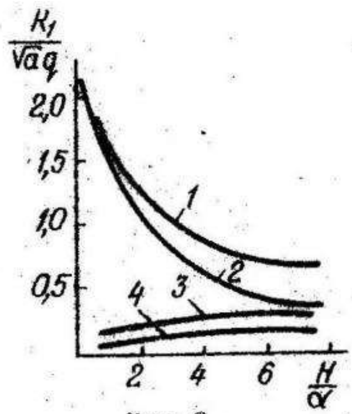


Рис.2.

Обчислення проводили при $a/h=10, \nu_0=\nu=1/3$ з точністю до 1%, яку оцінювали числовим методом. На рис. 2 показано залежність коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень k_1 від відносної ширини смуги H/a. Криві 1–4 відповідають значенням відносної жорсткості включення $k=E_0/E$: 10^{-3}, 10^{-1}, 10, 10^3.

Список літератури: 1. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. – Прикладная механика, 1972, т.8, вып. 11. 2. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. – Прикладная механика, 1975, т.39, вып.3. 3. Сулым Г.Т., Грилицкий Д.В., Белокур И.П. Влияние подкрепляющих полуплоскостей на коэффициенты интенсивности напряжений у концов трещины в полосе. – ФХММ, 1976, № 5. 4. Сулым Г.Т., Грилицкий Д.В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составного тела с трещинами. – ФХММ, 1976, №2.

УДК 539.311

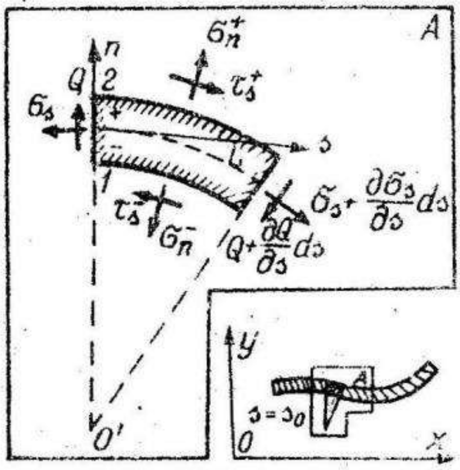
Г.Т. Сулим

ТЕРМОПРУЖНІ УМОВИ ВЗАЄМОДІЇ СЕРЕДОВИЩА З ТОНКОСТІННИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Визначимо умови, які у плоскій задачі теорії пружності задовольняють граничні значення напружень і переміщень у пружному середовищі на лінії контакту з ортотропним термопружним включенням малої товщини.

Від їх точності залежить достовірність і область застосування розв"язку задач про концентрацію напружень біля тонкостінних включень у конструктивних елементах.

Величини, що характеризують температуру T і напружено-деформований стан на лівому та правому краях включення, позначатимемо індексами "–" та "+", а у відповідних точках матриці – індексами "1" та "2" /див.рисунок/.



Складаючи рівняння рівноваги вузького елемента включення довжиною $ds = \rho d\theta$ і одиничною висотою в напрямку осі z, що перпендикулярна до площини xOy, одержуємо

$$Q - h\rho(\sigma_s'^{+} + \sigma_s'^{-}) - \rho(\tau_{sn}^{+} - \tau_{sn}^{-}) - h(\tau_{sn}^{+} + \tau_{sn}^{-}) = 0,$$

$$\rho Q' - \rho(\sigma_n^{+} - \sigma_n^{-}) + h(\sigma_s^{+} + \sigma_s^{-}) - h(\sigma_n^{+} + \sigma_n^{-}) = 0, \qquad /1/$$

$$Q + \frac{1}{3}h^2(\sigma_s'^{+} - \sigma_s'^{-}) + h(\tau_{sn}^{+} + \tau_{sn}^{-}) + \frac{h^2}{\rho}(\tau_{sn}^{+} - \tau_{sn}^{-}) = 0,$$

де s та n – напрямки дотичної і нормалі до серединної лінії L включення; ρ – радіус кривизни лінії L; $2h$ – товщина включення; Q – перерізуюча сила у поперечному перерізі включення, штрихом позначено частинну похідну по s.

