Для розрізу, коли $E_0 \to 0, f_1(x) = f_2(x) = 0$, одержуємо рівняння

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L} \frac{g'(\xi)\,d\xi}{\xi - t} - \frac{t_1^-}{t_1^+} g'(t) = -\frac{L}{t_1^+} A(t), \quad t \in L'. \qquad /18/$$

Відзначимо, що при $R \to \infty$ так, що $R\,d\theta_k = const$ система /14/ переходить у відому систему рівнянь для визначення напруженого стану в пластинці з прямолінійними тонкостінними включеннями [1] .

С п и с о к   л і т е р а т у р и : 1. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. - ПММ, т.39, 1975, № 3. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.

УДК 539.377

Т.Л.Мартинович, С.І.Кібальнікова

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ В АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ ПРИ ЗАДАНІЙ ТЕМПЕРАТУРІ НА КОНТУРІ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ

Розглянемо плоску задачу стаціонарної термопружності для нескінченної анізотропної пластинки S , ослабленої криволінійним отвором $\mathcal{L}$, що описується рівнянням $x + iy = R(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^{N} C_k e^{-ik\theta}),\ (\sum_{k=1}^{N} k|C_k|^2 < 1)$. Матеріал пластинки наділений прямолінійною анізотропією відносно пружних і теплових властивостей. Торцьові площини пластинки теплоізольовані. На контурі отвору $\mathcal{L}$ задана температура $T/_{\mathcal{L}} = T_c(s)$, а на зовнішній границі пластинки, віддаленій у нескінченність, підтримується стала температура T_∞ . Беручи до уваги, що $T = 2\,Re\,\Phi_3(z_3)$, $z_3 = x + \mu_3 y$ [4], задача зведеться до визначення аналітичної функції $\Phi_3(z_3)$ з граничної умови

$$\Phi_3(t_3)+\overline{\Phi_3(t_3)}=T_c(s) \text{ на } \mathcal{L}$$
$$\lim_{|z_3|\to\infty}\Phi_3(z_3)=\frac{1}{2}T_\infty . \qquad /1/$$

Після того як функція $\Phi_3(z_3)$ визначена, комплексні потенціали $\Phi_j(z_j)=\varphi_j'(z_j)$, $/j=1,2/$, що описують напружений стан в анізотропній пластинці, знаходимо з граничних умов [2]

$$\int_{\mathcal{L}} F(t)dU=-r(1+i\mu_3)\int_{\mathcal{L}} F(t)\Phi_3(t_3)dt_3-\bar{r}(1+i\bar{\mu}_3)\int_{\mathcal{L}} F(t)\overline{\Phi_3(t_3)}d\overline{t_3},$$
$$\int_{\mathcal{L}} \overline{F(t)}dU=-r(1+i\mu_3)\int_{\mathcal{L}} \overline{F(t)}\Phi_3(t_3)dt_3-\bar{r}(1+i\bar{\mu}_3)\int_{\mathcal{L}} \overline{F(t)}\overline{\Phi_3(t_3)}dt_3, \qquad /2/$$

де

$$U=\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)\varphi_j(z_j)+(1+i\bar{\mu}_j)\overline{\varphi_j(z_j)}\right]; \qquad /3/$$

r – відома стала [2,3]; t – афікс точки контура $\mathcal{L}$; $z_j=x+\mu_j y$ $/j=1,2,3/$ – узагальнені комплексні змінні областей S_j , які отримують в області S відповідними афінними перетвореннями; $\mu_j=\alpha_j+i\beta_j$ – корені відповідних характеристичних рівнянь [4]; $F(t)$ – граничне значення довільної функції $F(z)$, голоморфної в області S.

Афікси точок контурів $\mathcal{L}_j$ областей S_j і контура $\mathcal{L}$ зв"язані співвідношеннями

$$t_j=\frac{1-i\mu_j}{2}t+\frac{1+i\mu_j}{2}\bar{t} \quad (j=1,2,3). \qquad /4/$$

При великих $/z_j/$ функції $\Phi_j(z_j)$ $/j=1,2,3/$ мають вигляд

$$\Phi(z_j)=A_j^{\infty}+D^{(1)}z_j^{-1}+O\left(\frac{1}{z_j^2}\right), \qquad /5/$$

причому A_j^{∞} $/j=1,2,3/$ – відомі сталі, а сталі $D^{(1)}$ визначаються з умов однозначності переміщень.

