С п и с о к л і т е р а т у р и: I. Д а ф ф и н Р., П и т е р с о н Э., З е н е р К. Геометрическое программирование. М., Мир, 1972. 2. З е н е р К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. М., Мир, 1973. 3. О щ и п к о Л.Й., І в а н к і в К.С., Ю д і н а Т.В. Оптимальний розрахунок деяких елементів електровакуумних приладів. - Вісник Львів.ун-ту, серія мех.-мат, вип.12, 1977.

УДК 539.3

В.М.Вовк

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗРАХУНКУ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Аналіз напружено-деформованого стану просторових конструкцій, що перебувають під дією зовнішньої сили, проводиться на основі співвідношень тривимірної теорії пружності методом скінченних елементів.

Основні співвідношення методу скінченних елементів [4] будуються на основі узагальненого функціоналу Лагранжа

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} W(u)\,d\Omega - \int_{S} u t^{\nu} ds. \qquad /1/$$

де Ω просторова область, яку займає тіло; S - частина границі області Ω, на якій задано поверхневе навантаження з вектором напружень t^{ν}, що діє по зовнішній нормалі ν до поверхні S; $W(u)$ - пружний потенціал; u - вектор переміщень.

Область Ω зображається у вигляді суми скінченних елементів - криволінійних шестигранників з 8-ма /елемент першого порядку/ або 20-ма вузлами /елемент другого порядку/ [2]. Для побудови інтерполяційних функцій здійснимо перехід у межах кожного елемента від глобальних декартових $x=(x_1,x_2,x_3)$ до криволінійних локальних координат $\alpha=(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$, $|\alpha^i|\le 1$, $i=1,2,3$. Це відповідає відображенню довільного скінченного елемента на куб зі стороною два /позначимо його Ω_0/. На такому елементі Ω_0 будуємо інтерполяційні функції

$$N_i(\alpha)=\frac{1}{8\varkappa}\left(\varkappa_0\sum_{j=1}^{3}\xi_{ji}\alpha^j-2\right)\prod_{j=1}^{3}(1+\xi_{ji}\alpha^j) \quad \text{при } i=1,2,\ldots,8;$$
$$N_i(\alpha)=\frac{\prod_{j=1}^{3}(1+\xi_{ji}\alpha^j)\prod_{j=1}^{3}(1+\alpha^j)}{4\prod_{j=1}^{3}(1+\eta_{ji}\alpha^j)} \quad \text{при } i=9,10,\ldots,20. \qquad /2/$$

У цих позначеннях конкретна функція визначається значеннями ξ_{ji}, η_{ji}, які можуть дорівнювати I, -I або 0. Якщо розглядати елемент першого порядку, то для нього приймаємо $\varkappa_0=0$, $\varkappa=-2$. Для елемента другого порядку $\varkappa_0=\varkappa=1$.

Похідні компонент вектора переміщень у локальних координатах

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha^1}\\ \frac{\partial u_1}{\partial\alpha^2}\\ \frac{\partial u_1}{\partial\alpha^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x_3}{\partial\alpha^1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x_3}{\partial\alpha^2}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha^3} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha^3} & \frac{\partial x_3}{\partial\alpha^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\end{pmatrix}.$$

Коротко це запишемо так: $u_{1,\alpha}=Ju_{1,x}$. Аналогічно можна записати

$$u_{2,\alpha}=Ju_{2,x};$$
$$u_{3,\alpha}=Ju_{3,x}.$$

Для того щоб здійснити обернене відображення, необхідно визначити матрицю J^{-1}. Позначимо

$$J^{-1}=\frac{1}{d}A,$$

де A – матриця відповідних алгебраїчних доповнень матриці J; $d=|J|$ – визначник матриці J. Введемо позначення $\frac{\partial N_j}{\partial\alpha^i}=C_{ij}$, $i=1,2,3$; $j=1,2,\ldots,n$; $n=8$ або $n=20$. Елементи матриці A

знаходять через координати вузлів скінченного елемента і значення похідних інтерполяційних функцій таким чином:

$$\alpha_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left\{M_{(i+1),k}\left(C_{(j+1),k}C_{(j+2),m}-C_{(j+2),k}C_{(j+1),m}\right)M_{(i+2),m}\right\},$$

де індекс в дужках означає сумування по модулю три; $M_{ij}=x_j^i$, $i=1,2,3$; $j=1,2,\ldots,n$.

Обернена матриця j^{-1} визначена в явному вигляді, а не знаходиться чисельно. Визначник d матриці j

$$d=\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{3}\alpha_{1k}C_{kj}\right\}M_{1,j}.$$

Для побудови матриці жорсткості запишемо функціонал /1/ як суму

$$F(u)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{E}\int_{\Omega_k}\varepsilon^T D\varepsilon\, d\Omega-\sum_{k=1}^{E^*}\int_{S_k}ut^{\nu}ds, \qquad /3/$$

де E – кількість елементів області Ω; E^* – кількість елементів, що прилягають до S,

$$\varepsilon^T=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\frac{\partial u_1}{\partial x_3},\frac{\partial u_2}{\partial x_1},\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\frac{\partial u_3}{\partial x_2},\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right).$$

Підінтегральний вираз квадратичної частини функціоналу /3/ можна перетворити таким чином:

$$\varepsilon^T D\varepsilon=\left(\frac{1}{d}Qe\right)^T D\left(\frac{1}{d}Qe\right)=\frac{1}{d^2}e^TQ^TDQe=$$

$$=\frac{1}{d^2}q^T\Phi^T\mathcal{D}^TQ^TDQ\mathcal{D}\Phi q=q^T\left\{\frac{1}{d^2}\Psi^TR\Psi\right\}q,$$