Матеріал включення вважаємо ортотропним з головними напрямками ізотропії s , n і z . Тоді наявні формули

$$\varepsilon_i = a_{ii}\sigma_i - a_{ij}\sigma_j + \alpha_i (T - T_0),\ \gamma_{sn} = b_{sn}\tau_{sn},\ (i,j = s,n;\ i \neq j), \quad /2/$$

це у випадку плоскої деформації

$$a_{ii} = \frac{1}{E_i}(1 - \nu_{iz}\nu_{zi});\ a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{E_i}(\nu_{ij} + \nu_{iz}\nu_{zj});\ \alpha_i = \alpha(1 + \nu_{zi});$$

для узагальненого плоского напруженого стану

$$a_{ii} = \frac{1}{E_i};\ a_{ij} = a_{ji} = \frac{\nu_{ij}}{E_i};\ \alpha_i = \alpha,$$

а також $b_{sn} = 1/G_{sn}$; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення включення; T – абсолютна температура включення; T_0 – значення, від якого починається відрахунок температури включення; E_i, ν_{ij}, ν_{iz}, ν_{zj}, G_{sn} – пружні постійні включення.

Компоненти деформації визначаються відомими залежностями

$$\varepsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial n},\ \varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{\rho},\ \gamma_{sn} = \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{u_s}{\rho}. \quad /3/$$

Згідно з формулами /2/,

$$\varepsilon_s^+ \pm \varepsilon_s^- = a_{ss}(\sigma_s^+ \pm \sigma_s^-) - a_{sn}(\sigma_n^+ \pm \sigma_n^-) + \alpha_s[(T_+ - T_0) \pm (T_- - T_0)], \quad /4/$$

$$\varepsilon_n^+ \pm \varepsilon_n^- = a_{nn}(\sigma_n^+ \pm \sigma_n^-) - a_{ns}(\sigma_s^+ \pm \sigma_s^-) + \alpha_n[(T_+ - T_0) \pm (T_- - T_0)], \quad /5/$$

$$\gamma_{sn}^+ \pm \gamma_{sn}^- = b_{sn}(\tau_{sn}^+ \pm \tau_{sn}^-), \quad /6/$$

де внаслідок малої товщини $2h$-включення наявні наближені рівності

$$\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^- = \frac{u_n^+ - u_n^-}{h},\ \varepsilon_s^+ \pm \varepsilon_s^- = u_s'^+ \pm u_s'^- + \frac{u_n^+ \pm u_n^-}{\rho},$$

$$\gamma_{sn}^+ + \gamma_{sn}^- = \frac{u_s^+ - u_s^-}{h} + u_n'^+ + u_n'^- - \frac{u_s^+ + u_s^-}{\rho},\ \gamma_{sn}^+ - \gamma_{sn}^- = u_n'^+ - u_n'^- - \frac{u_s^+ - u_s^-}{\rho}. \quad /7/$$

Після інтегрування другого рівняння рівноваги /1/ з урахуванням /5/ і /7/ запишемо

$$Q = Q_0 + \int_{s_0}^{s}\left\{\sigma_n^+ - \sigma_n^- + \frac{h}{\rho}(1 - \alpha_n)(\sigma_n^+ + \sigma_n^-) + \alpha_\rho[u_n^+ - u_n^- - \alpha_n h(T_+ + T_- - 2T_0)]\right\} ds,$$

де $Q_0 = 0$ – значення перерізуючої сили Q на торці включення $s = s_0$ можна наближено вважати рівним нулю;

$$a_\rho = \frac{1}{\rho a_{nn}};\ a_i = \frac{a_{ii}}{a_{ij}};\ b_i = \frac{a_{ss}a_{nn} - a_{sn}a_{ns}}{a_{in}};\ c_i = \frac{\alpha_s a_{in} + \alpha_n a_{si}}{a_{in}}\ (i, j = s, n;\ i \neq j).$$

