

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

ISSN 0201—758X
0320—6572

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК 15



ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ

1979

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК 15

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ

Л Ь В І В

ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ
УНІВЕРСИТЕТІ ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»

1979

ББК 22.19

Л89

УДК 518

Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат., вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, 94 + 8 с. /на укр.яз./.

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения функциональных уравнений и задач оптимизации, исследованию свойств диаграмм и мажорант Ньютона, а также по решению задач теории упругости.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Списки лит. в конце статей.

Редакційна колегія: проф., д-р техн. наук Д.В.Гриліцький /відп. ред. /; доц., канд. фіз.-мат. наук Ю.М.Щербіна /відп. секр. /; доц., канд. фіз.-мат. наук М.Я.Бартіш; доц., канд. фіз.-мат. наук А.І.Кардаш; проф., д-р техн. наук Н.П.Флейшман.

Редакція науково-технічної та природничої літератури

В 20203 - 044
М 225/04/-79 I702050000

© Львівський державний
університет, 1979

А.І.Кардаш, О.М.Костовський, І.І.Чулик

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІАГРАМИ НЬЮТОНА

ПОДВІЙНОГО РЯДУ ЛОРАНА

Нехай задано ряд Лорана

$$f(z, w) = \sum_{\kappa, l=-\infty}^{\infty} a_{\kappa l} z^{\kappa} w^l, \quad a_{00} \neq 0, \quad /1/$$

який збігається у бікруговій області D . Позначимо через E_f множину точок площини μ, ν з цілочисельними координатами κ, l , для яких $a_{\kappa l} \neq 0$, а через Q_f — опуклу оболонку множини E_f . Для кожної точки $(\kappa, l) \in E_f$ побудуємо в евклідовому просторі змінних μ, ν, λ точку $P_{\kappa l}(\kappa, l, -l\pi/a_{\kappa l})$. Множину всіх точок $P_{\kappa l}$ запишемо як Φ_0 , а опуклу оболонку множини Φ_0 як Φ_f . Нехай $\mathcal{X}(\mu, \nu) = \frac{i\pi f \lambda}{(\mu, \nu, \lambda) \in \Phi_f}$,

тоді поверхню, яка описується рівнянням

$$\lambda = \mathcal{X}(\mu, \nu), \quad (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f, \quad /2/$$

назвемо діаграмою Ньютона ряду /1/. Функція $\mathcal{X}(\mu, \nu)$ опукла на множині $\bar{Q}_f$. Якщо $A(\mu_1, \nu_1), B(\mu_2, \nu_2)$ — дві довільні точки множини $\bar{Q}_f$, то для будь-якої точки $C(\mu, \nu)$ відрізка AB виконується нерівність

$$(\nu_2 - \nu_1) \mathcal{X}(\mu, \nu) \leq (\nu_2 - \nu_1) \mathcal{X}(\mu_1, \nu_1) + (\nu - \nu_1) \mathcal{X}(\mu_2, \nu_2); \quad /3/$$

при цьому $\nu_2 > \nu_1$.

Введемо функцію $T(\mu, \nu) = \exp[-\mathcal{X}(\mu, \nu)]$, визначену і неперервну на $\bar{Q}_f$. Ряд

$$M_f(z, w) = \sum_{\kappa, l=-\infty}^{\infty} T_{\kappa l} z^{\kappa} w^l, \quad /4/$$

де $T_{\kappa l} = T(\kappa, l)$, назвемо мажорантою Ньютона ряду /1/.

Нехай R_1, R_2 — максимальні, а r_1, r_2 — мінімальні радіуси збіжності ряду /1/ по z і w відповідно.

Теорема I. Якщо максимальні та мінімальні радіуси збіжності ряду /1/ задовольняють умови

$$0 < r_1 < R_1 < \infty, \quad 0 < r_2 < R_2 < \infty, \quad /5/$$

то для всіх α і β , де $|\alpha| + |\beta| = 1$, існує скінченна границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{A}(\alpha t, \beta t)}{t} = F(\alpha, \beta). \quad /6/$$

Доведення. Як відомо [2],

$$\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{A}(\kappa, 0)}{\kappa} = \ln R_1, \quad \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{A}(-\kappa, 0)}{\kappa} = -\ln r_1,$$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{A}(0, l)}{l} = \ln R_2, \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{A}(0, -l)}{l} = -\ln r_2,$$