Нехай функція

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{k=1}^{N}C_k\zeta^{-k}\right)(\omega'(\zeta)\neq 0, |\zeta|\geq 1) \qquad /6/$$

конформно відображає зовнішність одиничного кола $\gamma\,(|\zeta|\geq 1)$ на зовнішність контура $\mathcal{L}$. Тоді співвідношення /4/ запишемо як

$$t_j = \frac{R_j}{R}\left[\omega(\sigma) + m_j\,\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right], \quad (t_j \in \mathcal{L}_j,\ \sigma \in \gamma), \qquad /7/$$

де

$$R_j = \frac{R(1 - i\mu_j)}{2}\ ; \quad m_j = \frac{1 + i\mu_j}{1 + i\mu_j} \qquad (j = 1,2,3).$$

Увівши позначення $\varphi_j(z_j) = \varphi_{*j}(\zeta_j)$, $\Phi_3(z_3) = \Phi_{*3}(\zeta_3)$, з врахуванням /5/, /6/, /7/ функція температури $\Phi_3(z_3)$ і комплексні потенціали $\Phi_j(z_j) = \varphi_j'(z_j)$ /j = I,2/ допускають зображення [2,3]

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{D^{(j)} + \sum\limits_{k=1}^{N} k a_k^{(j)} \zeta_j^{k} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, b_k^{(j)} \zeta_j^{-k}}{R_j\left[\left(\zeta_j - \sum\limits_{k=1}^{N} k C_k \zeta_j^{-k}\right) - m_j \bar{R} R^{-1}\left(\zeta_j^{-1} - \sum\limits_{k=1}^{N} k \bar{C}_k \zeta_j^{k}\right)\right]}\,, \qquad /8/$$

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{k=1}^{N} g_k \zeta_3^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} G_k \zeta_3^{-k}. \qquad /9/$$

Для обмеженості функцій $\varphi_j'(\zeta_j)$ і $\Phi_3'(\zeta_3)$ в областях $1\leq|\zeta_j|<\infty$ повинні виконуватися умови [I]

$$\varphi_{*j}'(\zeta_j^{(\nu)}) = 0 \qquad (j = 1,2)\ (\nu = 1,2,\ldots,N-1), \qquad /10/$$

$$\Phi_{*3}(\zeta_3^{(\nu)}) = 0 \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N-1), \qquad /11/$$

де $\zeta_j^{(\nu)}$ – корені рівнянь

$$\zeta_j - \sum_{k=1}^{N} k C_k \zeta_j^{-k} - m_j \bar{R} R^{-1}\left(\zeta_j^{-1} - \sum_{k=1}^{N} k \bar{C}_k \zeta_j^{k}\right) = 0 \quad (j = 1,2,3) \qquad /12/$$

за модулем більші одиниці $(|\zeta_j^{(\nu)}| > 1)$.

Для визначення коефіцієнтів розкладу шуканих функцій $\varphi_j(z_j)$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $4(N-1)$ виду

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2}\left[(1 + i\bar{\mu}_j)\bar{b}_n^{(j)} + (1 + i\mu_j)a_n^{(j)}\right] = q_n\,, \\ \sum_{j=1}^{2}\left[(1 + i\mu_j)b_n^{(j)} + (1 + i\bar{\mu}_j)\bar{a}_n^{(j)}\right] = f_n\,,\end{gathered} \qquad /13/$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} k \bar{a}_k^{(j)} (\zeta_j^{(\nu)})^{-k} - \sum_{k=1}^{N-1} k a_k^{(j)} (\zeta_j^{(\nu)})^{k} = \sum_{k=N}^{2N} k a_k^{(j)} (\zeta_j^{(\nu)})^{k} + D^{(j)} - \sum_{k=N}^{\infty} k \bar{a}_k^{(j)} (\zeta_j^{(\nu)})^{-k}.$$

$a_n^{(j)}$ при $n > 2N$, $(j = 1,2)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N-1)$.

Функцію температури $T_c(s)$, задану на контурі отвору L, розкладемо на одиничному колі $\gamma\ (|\sigma| = 1)$ у комплексний ряд Фур"є

$$T_c = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\nu}_n \sigma^{-n} \quad (\nu_0 = T_\infty). \qquad /14/$$

Внесемо /7/, /8/, /14/ у граничну умову /1/, тоді

$$\sum_{n=1}^{N} (g_n \sigma^n + \bar{g}_n \sigma^{-n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{G}_n \sigma^n + G_n \sigma^{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\nu}_n \sigma^{-n} \text{ на } \gamma. \ /15/$$

Із співвідношення /15/ знаходимо

$$G_n = \bar{\nu}_n - \bar{g}_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N), \quad G_n = \bar{\nu}_n \quad \text{при} \quad n > N, \qquad /16/$$
$$G_0 = \frac{1}{2} \nu_0, \quad \nu_0 = T_\infty.$$

Коефіцієнти g_n /n = 1, 2, ..., N – 1/ визначають з такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують з /11/

$$\sum_{n=1}^{N-1} n [\bar{g}_n (\zeta_3^{(\nu)})^{-n} + g_n (\zeta_3^{(\nu)})^{n}] = \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{\nu}_n (\zeta_3^{(\nu)})^{-n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N-1), /17/$$

