Список літератури: І. Бережанская З.С., Галазюк В.А., Дюдкевич И.В. Нестационарная задача теплопроводности в пространстве с включениями.- XIУ научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций. К., Наукова думка, 1977. 2. Интегральные уравнения/Забрейко П.П., Кошелев А.И., М.А.Красносельский и др. М., Наука, 1968.

УДК 518:517.948

Ю.В.Нікольський

ПРО ОДИН ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ

За аналогією до методу Рунге-Кута розв"язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь пропонуємо нову ідею побудови чисельних методів спуску для задачі відшукання екстремуму функцій.

Розглянемо подібний метод для мінімізації опуклої і достатньо гладкої функції $f(x)$, заданої на всьому просторі E_n або на деякій його опуклій множині

$$x_{n1} = x_n - \alpha_n f'(x_n),$$
$$S_n = \theta f'(x_n) + (1-\theta) f'(x_{n1}),\quad 0 < \theta < 1,\quad (f'(x_n), S_n) > 0, \quad /I/$$
$$x_{n+1} = x_n - \beta_n S_n, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

де коефіцієнти α_n, β_n визначають відповідно з умов

$$g_1(\alpha_n) = \min_{\alpha} g_1(\alpha),$$
$$g_1(\alpha) = f(x_n - \alpha f'(x_n)), \quad /2/$$

$$g_2(\beta_n) = \min_{\beta} g_2(\beta),$$

$$g_2(\beta) = f(x_n - \beta S_n).$$

<u>Теорема I.</u> Якщо функція $f(x)$ обмежена знизу $\inf f(x) = f$, її градієнт $f'(x)$ задовольняє умову Ліпшіца $\|f'(x) - f'(y)\| \leq R\|x-y\|$, $R>0$ для довільних $x, y \in E_n$, а вибір α_n, β_n здійснюється з умов /2/, то вектор S_n в /I/ визначає напрямок спуску і $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f$.

<u>Доведення.</u> Якщо $f'(x_n) = 0$, то з /I/ одержуємо тривіальний випадок $x_n = x_{n+1} = \ldots$ Тому припускаємо $f'(x_n) \neq 0$. Тоді

$$f(x_{n+1}) = f(x_n - \beta_n S_n) \leq f(x_n - \beta S_n),$$

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \beta (f'(x_n), S_n) - \frac{\beta^2}{2} R \|S_n\|^2.$$

При виборі $\beta = \dfrac{(f'(x_n), S_n)}{R\|S_n\|^2}$ одержуємо

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \frac{L^2 \|f'(x_n)\|^2}{2R} > 0,$$

де

$$L = \frac{(f'(x_n), S_n)}{\|f'(x_n)\| \|S_n\|},$$

тобто послідовність $\{f(x_n)\}$ є монотонно спадною, і з огляду на обмеженість функції $f(x_n) - f(x_{n+1}) \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f$.

Застосуємо /I/ до мінімізації квадратичної функції $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$, де матриця A – додатно визначена і симетрична. Тоді формули /I/, /2/ набувають вигляду

$$x_{n1} = x_n - \alpha_n A x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$S_n = A(x_{n1} - \alpha_n \theta A x_n),$$

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n S_n, \qquad /3/$$

$$\alpha_n = \frac{\|Ax_n\|^2}{(A^2x_n, Ax_n)},$$

$$\beta_n = \frac{\theta\|Ax_n\|^2 + (1-\theta)(Ax_n, Ax_{n1})}{\theta^2(A^2x_n, Ax_n) + 2\theta(1-\theta)(A^2x_{n1}, Ax_n) + (1-\theta)^2(A^3x_{n1}, x_{n1})}.$$

Очевидно, що вектор S_n визначає напрямок спуску. Для знаходження $n+1$ наближення одержуємо

$$f(x_{n+1}) = f(x_n)\left[1 - \frac{\|Ax_n\|^2}{(A^2x_n, Ax_n)(Ax_n, x_n)} N_n(\theta)\right], \qquad /4/$$

де

$$N_n(\theta) = \frac{\theta^2}{1 - 2\lambda_{1n}(1-\theta) + \lambda_{2n}(1-\theta)^2}; \qquad /5/$$

$$\lambda_{1n} = \frac{\|A^2x_n\|^2\,\|Ax_n\|^2}{(A^2x_n, Ax_n)^2}; \quad \lambda_{2n} = \frac{\|Ax_n\|^4(A^3x_n, A^2x_n)}{(A^2x_n, Ax_n)^3}.$$

З /5/ видно, що при $\theta = 1$ можна отримати метод найшвидшого спуску.