тобто $F(1, 0), F(-1, 0), F(0, 1), F(0, -1)$ існують і скінченні. Нехай

$$c = \max \{F(1, 0), F(-1, 0), F(0, 1), F(0, -1)\},$$

при цьому $c > 0$. Тоді для всіх $t > 0$

$$\frac{\mathfrak{A}(\alpha t, \beta t)}{t} \leq c. \quad /7/$$

Із /7/ випливає існування скінченної границі /6/. Розглянемо сім'ю площин вигляду

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha t, \\ \nu &= \beta t, \quad |\alpha| + |\beta| = 1, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad /8/$$

а також сім'ю поверхонь

$$\lambda = (|\mu| + |\nu|) F(\alpha, \beta), \quad |\alpha| + |\beta| = 1. \quad /9/$$

Виключаючи параметри α, β, t , отримуємо у просторі μ, ν, λ конічну поверхню з вершиною в початку координат, рівняння якої має вигляд

$$\lambda = F(\mu, \nu). \quad /10/$$

Нехай $A(\mu_1, \nu_1)$ і $B(\mu_2, \nu_2)$ — дві довільні точки, причому $\nu_2 > \nu_1$.

Розглянемо довільну точку $C(\mu, \nu)$, яка лежить на відрізку AB . Використовуючи /3/ і /6/, одержуємо нерівність

$$(\nu_2 - \nu_1)F(\mu, \nu) \leq (\nu_2 - \nu)F(\mu_1, \nu_1) + (\nu - \nu_1)F(\mu_2, \nu_2),$$

тобто функція $F(\mu, \nu)$ — опукла. Враховуючи, що $\alpha = \alpha(\theta)$, позначимо $F(\alpha(\theta), \theta) = \chi(\theta)$, де $\chi(\theta)$ — двозначна функція, визначена на проміжку $[-1, 1]$. На проміжку $[0, 1]$ функція $\chi(\theta)$ набуває значення

$$\chi_1(\theta) = F(1-\theta, \theta), \quad \chi_2(\theta) = F(\theta-1, \theta),$$

а на проміжку $[-1, 0]$ — відповідно

$$\chi_3(\theta) = F(-1-\theta, \theta), \quad \chi_4(\theta) = F(1+\theta, \theta).$$

Функції $\chi_1(\theta)$ і $\chi_4(\theta)$ та відповідно функції $\chi_2(\theta)$ і $\chi_3(\theta)$, які збігаються при $\theta = 0$, є однозначними вітками кривої $\lambda = \chi(\theta)$ при зміні θ на проміжку $[-1, 1]$. Функції $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$ опуклі на $[0, 1]$ і набувають різних значень при $\theta = 1$. Звідси випливає їх неперервність і диференційовність майже всюди на $(0, 1)$ та існування скінченних лівої і правої похідних у кожній точці інтервалу $(0, 1)$. Неважко переконатись, що на кінцях проміжка $[0, 1]$ має місце одностороння неперервність, а при виконанні умов /5/ на кінцях проміжка $[0, 1]$ існують скінченні ліва та права похідні цих функцій. Аналогічні властивості мають функції $\chi_3(\theta)$ і $\chi_4(\theta)$, які набувають різних значень при $\theta = -1$.

Зі сказаного випливає також неперервність функції $F(\mu, \nu)$ за сукупністю змінних μ і ν . Частинні похідні функції $F(\mu, \nu)$ є функціями відношень

$$\frac{\mu}{|\mu| + |\nu|}, \quad \frac{\nu}{|\mu| + |\nu|}.$$

При цьому

$$\left(\frac{\partial F(\mu, \nu)}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu = \alpha(\theta)t \\ \nu = \theta t}} = \operatorname{sign} \alpha(\theta) [\chi(\theta) - \theta \chi'(\theta)], \quad /11/$$

$$\left(\frac{\partial F(\mu, \nu)}{\partial \nu} \right)_{\substack{\mu = \alpha(\theta)t \\ \nu = \theta t}} = \operatorname{sign} \theta [\chi(\theta) - \theta \chi'(\theta)] + \chi'(\theta), \quad /12/$$

де $\chi'(\theta) = \frac{\alpha'(\theta)}{\alpha(\theta)}$.

Позначимо через $\mathcal{V}_{\kappa_f}$ поверхню /10/, яка є асимптотичним конусом діаграми $\mathcal{V}_f$.

Теорема 2. Поверхня $\mathcal{V}_{\kappa_f}$ є діаграмою Ньютона ряду

$$m_{\kappa_f}(z, w) = \sum_{\kappa, l=-\infty}^{\infty} \exp[-F(\kappa, l)] z^{\kappa} w^l. \quad /13/$$

Легко побачити, що мажоранта Ньютона ряду /13/ є цей же ряд.

