метричного тіла з вибором дев"яти трикутних елементів по товщині, і наведені нижче:

$\varepsilon \cdot 10^3$	2000	2375	2750	3125	3500	3875	4250	4625	5000
	3362	2923	2618	2398	2235	2114	2023	1955	1905
$Eu_z \cdot 10^3$	3359	2904	2613	2386	2230	2106	2018	1948	1900
	3327	2878	2589	2365	2210	2088	2001	1932	1884

Тут у першому рядку наведено значення точного розв"язку, другому – розв"язку за методом скінченних елементів на основі осесиметричної теорії пружності, третьому – результати даної методики.

С п и с о к   л і т е р а т у р и: 1. Б а й к о в А.Д., В у л ь ф о в и ч Н.А., З а р у б а е в В.П. О рассчете массивных конструкций с применением конечных элементов высокого порядка точности. – В сб.: Метод конечных элементов в строительной механике, Горький, 1975. 2. З е н к е в и ч О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975. 3. Л у р ь е А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970. 4. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е н к о Г.А. Метод скінченних елементів. Львів, Вища школа, вид-во при Львів.ун-ті, 1976.

УДК 518:519.3

Г.А.Шинкаренко, М.В.Марчук

РОЗРАХУНОК ТРИВИМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай потрібно знайти розподіл температури u в об"ємі Ω, віднесеному до декартової системи координат x^i, $i = 1,2,3$. Задача зводиться до інтегрування рівняння

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) = f \qquad /1/$$

в області Ω при крайовій умові

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha (u - T) = 0 \qquad /2/$$

на поверхні Γ області Ω, де λ – коефіцієнт теплопровідності; α – коефіцієнт тепловіддачі $/ \alpha \geq 0, \alpha \neq 0 /$; f – інтенсивність внутрішніх джерел тепла; $T/_\Gamma$ – температура зовнішнього середовища; ν – зовнішня нормаль до поверхні Γ.

Поставлена крайова задача еквівалентна знаходженню мінімума функціонала [5]

$$F(u) = \int_\Omega \left[\lambda \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 - 2fu \right] d\Omega + \int_\Gamma \alpha (u-T) u \, d\Gamma \qquad /3/$$

на множині функцій з простору $W_2^1(\Omega)$, що задовольняють умову /2/ у тих точках $P \in \Gamma$, для яких $\lambda(P) = 0$ і $\alpha(P) \neq 0$.

Зобразимо об"єм Ω у вигляді об"єднання скінченного числа шестигранних елементів Ω_e, внутрішності яких попарно не перетинаються, але вони можуть мати спільну грань, ребро або вершину. У цьому випадку функціонал /3/ зводиться до вигляду

$$F(u) = \sum_e F_e(u) = \sum_e \left\{ \int_{\Omega_e} \left[\lambda \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 - 2fu \right] d\Omega + \int_{\Gamma_e} \alpha (u-T) u \, d\Gamma \right. , \qquad /4/$$

де Γ_e – спільна частина границі Γ і поверхні скінченного елемента Ω_e.

Для побудови основних співвідношень методу скінченних елементів скористаємось ізопараметричною апроксимацією на шестигранниках [3]. Для цього введемо на елементі Ω локальну систему координат α^s $/ |\alpha^s| \leq 1, \ s = 1, 2, 3 /$ з початком координат в центрі маси і систему розрахункових вузлів $P_j(x_j^1, x_j^2, x_j^3), j = 1, 2, \ldots$ Кожному вузлу P_j поставимо у відповідність деякий поліном $\varphi_j(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, такий, що $\varphi_j(P_i) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера [3]. За допомогою функцій φ_j на елементі Ω_e величини x^s, u, f апроксимуються інтерполяційними поліномами

$$x^s = \sum_j \varphi_j x_j^s = \varphi X^s, \quad s = 1,2,3,$$

$$u = \sum_j \varphi_j q_j = \varphi q^e, \quad q_j = f(P_j), \qquad /5/$$

$$f = \sum_j \varphi_j f_j = \varphi f^e, \quad f_j = f(P_j).$$

Між векторами $\varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial x^3}\right)^T$ та $\sigma = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u}{\partial \alpha^3}\right)^T$ встановлюється залежність $\varepsilon = \Delta_e^{-1} J \sigma$, де елементи матриці J визначаються формулами

$$J_{11} = \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^3} \cdot \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^2}, \quad J_{12} = \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^3} \cdot \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^1} - \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1} \cdot \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^3} \qquad /6/$$

та іншими, що одержуються з них шляхом циклічної перестановки індексів 1,2,3;

$$\Delta_e = \sum_{s=1}^{3} J_{ks} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha^s} = \sum_{s=1}^{3} J_{ks} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^s} X^k = A_k X^k, \quad k = 1,2,3. \qquad /7/$$

З врахуванням співвідношень /5/–/7/ зводимо інтеграл за об"ємом в функціоналі $F_e(u)$ до вигляду

$$\int_\Omega (\varepsilon^T \varepsilon - 2fu) d\Omega = \int_K (\sigma^T D \sigma - 2fu) \Delta_e d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3, \qquad /8/$$

де матриця $D = \lambda \Delta_e^{-2} J^T J$; K – куб $|\alpha^s| \le 1$, $s = 1,2,3$. Використавши формули /4/, /5/, /7/, /8/ одержимо основні співвідношення методу скінченних елементів

$$F = \sum_e q^{e^T} (K_e q^e - 2 M_e f^e), \qquad /9/$$

$$K_e = \int_K \lambda \Delta_e^{-1} \left[\sum_{i,j,k=1} J_{ki} J_{kj} \frac{\partial \varphi^T}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^j}\right] d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 =$$
$$= \int_K \lambda \Delta_e^{-1} \left[\sum_{k=1}^{3} A_k^T A_k\right] d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3, \qquad /10/$$

$$M_e = \int_K \Delta_e \varphi^T \varphi \, d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3. \qquad /11/$$