Нехай $m\|p\|^2 \le (Ap, p) \le M\|p\|^2$, $M \ge m > 0$, $p \in E_n$, тоді, використовуючи оцінку з [I], легко записати

$$f(x_{n+1}) \le f(x_0) \prod_{i=0}^{n} q_i,$$

$$\|x_{n+1}\| \le \|x_0\| \sqrt{\frac{M}{m}} \prod_{i=0}^{n} q_i^{1/2}, \qquad /6/$$

$$q_i = 1 - \frac{4Mm}{(M+m)^2} N_i(\theta).$$

З формул /6/ випливає, що /3/ збігається до точки мінімуму для квадратичної функції не повільніше методу найшвидшого спуску [2], якщо

$$1 \le N_i(\theta) \le d, \quad d = \frac{M^2 + m^2}{2Mm}. \qquad /7/$$

Таку швидкість збіжності можна одержати, якщо на кожному кроці вибраний параметр θ знаходиться у певних інтервалах, границі яких визначають з /5/ і залежать від λ_{1i} і λ_{2i}. Однак, оскільки обчислення проводять за формулами /3/, то значення λ_{1i} і λ_{2i} залежні від вибраного перед початком обчислень параметра θ і значень функції на цій ітерації. Тому оцінки, які можна отримати для таких границь, неефективні. Але можна показати, що, оскільки $\lambda_{2i} \geqslant \lambda_{1i} > 1$, то забезпечити виконання умови /7/ можна завжди, якщо параметр θ вибраний достатньо близький до одиниці. На основі отриманих результатів можна оформулювати теорему.

Теорема 2. Метод /I/ у застосуванні до мінімізації квадратичної функції при деякому виборі параметра збігається не повільніше, ніж метод найшвидшого спуску.

На прикладі тестових функцій

$$z = (1-x)^2 + 100\,(y-x^2)^2,$$

$$z = (1-x)^2 + 100\,(y-x^3)^2,$$

для яких мінімум, що дорівнює нулеві, досягається у точці /I,I/, з початковим наближенням /-0,5,0,5/ проведемо порівняння ефективності методів /I/ та найшвидшого спуску. Результати обчислень зведені у таблицю.

Метод	Значення функції					Час, с
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	
I	2	3	4	5	6	7
			Номер ітерації			
θ = I,0	604	977	I2I2	I450	I7I7	5I80
θ = 0,75	29	I02	I80	277	369	22I0
θ = 0,7	59	I06	I58	237	284	II60
θ = 0,6	2	I2	I09	I33	200	I580
θ = 0,5	II3	I74	255	289	473	2690

Закінчення таблиці

I	2	3	4	5	6	7
θ = I,0	525	37II	–	–	–	–
θ = 0,75	27	239	438	550	754	3I50
θ = 0,7	I26	294	398	5I3	7I2	2970
θ = 0,6	26	79	274	504	698	2690
θ = 0,55	7	I62	352	559	790	2600

З наведених вище даних видно, що порівняно з іншими значеннями, вибір θ = 0,6 – 0,7 дає найвищу швидкість збіжності мінімізуючої послідовності до точки мінімуму при застосуванні методу /I/.

С п и с о к л і т е р а т у р и: I. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе наискорейшего спуска. – ДАН СССР, I947, т.56, № 3. 2. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Д а н и л и н Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука, I975.

УДК 5I9.2I

І.Д.Квіт, Є.В.Москвяк

РОЗПОДІЛИ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ РУЙНУВАННЯ

Залежно від мікроструктури руйнування матеріалів може бути двох типів: з попередньою значною деформацією або без неї. В останньому випадку руйнування називається крихким. Однак для встановлення різниці, /з достатнім ступенем надійності/ між двома розподілами крихкого руйнування треба провести тисячі спроб, що нераціонально. Тому необхідно встановити апріорний розподіл крихкого руйнування.

Крихке руйнування настає внаслідок появи неоднорідностей критичної інтенсивності. Припустимо, що неоднорідності рівномірно розпо–