Ряд /13/ назовемо асимптотичною мажорантою Ньютона подвійного ряду Лорана /1/.

Відзначимо, що при виконанні умов /5/ функція $F(\mu, \nu)$ визначена на всій площині μ, ν . У загальному ж випадку функція $F(\mu, \nu)$ визначена на множині Q_{κ_f} , яка є проекцією поверхні $\mathcal{V}_{\kappa_f}$ на площину μ, ν .

Доведені вище теореми є узагальненням результатів, одержаних у роботі /1/.

У випадку ряду Лорана часом зручніше замість параметра θ ввести параметр $\Theta \in [0, 2\pi]$.

Теорема 3. Якщо виконуватися умови /5/, то для всіх $\Theta \in [0, 2\pi]$ існує скінченна границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t \cos \Theta, t \sin \Theta)}{t} = \phi(\Theta).$$

При цьому функція $\varphi(\theta)$ – тригонометрично опукла, тобто диференційована майже всюди на $[0, 2\pi]$ і для кожного $\theta \in [0, 2\pi]$ існують скінченні ліва та права похідні функції.

Розглянемо сім'ю площин вигляду

$$\mu = t \cos \theta, \quad \nu = t \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

і сім'ю поверхонь

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \varphi(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Після вилучення параметра θ отримаємо рівняння асимптотичного конуса /10/. При цьому для всіх θ , для яких $\varphi(\theta)$ диференційовна

$$\left(\frac{\partial F(\mu, \nu)}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu = t \cos \theta \\ \nu = t \sin \theta}} = \cos \theta \varphi(\theta) - \sin \theta \varphi'(\theta),$$

$$\left(\frac{\partial F(\mu, \nu)}{\partial \nu} \right)_{\substack{\mu = t \cos \theta \\ \nu = t \sin \theta}} = \sin \theta \varphi(\theta) + \cos \theta \varphi'(\theta).$$

Список літератури: 1. Кардан А.І., Чулик І.І. Дослідження граничних властивостей мажоранти та діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних. – ДАН УРСР, серія А, 1972, № 4. 2. Костовський А.Н. Локалізація по модулям нулей ряду Лорана и его производных. Изд-во при Львов. ун-те, 1967.

А.І.Кардаш, О.М.Костовський, І.І.Чудик

ПРО ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ПОДВІЙНОГО РЯДУ ЛОРАНА
І ЙОГО АСИМПТОТИЧНОЇ МАЖОРАНТИ НЬЮТОНА

Нехай задано ряд Лорана

$$f(z, w) = \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} a_{kl} z^k w^l, \quad a_{00} \neq 0. \quad /1/$$

збіжний у бікруговій області D . У праці [4] розглянуто поняття діаграми Ньютонa $\mathcal{V}_f$ і мажоранти Ньютонa $m_f(z, w)$ ряду /1/ та досліджено їх асимптотичні властивості.

Позначимо через R_1, R_2 - максимальні, а через ϵ_1, ϵ_2 - мінімальні радіуси збіжності ряду /1/ по z і w відповідно та припустимо, що виконуються умови

$$0 < \epsilon_1 < R_1 < \infty, \quad 0 < \epsilon_2 < R_2 < \infty. \quad /2/$$

Тоді на проміжку $[0, 2\pi]$ визначена функція $\Phi(\theta)$, асимптотичний конус $\mathcal{V}_{k_f}$ діаграми $\mathcal{V}_f$ та асимптотична мажоранта Ньютонa на ряду /1/ [4].

Позначимо через M множину всіх точок проміжку $[0, 2\pi]$, а через m - множину точок розриву похідної $\Phi'(\theta)$.

Кожному $\theta \in M \setminus m$ поставимо у відповідність точку з координатами

$$\begin{aligned} x &= \exp [\cos \theta \Phi(\theta) - \sin \theta \Phi'(\theta)], \\ y &= \exp [\sin \theta \Phi(\theta) + \cos \theta \Phi'(\theta)], \end{aligned} \quad /3/$$

а кожному $\theta \in m$ - множину точок, що лежать на кривій

$$x^{\cos \theta} y^{\sin \theta} = \exp [\Phi(\theta)], \quad /4/$$

де

$$\begin{aligned} \exp [\cos \theta \Phi(\theta) - \sin \theta \Phi'(\theta-0)] &\leq x \leq \exp [\cos \theta \Phi(\theta) - \sin \theta \Phi'(\theta+0)], \\ \exp [\sin \theta \Phi(\theta) + \cos \theta \Phi'(\theta-0)] &\leq y \leq \exp [\sin \theta \Phi(\theta) + \cos \theta \Phi'(\theta+0)]. \end{aligned}$$

Рівняння /3/, /4/ визначають криву

$$\Psi(x, y) = 0,$$

/5/

яка має такі властивості:

Теорема 1. Числа x, y , які задовольняють рівняння /3/, /4/, є спряженими радіусами збіжності ряду /1/.

