Закінчення таблиці

1	2	3	4	5	6	7
θ = 1,0	525	3711	–	–	–	–
θ = 0,75	27	239	438	550	754	3150
θ = 0,7	126	294	398	513	712	2970
θ = 0,6	26	79	274	504	696	2690
θ = 0,55	7	162	352	559	790	2600

З наведених вище даних видно, що порівняно з іншими значеннями, вибір θ = 0,6 – 0,7 дає найвищу швидкість збіжності мінімізуючої послідовності до точки мінімуму при застосуванні методу /1/.

Список літератури: 1. Канторович Л.В. О методе наискорейшего спуска. – ДАН СССР, 1947, т.56, № 3. 2. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука, 1975.

УДК 519.21

І.Д.Квіт, Є.В.Москвяк

РОЗПОДІЛИ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ РУЙНУВАННЯ

Залежно від мікроструктури руйнування матеріалів може бути двох типів: з попередньою значною деформацією або без неї. В останньому випадку руйнування називається крихким. Однак для встановлення різниці /з достатнім ступенем надійності/ між двома розподілами крихкого руйнування треба провести тисячі спроб, що нераціонально. Тому необхідно встановити апріорний розподіл крихкого руйнування.

Крихке руйнування настає внаслідок появи неоднорідностей критичної інтенсивності. Припустимо, що неоднорідності рівномірно розподілені в матеріалі у вигляді чужорідних вкраплень, тріщин тощо. Нас не цікавить природа неоднорідностей, для нас неоднорідність – причина крихкого руйнування матеріалу.

Виділимо в матеріалу деякий об"єм u. Позначимо через $p_0(u)$ – імовірність відсутності критичної неоднорідності в об"ємі u. Зрозуміло, що

$$p_0(0)=1 \ , \ p_0(\infty)=0. \qquad /1/$$

Нехай $p_0(v)$ – імовірність відсутності критичної неоднорідності в об"ємі v, що несумісний з об"ємом u. Якщо припустити, що події з імовірностями $p_0(u)$ і $p_0(v)$ незалежні, то ймовірність відсутності критичної неоднорідності в об"єднаному об"ємі $u+v$

$$p_0(u+v)=p_0(u)\,p_0(v). \qquad /2/$$

Упохідимо співвідношення /2/ по u та поділимо результат сторонами на /2/. Одержимо

$$\frac{d\ln p_0(u+v)}{du}=\frac{d\ln p_0(u)}{du}. \qquad /3/$$

Оскільки співвідношення /3/ повинно зберігатися при довільному значенні v, то воно стале. Отже,

$$\frac{d\ln p_0(u)}{du}=a \quad , \quad a=const.$$

Звідси

$$\ln p_0(u)=au+\ln b \ , \quad b=const, \ b>0$$

і далі

$$p_0(u)=be^{au}.$$

Використаємо граничні умови /1/. З умови

$$p_0(0)=be^{a\cdot 0}=1$$

7

випливає, що $b = 1$, а з умови

$$p_0(\infty) = e^{a\cdot\infty} = 0$$

маємо, що стала a – від"ємна. Введемо позначення $a = -\lambda$, де $\lambda > 0$. Таким чином, імовірність відсутності критичної неоднорідності в об"ємі u

$$p_0(u) = e^{-\lambda u} . \qquad /4/$$

Якщо вважати, що наявність в об"ємі u єдиної неоднорідності критичної інтенсивності призводить до руйнування цього об"єму, то ймовірність цієї події

$$F(u;\lambda) = 1 - e^{-\lambda u},\ u > 0,\ (\lambda > 0). \qquad /5/$$

Отже, ймовірність крихкого руйнування матеріалу однією неоднорідністю критичної інтенсивності залежить від об"єму та швидко зростає зі збільшенням об"єму.

Математичне сподівання випадкової змінної з функцією розподілу /5/ дорівнює $\frac{1}{\lambda}$. Отже, обернене значення параметра λ експонентного розподілу /5/ є середнім об"ємом, що руйнується однією неоднорідністю критичної інтенсивності. Таким чином, λ – параметр масштабу.