Якщо з першого і третього рівняння рівноваги /I/ виключити Q, використати поряд із /7/ рівність /4/ та знехтувати величиною h^2/ρ^2 порівняно з одиницею, то отримаємо вираз для середнього значення повздовжнього розтягуючого напруження σ_{sc} в поперечному перерізі включення

$$\sigma_{sc} = \frac{1}{2}\left(\sigma_s^+ + \sigma_s^-\right) = \sigma_{sc}^0 + \frac{1}{h}\int_{s_0}^{s}\left[\frac{1}{2}\left(\tau_{sn}^- - \tau_{sn}^+\right) - \frac{h}{\rho}\left(\tau_{sn}^+ + \tau_{sn}^-\right)\right]ds - \frac{h}{6\rho}\left(\sigma_s^+ - \sigma_s^-\right),$$

де

$$\sigma_s^+ - \sigma_s^- = \frac{1}{a_s}\left(\sigma_n^+ - \sigma_n^-\right) + \frac{1}{a_{ss}}\left(u_s^{+\prime} - u_s^{-\prime}\right) + \frac{1}{\rho a_{ss}}\left(u_n^+ - u_n^-\right) - \frac{\alpha_s}{a_{ss}}\left(T_+ - T_-\right);$$

σ_{sc}^0 – значення σ_{sc} у перерізі $s = s_0$.

Умови ідеального механічного контакту включення з матрицею запишемо

$$u_{i1} = u_i^-,\ u_{i2} = u_i^+,\ \sigma_{n1} = \sigma_n^-,\ \sigma_{n2} = \sigma_n^+,\ \tau_{sn}^1 = \tau_{sn}^-,\ \tau_{sn}^2 = \tau_{sn}^+\ (i = s, n). \qquad /8/$$

Тепер вкажемо чотири варіанти умов взаємодії середовища із включенням.

I. Співвідношення /4/–/6/, взяті зі знаками "+", а також третє рівняння рівноваги /I/ з врахуванням наближень /7/ та умов /8/, дають

$$\begin{aligned}
&u_{s2}' + u_{s1}' + \left[\frac{u_{n2} + u_{n1}}{\rho}\right]^* = 2a_{ss}\sigma_{sc} - a_{sn}\left(\sigma_{n2} + \sigma_{n1}\right) + \alpha_s\left(T_+ + T_- - 2T_0\right),\\
&\frac{1}{h}\left(u_{n2} - u_{n1}\right) = a_{nn}\left(\sigma_{n2} + \sigma_{n1}\right) - 2a_{sn}\sigma_{sc} + \alpha_n\left(T_+ + T_- - 2T_0\right),\\
&\frac{1}{h}\left(u_{s2} - u_{s1}\right) + \left[\left(u_{n2}' + u_{n1}'\right) - \left[\frac{1}{\rho}\left(u_{s2} + u_{s1}\right)\right]^{**}\right]^{***} = b_{sn}\left(\tau_{sn}^2 + \tau_{sn}^1\right), \qquad /9/\\
&\int_{s_0}^{s}\left\{\frac{3}{h}\left(\tau_{sn}^2 + \tau_{sn}^1\right) + \left[\frac{1}{\rho}\left(\tau_{sn}^2 - \tau_{sn}^1\right)\right]^* + \frac{Q}{h^2}\right\}ds + \sigma_s^+ - \sigma_s^- = 0
\end{aligned}$$

поряд з

$$Q = \int_{S_0}^{S} \left\{ \sigma_{n2} - \sigma_{n1} + \left[\frac{h}{\rho} (1-\alpha_n)(\sigma_{n2}+\sigma_{n1}) \right]^{*} + \alpha_\rho \left[u_{n2} - u_{n1} - \alpha_n h (T_+ + T_- - 2T_0) \right] \right\} ds,$$

$$\sigma_{sc} = \sigma_{sc}^{0} + \frac{1}{h} \int_{S_0}^{S} \left\{ \frac{1}{2} (\tau_{sn}^{1} - \tau_{sn}^{2}) - \left[\frac{h}{\rho} (\tau_{sn}^{2} + \tau_{sn}^{1}) \right]^{*} \right\} ds - \frac{h}{6\rho} (\sigma_s^{+} - \sigma_s^{-}),$$

$$\sigma_s^{+} - \sigma_s^{-} = \frac{1}{\alpha_s} (\sigma_{n2} - \sigma_{n1}) + \frac{1}{\alpha_{s1}} (u_{s2}' - u_{s1}') + \left[\frac{1}{\rho a_{ss}} (u_{n2} - u_{n1}) \right]^{**} - \frac{\alpha_t}{\alpha_{s1}} (T_+ - T_-).$$