Якщо деяка грань елемента Ω_e, скажімо $\alpha^3 = 1$, є частиною границі Γ, то в функціоналі $F_e(u)$ наявний член $\int_{\Gamma_e} \alpha u(u-T) d\Gamma$. У цьому випадку апроксимуємо функції x^s, u, T на поверхні $\alpha^3=1$ формулами, аналогічними /5/ [для функцій x^s, u достатньо взяти $\alpha^3=1$ у виразах /5/]. Приймаючи $G_{ij}=\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial x^s}{\partial \alpha^i}\frac{\partial x^s}{\partial \alpha^j}$, одержуємо елемент площі $d\Gamma$ у змінних α^1, α^2 : $d\Gamma=\sqrt{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}\,d\alpha^1 d\alpha^2$. Підставляючи останній вираз в інтеграл по поверхні, одержуємо додаткові вклади у матриці /10/, /11/, зумовлені наявністю поверхневого інтегралу в функціоналі $F_e(u)$.

Інтеграли у виразах /10/, /11/ знаходять чисельно, причому обчислення φ, $\frac{\partial y}{\partial \alpha^s}$ у вузлах квадратурної формули виконують один раз для всіх елементів. Таким чином, обчислення матриць K_e, M_e для кожного елемента зводиться до деякої послідовності матричних операцій.

З умов мінімуму функціоналу $F(u)$ одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\sum_e (K_e q_e - M_e f^e)=0$, розв"язок якої дає значення температури у розрахункових вузлах об"єму Ω .

Зауважимо, що застосування методу скінченних елементів до розв"язування задач на власні значення та нестаціонарних задач теплопровідності з використанням процесу Гальоркіна потребує обчислення виразів /10/, /11/.

Наведений алгоритм реалізований у вигляді АЛГОЛ-програми для транслятора ТА-2М ЕОМ М-222. За розрахункові вузли взято вершини шестигранників. Основні співвідношення обчислюють за допомогою квадратурної формули, яка дає точне значення інтеграла $\int_X f\,dX$, якщо інтегрована функція є поліномом не вище п"ятого порядку [4] . У тримірному випадку ця формула вимагає обчислення чотирнадцяти значень інтегрованої функції, тоді як формули Гаусса такого порядку точності потребують обчислення її значень у 27 вузлах. Система рівнянь методу скінченних елементів формується без збереження рівнянь для вузлових параметрів, які можна визначити з крайових умов /2/; її розв"язок виконується методом Гаусса [6] .

Приклад I. Розв"язана задача про розподіл температури в сфері $2 \leq r \leq 6$ на внутрішній поверхні якої температура u = I, на зовнішній – u =2. Розрахунок здійснювали на сітці, наведеній у праці [I]. Результати зведені в таблицю. У першому рядку подано результати з праці [I], другому – результати розв"язування цієї задачі як осесиметричної з використанням лінійної апроксимації на трикутних елементах меридіанного перетину, третьому – результати, одержані додатковим розбиттям кожного трикутника на чотири подібних, четвертому – результати методики, і п"ятому – точні значення розв"язку.

№	3	4	5
I	I,49	I,74	I,89
2	I,49I5	I,744I	I,8973
3	I,4978	I,7484	I,8992
4	I,5008	I,7524	I,90I4
5	I,5000	I,7500	I,9000

У праці [I] використовувався такий самий ізопараметричний елемент, але допускалось, що визначник матриці Якобі Δ_e /7/ набуває постійного значення у межах елемента, що дорівнює його величині у центрі маси.

Приклад 2. За цією програмою розраховано потенціал електростатичного поля у кубі $|x^i| \leq 0{,}45$, i = I,2,3, утвореного двома симетрично розміщеними пластинами /електродами/ $|x^i| \leq$ 0,25 / i = I,2/, x^3= ±0,I5, на яких задані потенціали ±I. На гранях куба потенціал дорівнює нулеві. Обчислення проводили на тій же сітці, що у праці [2]. Наведемо значення потенціалу на осі x^3 :

x^3=0,075 – 0,500 /0,496/, x^3 = 0,25 – 0,633 /0,6I8/, x^3 =0,35 – 0,300 /0,289/. У дужках представлені результати [2], одержані за допомогою різницевої схеми другого порядку точності.

Список літератури: 1. Гуляр А.И., Кислоокий В.Н., Черный Б.М. Решение трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечных элементов.- Сопротивление материалов и теория сооружений, 1974, вып.22. 2. Дудыкевич А.Т., Людкевич И.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток. - Вычислительная и прикладная математика, 1977, вып.32. 3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975. 4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М., Наука, 1967. 5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 1970. 6. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів, Вища школа, вид-во при Львів.ун-ті, 1976.

УДК 539.311

Д.В.Грилицький, Ю.І.Сорокатий, Г.Т.Сулим

СИСТЕМА СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТОНКОСТІННИХ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ПО ДУЗІ КОЛА

Будуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь плоскої теорії пружності, що дає розв"язок задачі про збурення напружено-деформованого стану системою N-пружних тонкостінних включень постійної товщини $2h$, які розташовані на границі L розмежування матеріалів диску S_1 радіусом R і безмежної пластинки S_2 з відповідно пружними характеристиками ν_j, E_j $(j=1,2)$/див.рисунок/. Вважаємо, що пружні константи всіх включень ν_0, E_0, а їхні осьові лінії складають у сукупності лінію $L' = \bigcup_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k \subset L$. Компонент перебуває під дією однорід-