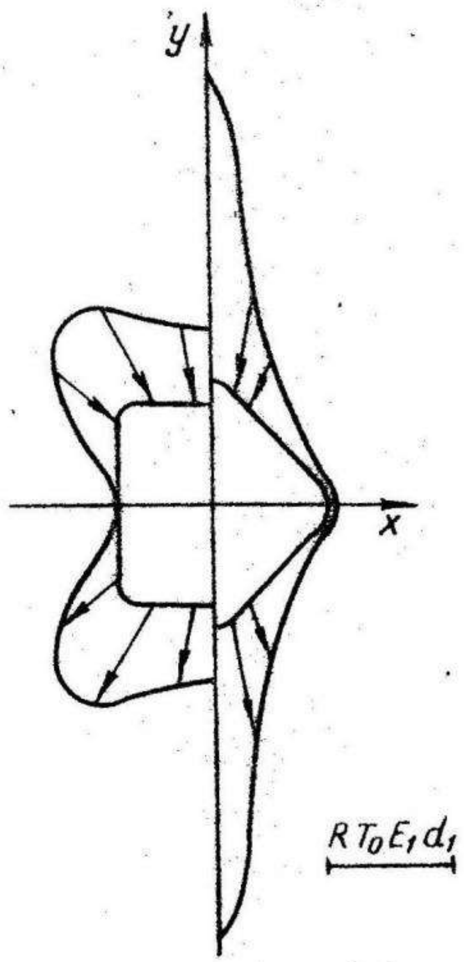
де $\zeta_3^{(\nu)}$ – корінь рівняння /12/ / j = 3/ $(|\zeta_3^{(\nu)}| > 1)$.

Як числовий приклад розглянемо ортотропну пластинку з квадратним отвором. У цьому випадку N = 3, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = \bar{C}_3$, $R = \bar{R}$, $K_{12} = 0$, $\alpha_6 = 0$, $\mu_j = i\beta_j$ / j = 1, 2, 3/. При додатному C_3 вершини квадрата лежать на осях x і y, а при від"ємному C_3 – сторони квадрата паралельні осям координат. На контурі квадратного отвору задана температура, що змінюється за законом $T/_L = T_0 y$. Коефіцієнти розкладу функції температури /14/ відповідно дорівнюють

$$\nu_0 = 0, \ \nu_1 = -\frac{1}{2} R T_0 i, \ \nu_2 = 0, \ \nu_3 = \frac{1}{2} R T_0 C_3 i, \ \nu_n = 0 \quad \text{при} \quad n > 3.$$

Обчислення проведені для пластинки, виготовленої зі склотекстоліту КАСТ-В з такими пружними і теплофізичними характеристиками:

$$\frac{E_1}{E_2} = 1{,}45; \quad \frac{E_1}{G} = 6; \quad \nu_1 = 0{,}17; \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0{,}8; \qquad \frac{K_{22}}{K_H} = 0{,}6 \qquad /18/$$



На рисунку показані графіки розподілу напружень σ_θ у частках $(T_0 E_1 \alpha, R)$ по контуру квадратного отвору з закругленими кутами $(C_3 = \pm\frac{1}{9})$ відповідно для двох орієнтацій отвору.

Аналогічний приклад розглянуто у праці [5] методом малого параметра.

С п и с о к л і т е р а т у р и: 1. М а р т ы н о в и ч Т.Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием.-Изв, АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 6. 2. 2. М а р т ы н о в и ч Т.Л., Н и щ е н к о И.А., М а х м у л А л л а м. Температурные напряжения около эллиптического отверстия в анизотропной пластинке. - Прикладная механика, 1974, т.10, вып. 1. 3. К і б а л ь н і к о в а С.І. Визначення температурних напружень в рівномірно нагрітій анізотропній пластинці з криволінійним отвором. - Вісник Львів.політехн.ін-ту, № 119, Математика і механіка, 1977. 4. У з д а л е в А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд-во Саратовского ун-та, 1967. 5. У з д а л е в А.И., Ю р ь е в а А.А. Концентрация температурных напряжений в ортотропной пластинке с квадратным отверстием. - Прикладная механика, 1970, т.6, вып.2.

УДК 533.311

О.О. Євтушенко

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ СМУГИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Наше дослідження, як і праці [1,2], присвячене задачі про рівновагу кусково-однорідної смуги з тонкостінним пружним включенням на прямій лінії розділу матеріалів /рис.1/.

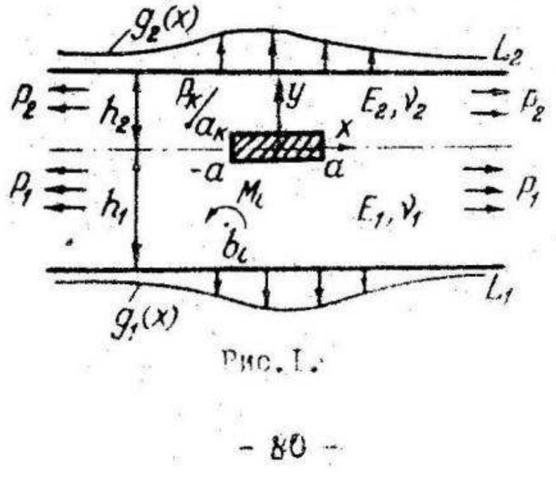


Рис.1.