Зірочки означають, що відповідними членами у квадратних дужках при певних умовах можна знехтувати, про що буде мова далі.

Замість однієї довільної з двох перших умов /9/ зручно взяти співвідношення, яке отримуємо виключенням з них значень σ_{sc}.

$$u_{s2}' + u_{s1}' + \left[\frac{1}{\rho} (u_{n2} + u_{n1}) \right]^{**} + \frac{\alpha_t}{h} (u_{n2} - u_{n1}) = \beta_s (\sigma_{n2} + \sigma_{n1}) + \beta_t (T_+ + T_- - 2T_0). \quad /10/$$

Умови для прямолінійного включення одержуємо при $\rho \to \infty$.

Можна запропонувати цілий ряд спрощень умов взаємодії:

а/ у кожному з рівнянь рівноваги /I/ четверті доданки дістаємо, врахувавши різниці у довжині ліній контакту елемента включення зліва та справа, і при малому h/ρ ними можна знехтувати. Припущення вказує на те, що $h(\sigma_n^{+} + \sigma_n^{-})/\rho$ мале порівняно з $\sigma_n^{+} - \sigma_n^{-}$ і тому в отриманих співвідношеннях можна відкинути квадратні дужки, відзначені однією зірочкою;

б/ значення h/ρ вважається малим порівняно з одиницею. Тому у виразах /7/ можна знехтувати величинами, які містять множник $1/\rho$, а в умовах не брати до уваги виразів, що відзначені двома зірочками;

в/ жорсткість включення на згин мала. Тоді виразом $h^2(\sigma_s^{1+} - \sigma_s^{+-})$ у третьому рівнянні рівноваги /I/ можна знехтувати і четверта умова з /9/ набере вигляду

$$Q + \left[\frac{h^2}{\rho} (\tau_{sn}^{2} - \tau_{sn}^{1}) \right]^{*} + 3h (\tau_{sn}^{2} + \tau_{sn}^{1}) = 0; \quad /11/$$

г/ розглянемо абсолютно гнучке ниткоподібне тонке включення. У цьому випадку можна вважати, що $\sigma_s^{+} - \sigma_s^{-} = 0$, $Q = 0$ і не розглядати трете рівняння рівноваги /I/, а замість четвертої умови /9/ слід взяти залежність

$$\sigma_{n2}-\sigma_{n1}+\frac{h}{\rho}\int_{s_0}^{s}\frac{1}{h}(\tau_{sn}^{2}-\tau_{sn}^{1})ds+\frac{h}{\rho}\left[\sigma_{n2}+\sigma_{n1}+\int_{s_0}^{s}\frac{1}{\rho}(\tau_{sn}^{2}+\tau_{sn}^{1})ds-2\sigma_{sc}^{0}\right]^{*}=0, \quad /12/$$

яку отримують з першого і другого рівнянь рівноваги після виключення $\sigma_s^{+}+\sigma_s^{-}$ та підстановки $Q=0$. Крім того, у третьому співвідношенні /9/ треба знехтувати членом, що відзначений трьома зірочками;

д/ вважаючи товщину включення досить малою, включення гнучким і беручи до уваги всі попередні припущення та нехтуючи поперечними деформаціями, одержуємо максимально спрощені умови для малоподатливого, але гнучкого включення

$$u_{n1}=u_{n2}, \; u_{s1}=u_{s2}, \; \sigma_{n1}=\sigma_{n2}, \quad /13/$$

$$u_{s2}'+u_{s1}'=2a_{ss}\sigma_{sc}-a_{sn}(\sigma_{n2}+\sigma_{n1})+\alpha_s(T_{+}+T_{-}-2T_0). \quad /14/$$