Але, для того щоб крихке руйнування відбулося, потрібно принаймні $N > 1$ неоднорідностей. Число N назвемо мінімальним критичним числом. Будемо вважати, що поява неоднорідностей утворює пуассонів випадковий процес. Нехай імовірність появи K неоднорідностей в об"ємі u дорівнює

$$p_K(u) = e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^K}{K!} , \quad (K = 0, 1, 2, \dots) . \qquad /6/$$

Тоді ймовірність руйнування об"єму u дорівнює ймовірності появи принаймні N неоднорідностей

$$\sum_{K=N}^{\infty} p_K(u) = e^{-\lambda u}\sum_{K=N}^{\infty}\frac{(\lambda u)^K}{K!}. \qquad /7/$$

Правий бік /7/ можна записати у вигляді

$$\frac{\lambda^N}{(N-1)!}\int_0^u e^{-\lambda\tau}\tau^{N-1}d\tau .$$

Це легко перевірити повторним інтегруванням частинами останнього інтеграла. Лівий бік /7/ позначимо через $F(u;\lambda,N)$. Отже, /7/ запишемо у формі

$$F(u;\lambda,N)=\frac{\lambda^N}{(N-1)!}\int_0^u e^{-\lambda\tau}\tau^{N-1}d\tau,\ u>0,\ (\lambda>0;\ N=2,3,\dots). \quad /8/$$

Вираз /8/ представляє ймовірність крихкого руйнування об"єму u внаслідок дії пуассонівського потоку неоднорідностей з мінімальним критичним числом N. Розподіл /8/ називається розподілом Ерланга.

Зауважимо, що коли один з вимірів об"єму u малий у порівнянні з двома іншими, то u вважаємо плоскою областю. Якщо два виміри малі в порівнянні з третім, то u вважаємо відрізком. Імовірнісні закони крихкого руйнування не залежать від геометричної форми матеріалу.

Відзначимо також, що змінну u можна розуміти ще як час, міцність тощо. При цьому змінюється лише термінологія.

Виведений розподіл імовірностей /8/ можна узагальнити, вважаючи N не обов"язково натуральним числом, а довільним додатним числом. При цьому факторіал узагальнюють до гама-функції. Тому новий розподіл називається гама-розподілом. Запишемо його у вигляді

$$F(t;\alpha,\beta)=\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\tau^{\beta-1}d\tau,\ t>0,\ (\alpha>0,\ \beta>0), \quad /9/$$

де α – параметр масштабу; β – параметр форми.

Із наведених міркувань випливає, що крихке руйнування матеріалів при рівномірному розподілі у них неоднорідностей, незалежно від фізичної та хімічної природи неоднорідностей, апріорі керується гама-розподілом.

Деформацією додатної випадкової змінної ξ називається випадкова змінна $a\xi^{\frac{1}{b}}$, де $a>0$, $b\neq 0$. При $0<a<1$, $b=1$ маємо стиск; при $1<a<\infty$, $b=1$ – розтяг; при $a=1$, $b=-1$ – інверсію.

Деформація експонентної випадкової змінної ξ з функцією розподілу

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-e^{-t}, & t>0\end{cases} \qquad /10/$$

при $a>0$, $b>0$ називається деформацією Вейбула. Функція розподілу деформації Вейбула для $t>0$

$$P\{a\xi^{\frac{1}{b}}<t\}=P\left\{\xi<\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right\}=\int_0^{\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}e^{-\tau}d\tau=1-e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}.$$

Таким чином, деформація Вейбула експонентної випадкової змінної з функцією розподілу /10/ має розподіл

$$G(t;a,b)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}, & t>0,\end{cases}\quad (a>0,b>0). \qquad /11/$$

Функція /11/ називається функцією розподілу Вейбула.

Коли функцію розподілу /10/ тлумачити як імовірність руйнування матеріалу за час t однією неоднорідністю критичної інтенсивності /порівн./5/ /, то /11/ треба приймати як імовірність руйнування матеріалу однією неоднорідністю критичної інтенсивності при попередній значній деформації. Параметри a та b розподілу /11/ характеризують деформацію. Відзначимо, що Вейбул у праці [2] подає приклади допасовування розподілів типу /11/ до різних експериментальних даних. Методи оцінки параметрів, розподілів /9/ і /11/ розглядаються, наприклад, у працях [3 і 4].

Незалежно від параметра b, з /11/ дістаємо

$$G(a;a,b)\equiv G(a)=1-e^{-1}=0,632. \qquad /12/$$

Це означає, що вартість параметра a є абсцисою, відповідною 63,2%-ній ординаті розподілу Вейбула. Отже, параметр a в розподілі /II/ - параметр масштабу.

