tau_k-\tau)}{h_{k-1}^j}+\left[\omega_k^j-\frac{M_k^j(h_{k-1}^j)^2}{6}\right]\frac{(\tau-\tau_{k-1}^j)}{h_{k-1}^j}, \qquad /4/$$

де $h^j_{k-1} = \tau^j_k - \tau^j_{k-1}$, $\tau \in (\tau^j_{k-1}, \tau^j_k)$ $(k=1,2,\dots,N_j)$,

$$M^j_k = [S(\omega_j,\tau)]''/_{\tau=\tau^j_k} :$$

Додаткові крайові умови, що накладаються на сплайн /4/, задамо у вигляді

$$[S(\omega_j,\tau)]'''/_{\tau=z-0} = [S(\omega_j,\tau)]'''/_{\tau=z+0},\ z=\tau^j_1, \tau^j_{N_j-1}. \qquad /5/$$

Зауважимо також, що умовами інтерполяції сплайну /4/ є виконання співвідношень

$$S(\omega_j, \tau^j_k) = \omega^j_k \quad (k=1,2,\dots,N_j-1). \qquad /6/$$

Враховуючи умови інтерполяції /6/, гладкості, а також крайові умови /5/, отримуємо для визначення параметрів M^j_k систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left(2+\frac{h^j_0}{h^j_1}\right)\cdot M^j_1 + \frac{h^j_1-h^j_0}{h^j_1}\cdot M^j_2 = d^j_1,$$

$$\beta^j_i M^j_{i-1} + 2M^j_i + \lambda^j_i M^j_{i+1} = d^j_i \quad (i=2,3,\dots,N_j-2),$$

$$\frac{h^j_{N_j-2}-h^j_{N_j-1}}{h^j_{N_j-2}} M^j_{N_j-2} + \left(2+\frac{h^j_{N_j-1}}{h_{N_j-2}}\right) M^j_{N_j-1} = d^j_{N_j-1}, \qquad /7/$$

$$M^j_0 = \left(1+\frac{h^j_0}{h^j_1}\right)M^j_1 - \frac{h^j_0}{h^j_1}M^j_2 ,$$

$$M^j_{N_j} = \left(1+\frac{h^j_{N_j-1}}{h^j_{N_j-2}}\right)M^j_{N_j-1} - \frac{h^j_{N_j-1}}{h^j_{N_j-2}}M^j_{N_j-2}.$$

де $\lambda^j_{k+1} = \frac{h^j_{k+1}}{h^j_k + h^j_{k+1}}$; $\beta^j_{k+1} = \frac{h^j_k}{h^j_k + h^j_{k+1}}$, d^j_k – друга поділена різниця функції $\omega_j(\tau)$ відносно точок $\tau^j_{k-1}, \tau^j_k, \tau^j_{k+1}$, що обчислюється за формулою

$$d^j_k = \frac{6}{h^j_k + h^j_{k+1}} \left[\frac{\omega^j_{k+1}}{h^j_k} - \frac{h^j_k + h^j_{k-1}}{h^j_k \, h^j_{k-1}} + \frac{\omega^j_{k-1}}{h^j_{k-1}} \right]. \qquad /8/$$

Розв"язуючи рівняння /7/ відносно M^j_k , одержуємо

$$M^j_k = \sum_{t=1}^{m} \sum_{l=1}^{N_t-1} \ell^{j,k}_{t,l} \, d^t_l , \qquad /9/$$

де $\ell^{j,k}_{t,l}$ – елементи обчисленої оберненої матриці коефіцієнтів системи /7/.

Щоб знайти невідомі величини ω^j_k , підставимо вираз для сплайну /4/ з врахуванням /9/ в інтегральне рівняння /2/. Для отримання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно величин ω^j_k розіб"ємо кожний з проміжків $[\alpha_i , \beta_i]$ на N_i частин точками поділу

$$\bar{\tau}^i_s = \frac{\beta_i + \alpha_i}{2} - \frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \cos \frac{2s-1}{2N_i} \pi \quad (s = 1,2,\dots,N_i - 1), \quad i = 1,2,\dots,m ,$$

$$\tau^i_0 = \alpha_i , \ \tau^i_{N_i} = \beta_i .$$

Записавши для кожної з цих точок співвідношення /2/ і враховуючи наступні позначення

$$S^{j,i}_{k,s} = \int_{\tau^j_{k-1}}^{\tau^j_k} (\tau^j_k - \tau)^3 K_j(\tau, \bar{\tau}^i_s)\, d\tau, \quad T^{j,i}_{k,s} = \int_{\tau^j_{k-1}}^{\tau^j_k} (\tau - \tau^j_{k-1})^3 K_j(\tau, \bar{\tau}^i_s)\, d\tau,$$