А коли ще вважати, що нормальні поперечні напруження σ_n не викликають повздовжніх деформацій включення $(a_{sn}=0)$, то замість /14/ дістаємо ще простішу умову

$$u_{s2}'+u_{s1}'=2a_{ss}\sigma_{sc}+\alpha_s(T_{+}+T_{-}-2T_0), \quad /15/$$

де, як і для /14/,

$$\sigma_{sc}=\sigma_{sc}^{0}+\frac{1}{2h}\int_{s_0}^{s}(\tau_{sn}^{1}-\tau_{sn}^{2})ds.$$

Співвідношення /13/ і /15/ без врахування температури використовуються переважною більшістю дослідників, що вивчають задачі про тонкостінні включення [4,7], а також різні модифікації задачі Райснера про витягування стержня з пружного середовища, чи Мелана про накладку на пружну півплощину.

Подібне до /15/ співвідношення можна отримати з перших двох умов /9/, якщо з них виключити $\sigma_{n2}+\sigma_{n1}$, прийняти $\varepsilon_n^{+}+\varepsilon_n^{-}=0$ і згадані вище спрощення

$$u_{s2}'+u_{s1}'=2b_n\sigma_{sc}+c_n(T_{+}+T_{-}-2T_0). \quad /16/$$

Така умова, поряд з /I3/, використовується Аткінсоном [5] для ізотропного прямолінійного включення при відсутності температурного нагрівання. У праці [6] формула /I6/ узагальнюється на випадок, коли включення контактує з матрицею по певній частині своєї бічної поверхні.

К.С.Чобанян і А.С.Хачикян [4] вивели умови взаємодії гнучкого ортотропного включення без температурних членів з неявним використанням припущень а, б, г, однак до розв"язання задач у цій та інших роботах користувалися лише гранично спрощеними умовами /I3/, /I5/. У публікації [2] за умови взаємодії прямолінійного ізотропного включення прийнято /I0/, третю формулу з /9/ та $\sigma_{n1}=\sigma_{n2}, \tau_{sn}^{1}=\tau_{sn}^{2}$. Подібні, але більш прості умови, використовує Г.П.Черепанов [3] для абсолютно пластичного включення з нестисливого матеріалу. Відзначимо, що в усіх згаданих працях вважають торцьове зусилля $\sigma_{sc}^{0}=0$. Виняток становлять автори статті [I].

2. Для тонкого включення можна наближено прийняти

$$\varepsilon_n^{+}-\varepsilon_n^{-}=0. \qquad /I7/$$

Ця умова виконується точно за відсутності згину, при повній симетрії задачі. Тоді з /4/ і /5/ маємо

$$u_{s2}'-u_{s1}'+\left[\frac{1}{\rho}(u_{n2}-u_{n1})\right]^{**}=b_s(\sigma_{n2}-\sigma_{n1})+c_s(T_+-T_-). \qquad /I8/$$

Це співвідношення разом з першими трьома з /9/ дає другий варіант умов взаємодії, які стосовно прямолінійного ізотропного пружного включення використовувались у праці [I].

3. Беручи до уваги четверте співвідношення /7/, яке слід вважати точним при справедливості гіпотези плоских перетинів, згідно з /6/ отримаємо

$$u_{n2}'-u_{n1}'-\left[\frac{1}{\rho}(u_{s2}-u_{s1})\right]^{**}=b_{sn}(\tau_{sn}^{2}-\tau_{sn}^{1}). \qquad /I9/$$

.I2

Цей вираз разом з /I0/ і двома останніми з /9/ становить третій варіант умов.

4. Третя формула з /9/, а також /I0/, /I8/, /I9/ дають у сукупності четвертий варіант, який є найбільш простий для практичного застосування.

Кожний з варіантів 2,3,4 допускає, як і перший, відповідні спрощення. Варіанти апробували на основних граничних випадках.