де $\Psi=\mathcal{D}\Phi$, $R=Q^TDQ$

$$\Phi=\begin{pmatrix}N & 0 & 0\\ 0 & N & 0\\ 0 & 0 & N\end{pmatrix},\quad N=(N_1,N_2,\ldots,N_n);$$

q – вектор-стовпчик невідомих вузлових переміщень; D – матриця диференціювання по $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$;

$$e^T = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha^3} \right).$$

Елементи матриці R визначаються формулами

$$R_{11} = g S_{11} + \mu S_{22} + \mu S_{33}, \quad R_{12} = \mu S_{12} + \lambda S_{12}^T,$$
$$R_{22} = \mu S_{11} + g S_{22} + \mu S_{33}, \quad R_{13} = \mu S_{13} + \lambda S_{13}^T,$$
$$R_{33} = \mu S_{11} + \mu S_{22} + g S_{33}, \quad R_{23} = \mu S_{23} + \lambda S_{23}^T,$$

де

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}\alpha_{j1} & \alpha_{i2}\alpha_{j1} & \alpha_{i3}\alpha_{j1} \\ \alpha_{i1}\alpha_{j2} & \alpha_{i2}\alpha_{j2} & \alpha_{i3}\alpha_{j2} \\ \alpha_{i1}\alpha_{j3} & \alpha_{i2}\alpha_{j3} & \alpha_{i3}\alpha_{j3} \end{pmatrix},$$

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – постійні Ляме; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу; $g = \lambda + 2\mu$.

Враховуючи, що $d\Omega = a \cdot d\Omega_0$, матрицю жорсткості скінченного елемента записуємо як

$$G_K = \int_{\Omega_0} \frac{1}{a} \Psi^T R \Psi \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{a} P \, d\Omega_0,$$

де

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix},$$

і кожну з матриць P_{ij} розміру $n \times n$ обчислюємо за алгоритмом

$$P_{11} = g T_{11} + \mu T_{22} + \mu T_{33}, \quad P_{12} = \mu T_{12} + \lambda T_{12}^T,$$
$$P_{22} = \mu T_{11} + g T_{22} + \mu T_{33}, \quad P_{13} = \mu T_{13} + \lambda T_{13}^T,$$
$$P_{33} = \mu T_{11} + \mu T_{22} + g T_{33}, \quad P_{23} = \mu T_{23} + \lambda T_{23}^T.$$

Елементи матриці T_{ij} /розміру $n \times n$ /

$$T_{ij} = \{ z_{ip} \cdot z_{jl} \}_{l,p}, \quad i = 1,2,3; \; l,p = 1,2,\dots,n;$$

$$z_{ip} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} C_{kp}, \quad z_{jl} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} C_{kl}.$$

Для обчислення матриці жорсткості скінченного елемента необхідно проінтегрувати елементи матриці T_{ij}, розділені на d, і домножити їх відповідно на g, μ або λ. Зауважимо, що інтегрування проводиться для кожного скінченного елемента Ω_k у локальних координатах α на стандартному елементі Ω_0. Тому значення інтерполяційних функцій N_i і їх похідних можна обчислити у фіксованих точках квадратурної формули Гаусса лише один раз і використовувати для обчислення матриці жорсткості кожного елемента. Це дає змогу значно скоротити об"єм обчислень.

Вектор навантаження скінченного елемента

$$F_k = \int_{S_k} u^T t^\nu dS = p \int_{S_0} \Phi^T \Phi \, Q^\nu \Delta \, d\alpha^1 d\alpha^2,$$

де $\Delta = (EG - F)^{1/2} = (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2)^{1/2}$ – якобіан перетворення, що обчислюється при $\alpha^2 = 1$; p – інтенсивність поверхневого навантаження; Q^ν – вектор напрямних косинусів у вузлах.

Схема методу скінченних елементів реалізована у вигляді комплексу програм на мовах АЛГОЛ-60 для ЕОМ М-222 і ФОРТРАН-IУ для ЕОМ ЕС-1022. Щоб перевірити методику, проводили розрахунок напружено-деформованого стану порожнистого циліндра, навантаженого внутрішнім рівномірно розподіленим тиском інтенсивності p, при внутрішньому радіусі, який дорівнює двом, а зовнішньому – п"яти [3]. У цьому прикладі використано два елементи другого порядку по товщині. Результати обчислень переміщень у радіальному напрямі добре узгоджуються з точним розв"язком [3], а також з результатами, одержаними методом скінченних елементів на основі розрахунку циліндра як осесиметричного тіла з вибором дев"яти трикутних елементів по товщині, і наведені нижче:

$\varepsilon \cdot 10^3$	2000	2375	2750	3125	3500	3875	4250	4625	5000
	3362	2923	2618	2398	2235	2114	2023	1955	1905
$Eu_{i} \cdot 10^3$	3359	2904	2613	2386	2230	2106	2018	1948	1900
	3327	2878	2589	2365	2210	2088	2001	1932	1884

Тут у першому рядку наведено значення точного розв"язку, другому – розв"язку за методом скінченних елементів на основі осесиметричної теорії пружності, третьому – результати даної методики.

Список літератури: 1. Байков А.Д., Вульфович Н.А., Зарубаев В.П. О рассчете массивных конструкций с применением конечных элементов высокого порядка точности. – В сб.: Метод конечных элементов в строительной механике, Горький, 1975. 2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975. 3. Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970. 4. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів, Вища школа, вид-во при Львів.ун-ті, 1976.

УДК 518:519.3

Г.А.Шинкаренко, М.В.Марчук

РОЗРАХУНОК ТРИВИМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай потрібно знайти розподіл температури u в об"ємі Ω, віднесеному до декартової системи координат x^i, $i = 1,2,3$. Задача зводиться до інтегрування рівняння

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) = f \qquad /1/$$