$$U^{j,i}_{k,s} = \int_{\tau^j_{k-1}}^{\tau^j_k} (\tau^j_k - \tau) K_j(\tau, \bar{\tau}^i_s)\, d\tau, \quad Q^{j,i}_{k,s} = \int_{\tau^j_{k-1}}^{\tau^j_k} (\tau - \tau^j_{k-1}) K_j(\tau, \bar{\tau}^i_s)\, d\tau,$$

$$UQ^{j,i}_{k,s} = \frac{U^{j,i}_{k,s}}{h^j_{k-1}} + \frac{Q^{j,i}_{k-1,s}}{h^j_{k-2}}, \quad SU^{j,i}_{k,s} = S^{j,i}_{k,s} - (h^j_{k-1})^2 U^{j,i}_{k,s},$$

$$TQ^{j,i}_{k,s} = T^{j,i}_{k,s} - (h^j_{k-1})^2 Q^{j,i}_{k,s}, \quad SQ^{j,i}_{k,s} = \frac{SU^{j,i}_{k,s}}{h^j_{k-1}} + \frac{TQ^{j,i}_{k-1,s}}{h^j_{k-2}},$$

дістаємо для знаходження величин ω^j_k систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{t=1}^{m} \Big\{ \omega^t_1 \Big[UQ^{t,i}_{2,s} + \frac{QQ^{t,i}_{2,s}}{(h^t_2 + h^t_1)h^t_1} - \frac{QQ^{t,i}_{1,s}}{h^t_0\, h^t_1} \Big] +$$

$$+ \omega^t_{N_t-1} \Big[UQ^{t,i}_{N_t,s} + \frac{QQ^{t,i}_{N_t-2,s}}{(h^t_{N_t-2} + h^t_{N_t-3})h^t_{N_t-2}} - \frac{QQ^{t,i}_{N_t-1,s}}{h^t_{N_t-1}\, h^t_{N_t-2}} \Big] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N_t-3} (D^{t,i}_{l,s} + UQ^{t,i}_{l+2,s})\omega^t_{l+1} \Big\} - \omega^i_s\, G_i(\bar{\tau}^i_s) = u^*(\bar{\tau}^i_s),$$

де $D^{t,i}_{l,s} = \dfrac{QQ^{t,i}_{l,s}}{(h^t_l + h^t_{l-1})h^t_l} - \dfrac{QQ^{t,i}_{l+1,s}}{h^t_{l+1}\, h^t_l} + \dfrac{QQ^{t,i}_{l+2,s}}{(h^t_{l+2} + h^t_{l+1})h^t_{l+1}}$,

$$QQ^{t,i}_{l,s} = \sum_{j=1}^{m} \Big\{ \sum_{k=2}^{N_j} SQ^{j,i}_{k,s} A^{j,k-1}_{t,l} + SU^{j,i}_{1,s} \Big[\frac{A^{j,1}_{t,l}}{h^j_0}\Big(1 + \frac{h^j_0}{h^j_1}\Big) - \frac{A^{j,2}_{t,l}}{h^j_1} \Big] +$$

$$+ TQ^{j,i}_{N_j,s} \left[\frac{A^{j,N_j-1}_{t,\ell}}{h^{j}_{N_j-1}} \left(1 + \frac{h^{j}_{N_j-1}}{h^{j}_{N_j-2}} \right) - \frac{A^{j,N_j-2}_{t,\ell}}{h^{j}_{N_j-2}} \right] \Bigg\} .$$

Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь легко розв"язується методом Гаусса.

С п и с о к   л і т е р а т у р и: І. Д м и т р и е в В.И., З а х а р о в Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма І-го рода. – Вычислительные методы и программирование, 1968, вып.10. 2. О с т у д и н Б.А. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода со слабой особенностью методом саморегуляризации. – Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып.29. 3. С т е ч к и н С.Б., С у б б о т и н Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1976.

УДК 518:517.944/947

З.С.Бережанська

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В R^3 МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У праці [1] запропонований алгоритм розв"язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння теплопровідності у просторі з щілинами. За допомогою теплового потенціалу простого шару задача зведена до інтегрального рівняння І-го роду з невідомою густиною, що досить ефективне для такого класу задач.

Цю методику ми переносимо на розв"язування третьої крайової задачі для багатозв"язних областей, рівняння границь яких можна за-