Якщо $E_s = E_n = \infty$, то всі варіанти дають відносно прості умови для жорсткого включення, яке допускає теплове розширення, зокрема при відсутності температурного поля /або $\alpha = 0$ / матимемо граничні умови $u_{n1} = u_{n2} = u_{s1} = u_{s2} = 0$.

Коли розглянути гнучке ниткоподібне включення і прийняти $E_s = E_n = \infty$, $T_r = T = T_0$, то всі розглядувані варіанти дадуть умови для нерозтяглива ниткоподібного включення: /I2/ та

$$u_{s1} = u_{s2}\,,\quad u_{n1} = u_{n2}\,,\quad u'_{s2} + u'_{s1} + \frac{1}{\rho}(u_{n2} + u_{n1})\,. \qquad /20/$$

При $E_s = E_n = 0$ маємо граничні умови для неконтактуючої щілини $\sigma_{n1} = \sigma_{n2} = \tau'_{sn} = \tau^2_{sn} = 0$.

Очевидно, що розв"язок задачі повинен задовольняти умову

$$u_{n2} - u_{n1} \geq -2h \text{ або } u_n^+ - u_n^- \geq -2h\,, \qquad /2I/$$

яка відображає фізичну неможливість проникнення берегів включення один поза інший. Якщо отриманий розв"язок не задовольняє /2I/, то слід змінити постановку задачі: лінію L розділити на L' , де виконується /2I/ та наявні співвідношення вибраного варіанту умов взаємодії, і на L'' , де

$$u_{n2} - u_{n1} = -2h \qquad /22/$$

приймається замість другої умови /9/ у варіантах I та 2 і замість /I0/–у варіантах 3,4. Відзначимо, що для отримання умов контактуючої щілини у варіанті I та 2 необхідно додатково вважати $\alpha_{sn} = 0$, тоді як варіанти 3 й 4 не вимагають додаткових припущень.

Якщо розглянути включення з абсолютно пластичного, але нестисливого матеріалу (рідке нестисливе включення), то у випадку плоскої деформації перші дві умови з /9/, які використовують у варіантах I та 2, вироджуються у дві однакові, і тоді необхідно залучати додаткові умови. Варіанти 3 і 4 цього не вимагають.

Розглянемо включення, модулі пружності E_s , E_n якого відмінні від нуля, але скінченні, та спрямуємо h до нуля. Тоді варіанти I,3 дають умови ідеального механічного контакту $u_{n1} = u_{n2}, u_{s1} = u_{s2}$, $\sigma_{n1} = \sigma_{n2}, \tau^1_{sn} = \tau^2_{sn}$, тоді як варіанти 2 і 4 дають ці умови, коли на берегах безмежно малого включення відсутній стрибок температур $T_+ = T_-$. Це може не виконуватися, якщо теплопровідність включення дорівнює нулеві.

Точність умов взаємодії залежить від припущень, покладених в їх основу. Найбільш точні співвідношення варіанта I, а далі – варіанта 3; менш точні – співвідношення варіантів 2 і 4, оскільки не завжди наявна умова /I7/. Найбільш універсальним можна вважати варіант 3, бо при його використанні не треба робити ніяких застережень.

Список літератури: I. Грилицкий Д.В., Сулым Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. – Прикладная математика и механика, 1975, т.39, вып.3. 2. Куршин Л.М., Суздальницкий И.Д. Напряжения в плоскости с заполненной щелью. – Прикладная механика, 1973, т.9, вып.10. 3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974. 4. Чобанян К.С., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. – Известия АН Арм.ССР. Механика, 1967, т.20, №6. 5. Atkinson C. Some ribbon-like inclusion problems. – International Journal of Engineering Science, 1973, v.11, №2. 6. Brussat T. R., Westmann R. A. A Westergaard-type stress function for line inclusion problem. - International Journal of Solids and Structures, 1975, v. 11, №6. 7. Erdogan F., Gupta G. D. Stresses near a flat inclusion in bonded dissimilar materials. - International Journal of Solids and Structures, 1972, v. 8, №4.