$$+ TQ^{j,i}_{N_j,s} \left[\frac{A^{j,N_j-1}_{i,l}}{h^{i}_{N_j-1}} \left(1 + \frac{h^{i}_{N_j-1}}{h^{i}_{N_j-2}}\right) - \frac{A^{j,N_j-2}_{i,l}}{h^{i}_{N_j-2}} \right] \Bigg\} .$$

Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь легко розв"язується методом Гаусса.

С п и с о к л і т е р а т у р и: І. Д м и т р и е в В.И., З а х а р о в Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма І-го рода. – Вычислительные методы и программирование, 1968, вып.10. 2. О с т у д и н Б.А. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода со слабой особенностью методом саморегуляризации. – Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып.29. 3. С т е ч к и н С.Б., С у б б о т и н Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1976.

УДК 518:517.944/ 947

З.С.Бережанська

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В R^3 МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У праці [1] запропонований алгоритм розв"язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння теплопровідності у просторі з щілинами. За допомогою теплового потенціалу простого шару задача зведена до інтегрального рівняння І-го роду з невідомою густиною, що досить ефективне для такого класу задач.

Цю методику ми переносимо на розв"язування третьої крайової задачі для багатозв"язних областей, рівняння границь яких можна записати в явному вигляді. Визначення рівнянь – єдина робота, яку необхідно здійснити для застосування алгоритму в конкретному випадку.

Розглянемо третю крайову задачу для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}, \qquad /1/$$

$$T\Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T\Big|_S = T_0, \qquad /2/$$

де $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ – сукупність розімкнутих поверхонь, рівняння яких $x_3 = f_i(x_1 x_2); T_0$ – гранична умова на S.

Як відомо [2], ця задача зводиться до інтегрального рівняння за допомогою теплового потенціалу подвійного шару.

$$T(\bar{x},\bar{t}) = -\frac{1}{2^4 \pi^{3/2}} \int_0^{\bar{t}} dt \iint_S \mu(s,t) \frac{z}{(\bar{t}-t)^{5/2}} e^{-\frac{z^2}{4(\bar{t}-t)}} \frac{\partial z}{\partial n} ds, \qquad /3/$$

де z – відстань між біжучою точкою X поверхні S і фіксованою точкою $\bar{X}$ простору; $\mu(s,t)$ – поверхнева густина, яка є розв"язком наступного інтегрального рівняння

$$-\frac{1}{2^4 \pi^{3/2}} \int_0^{\bar{t}} dt \iint_S \mu(s,t) \left[\frac{Y1 + \alpha Y^2 2}{(\bar{t}-t)^{5/2}} - \frac{Y2}{2(\bar{t}-t)^{7/2}} \right] e^{-\frac{z^2}{4(\bar{t}-t)}} ds = T_0, \qquad /4/$$

$$Y1 = \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2 + z \frac{\partial^2 z}{\partial n^2},$$

$$Y2 = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2.$$

Це рівняння типу Фредгольма по X і Вольтера по t.

Запишемо невідому густину у вигляді

$$\mu(s,t) = q(s) q(t). \qquad /5/$$

Якщо у рівняння /4/ підставити /5/, перейти від поверхневого інтегралу до подвійного та змінити порядок інтегрування, то отримаємо

$$-\frac{1}{2^4\pi^{3/2}}\sum_{i=1}^{m}\left\{\iint\limits_{\Delta_i} q_i(x_1,x_2)F^{(i)}(x_1,x_2)(Y1+\alpha Y2^2)\left[\int_0^{\bar{t}} q(t)\frac{e^{-\frac{z^2}{4(\bar{t}-t)}}}{(\bar{t}-t)^{5/2}}dt\right]dx_1dx_2 -\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{\Delta_i} q_i(x_1,x_2)F^{(i)}(x_1,x_2)Y2\left[\int_0^{\bar{t}} q(t)\frac{e^{-\frac{z^2}{4(\bar{t}-t)}}}{(\bar{t}-t)^{3/2}}dt\right]dx_1dx_2\right\} = T_0^{(i)}, \qquad /6/$$