Коли значення параметра a відоме, то параметр b можна знайти різними способами. Наприклад, зі співвідношення

$$G\left(\frac{a}{2};a,b\right)=G\left(\frac{a}{2}\right)=1-e^{-\frac{1}{2^b}} \qquad /I3/$$

дістаємо

$$b=-\lg_2\left\{-\ln\left[1-G\left(\frac{a}{2}\right)\right]\right\}, \qquad /I4/$$

або зі співвідношення

$$G(2a;a,b)=G(2a)=1-e^{-2^b} \qquad /I5/$$

випливає

$$b=\lg_2\{-\ln[1-G(2a)]\} \; . \qquad /I6/$$

Зі співвідношень /I3/ і /I5/ бачимо, що з ростом b розподіл Вейбула стрімкіше змінюється на ділянці від $\frac{a}{2}$ до $2a$. Справді, це добре видно з таких даних:

b	$G(\frac{a}{2})$	$G(2a)$
0,5	0,50	0,75
I	0,40	0,86
2	0,22	0,98
3	0,I2	0,9997 .

Вони виражають загальну тенденцію: при $b\to\infty$ розподіл Вейбула збігається до виродженого в точці $t=a$ розподілу. Отже, параметр b у розподілі /II/ - параметр форми. Оскільки при $b=1$ розподіл Вейбула збігається з експонентним, то чим параметр b більший від одиниці, тим руйнування матеріалу відбувається зі значнішою попередньою деформацією. Наприклад, у праці [2] показано, що міцність індійської бавовни на розрив характеризується параметром I,456, а межа текучості сталі - параметром 2,934.

Легко перевірити, що деформація Вейбула гама змінної з функцією розподілу /9/ має густину

$$w(t;a,b,\alpha,\beta)=\frac{b\,\alpha^{\beta}}{a^{b\beta}\Gamma(\beta)}\,e^{-\alpha\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}\,t^{b\beta-1},\ t>0,\ (a>0,b>0,\alpha>0,\beta>0).\quad /17/$$

Початковий момент порядку k , математичне сподівання, дисперсія та коефіцієнт варіації випадкової змінної з густиною /17/ відповідно дорівнюють

$$\frac{a^{k}}{\alpha^{\frac{k}{b}}\Gamma(\beta)}\Gamma\left(\frac{k}{b}+\beta\right),\ (k=1,2,\dots);\ \frac{a}{\alpha^{\frac{1}{b}}\Gamma(\beta)}\Gamma\left(\frac{1}{b}+\beta\right),$$

$$\frac{a^{2}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{b}+\beta\right)\Gamma(\beta)-\Gamma^{2}\left(\frac{1}{b}+\beta\right)\right\}}{\alpha^{\frac{2}{b}}\Gamma^{2}(\beta)},\ \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{b}+\beta\right)\Gamma(\beta)}{\Gamma^{2}\left(\frac{1}{b}+\beta\right)}-1}.$$

У розподілі з густиною /17/ параметри a і α – параметри масштабу; b і β – параметри форми.

На підставі наведених міркувань робимо такий загальний висновок: руйнування матеріалів при рівномірному розподілі неоднорідностей у них, незалежно від фізичної та хімічної природи неоднорідностей, апріорі керується розподілом з густиною /17/. Невідомі параметри оцінюємо з експерименту. Випадкова змінна з густиною /17/ залежно від вибраних параметрів описує різні процеси руйнування матеріалів – від крихкого до руйнування зі значною деформацією. Відзначимо, що процеси руйнування з різних точок зору розглядаються в семитомній енциклопедії руйнування [5], /порівн. [1] /.

Із наступної таблички видно, які часткові випадки включає чотирипараметрична сім"я густин /17/:

Параметри				Розподіл
a	b	α	β	
I	I	α	I	Експонентний
I	I	$\frac{1}{2}$	[illegible]	Хі – квадрат
I	I	α	N	Ерланга
I	I	α	β	Гама
I	2	α	$\frac{3}{2}$	Максвелла
$\sigma\sqrt{2}$	2	I	I	Релея
a	b	I	I	Вейбула

Таким чином, сім"я /I7/ об"єднує багато розподілів, виведених раніше.

Список літератури: I. Разрушение. Т.2. Под.ред. Г.Либовиц. М., Мир, 1975. 2. Weibull, W. A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. Journal of Mechanics. 1951, vol. 18, N3. 3. Technometrics, 1969, vol. 11. 4. Technometrics, 1975, vol. 17. 5. Fracture, N.Y. - L.

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко, О.А.Миськів

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Розглядаємо задачу оптимального проектування складових оболонок обертання, які є елементами електровакуумних приладів. Мінімум цільової функції /маси конструкції/ шукають на допустимому підпросторі,