де Δ_i – проекція S_i на координатну площину $(x_1 0 x_2)$;

$$F^{(i)}(x_1,x_2) = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^2} .$$

Невідомі функції $q_i(x_1,x_2)$ і $q(t)$ зобразимо у вигляді

$$q_i(x_1,x_2) = \sum_{r=1}^{N^{(i)}}\frac{a_r^{(i)}\,b_r^{(i)}}{[b_r^{(i)}]^2+(x_1-x_{1r}^{(i)})^2+(x_2-x_{2r}^{(i)})^2} , \qquad /7/$$

$$q(t) = erfc\,(\sqrt{\bar{t}})\,e^{\bar{t}-t} , \qquad /8/$$

де $a_r^{(i)}$ – невідомі коефіцієнти; $b_r^{(i)}$ – деякі наперед задані нелінійні параметри; $x_r^{(i)}$ – точки, які належать області S

$$erfc\,(\sqrt{\bar{t}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\bar{t}}}^{\infty} e^{-t^2}dt . \qquad /9/$$

Враховуючи /8/ і розкладаючи $e^{\bar{t}-t}$ у ряд Тейлора, обчислимо в /6/ інтеграли по часу. Тоді дістаємо

$$-\frac{erfc\,(\sqrt{\bar{t}})}{2^4\,\pi^{3/2}}\left\{\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{\Delta_i} q_i(x_1,x_2)F^{(i)}(x_1,x_2)\left\{\frac{2^2}{z}\left[(Y1+\alpha Y2^2 - Y2)\times\right.\right.\right. \qquad /10/$$

$$\times\left(\frac{2^2 R1}{z^2}+R0\right)-\frac{2^4}{z^4}R2Y2\Big]+\sum_{p=3}^{\infty}\left[\frac{1}{(p-1)!}\left(E_{p-2}(z)+Q_{p-2}(z)R0(z)\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(Y1+\alpha Y^2 2-\frac{1}{p}Y2\right)\right]\right\}dx_1dx_2\right\} = T_0^{(i)} ,$$

$$R0(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ erfc\left(z/2\sqrt{t} \right);$$

$$R1(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{4t}} \left(z/2\sqrt{t} \right) + \frac{R0(z)}{2};$$

$$R2(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{4t}} \left(z/2\sqrt{t} \right) \left[\left(z/2\sqrt{t} \right)^2 + \frac{3}{2} \right] + \frac{3}{2^2} R0(z);$$

$$E_p(z) = e^{-\frac{z^2}{4t}} \sum_{j=1}^{p} \frac{(t)^{p-(j-\frac{1}{2})}\, z^{2(j-1)}}{(-2)^{j+1} \prod_j [2p-(2j-1)]};$$

$$Q_p(z) = \frac{(-1)^p z^{2p-1}}{2^{p+2} \prod_p (2p-1)}.$$

Підставляючи /7/ у /10/ і застосовуючи метод колокації у точках x_k, отримуємо для визначення невідомих $a_r^{(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь. При цьому підінтегральна функція має особливість, якщо точка інтегрування суміщається з точкою колокації. Обчислюючи подвійні інтеграли за методом з праці [1] В.Л.Рвачова, що особливість можна усунути спеціальним вибором точок інтегрування та точок колокації.

Одержана система лінійних алгебраїчних рівнянь добре зумовлена. При цьому діагональні елементи матриці – домінуючі і визначник системи – відмінний від нуля. Визначивши невідомі $a_r^{(i)}$, температурне поле у довільній точці $\bar{X}$ простору при кожному t знаходимо за формулою /3/.

Список літератури: 1. Бережанская З.С., Галазюк В.А., Людкевич И.В. Нестационарная задача теплопроводности в пространстве с включениями.-XIУ научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций. К., Наукова думка, 1977. 2. Интегральные уравнения/Забрейко П.П., Кошелев А.И., М.А.Красносельский и др. М., Наука, 1968.

УДК 518:517.948

Ю.В.Нікольський

ПРО ОДИН ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ

За аналогією до методу Рунге-Кута розв"язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь пропонуємо нову ідею побудови чисельних методів спуску для задачі відшукання екстремуму функцій.

Розглянемо подібний метод для мінімізації опуклої і достатньо гладкої функції $f(x)$, заданої на всьому просторі E_n або на деякій його опуклій множині

$$\begin{aligned} &x_{n1} = x_n - \alpha_n f'(x_n), \\ &S_n = \theta f'(x_n) + (1-\theta) f'(x_{n1}), \quad 0<\theta<1, \quad (f'(x_n), S_n) > 0, \qquad /1/ \\ &x_{n+1} = x_n - \beta_n S_n, \quad n = 0,1,2,\dots, \end{aligned}$$

де коефіцієнти α_n, β_n визначають відповідно з умов

$$\begin{aligned} &g_1(\alpha_n) = \min_{\alpha} g_1(\alpha), \\ &g_1(\alpha) = f(x_n - \alpha f'(x_n)), \qquad /2/ \end{aligned}$$