Множина спряжених радіусів збіжності ряду /1/ вичерпується точками, що лежать на кривій /5/, і тому правильна.

Теорема 2. Якщо ряд Лорана /1/ збіжний у бікруговій області D , то крива /5/ є границею області D , на діаграмі Рейнкарта.

Теорема 3. Області збіжності подвійного ряду Лорана /1/, його мажоранти й асимптотичної мажоранти Ньютона збігаються.

Відзначимо, що сформульовані вище результати правильні і при відсутності обмеження /2/, яке накладене для зручності викладу, та відіграє ту ж роль, що й обмеженість повної бікругової області збіжності у випадку подвійних рядів Тейлора [2,3].

Області збіжності рядів Лорана логарифмічно опуклі. Відома теорема Гартогса про логарифмічну опуклість області збіжності ряду Тейлора узагальнена на ряди Лорана Н.Б.Енгібаряном [1]. Оскільки ми границю області збіжності ряду Лорана /1/ запишемо в аналітичному вигляді, то неважко переконатись, що з формул /3/, /4/ випливає логарифмічна випуклість кривої /5/, її диференційовність майже всюди та існування не більш ніж зчисленної множини кутових точок. При виконанні умов /2/ крива за формулою /5/ замкнута. У протилежному випадку крива з /5/ може не бути замкнутою і мати спільні точки з координатними осями, що безпосередньо пов'язане з архітектурою асимптотичного конуса діаграми Ньютона ряду /1/. Зупинимось докладніше на можливих випадках.

1. Функція $F(\mu, \nu)$ визначена для всіх μ, ν , а $\mathcal{V}_x$ — вишуклий конус, який не містить прямої. Тоді крива з /5/ замкнута і не має спільних точок з координатними осями ox та oy .

2. Функція $F(\mu, \nu)$ визначена на множині

$$a\mu + b\nu \geq 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

або її частині, що містить область $\mu \geq 0, \nu \geq 0$:

а/ якщо $a > 0, b > 0$, то крива з /5/ замкнута і має одну спільну точку з ox і oy — початок координат;

б/ якщо $a > 0; b = 0$ /або $a = 0, b > 0$ /, то крива з /5/ замкнута і містить відрізок осі oy /відповідно ox /, виключаючи початок координат;

в/ функція $F(\mu, \nu)$ визначена на множині $\mu \geq 0, \nu \geq 0$.

Тоді крива з /5/ замкнута і включає відрізки координатних осей.

3. Функція $F(\mu, \nu)$ визначена на множині

$$a\mu + b\nu \leq 0, \quad a \geq 0, \quad b \leq 0$$

або її частині:

а/ якщо $a > 0, b > 0$, то рівняння /5/ визначає необмежену область. Вітки кривої з /5/, які відповідають твірним асимптотичного конуса $\mathcal{V}_x$, що проєктуються на пряму $a\mu + b\nu = 0$, пряму-ють у безмежність при зростанні x ;

б/ якщо $a > 0, b = 0$ /або $a = 0, b > 0$ /, то область збіжності, яка визначається рівнянням /5/, необмежена і має вигляд горизонтальної /відповідно вертикальної/ смуги, обмеженої зліва /відповідно знизу/ кривою з /5/.

4. Функція $F(\mu, \nu)$ визначена на множині $a\mu - b\nu \leq 0, a > 0, b > 0$ або її частині. При цьому область збіжності, що визначається рівнянням /5/, є горизонтальною /вертикальною при $a < 0, b < 0$ / нескінченною криволінійною смугою. При цьому твірним

асимптотичного конуса $\mathcal{V}_2$, які проєктуються на пряму $\alpha\mu - \beta\nu = 0$, відповідають криві вигляду з /5/, що асимптотично наближаються до осі ox /відповідно - осі oy /.

5. Функція $F(\mu, \nu)$ визначена на множині

$$\alpha_1\mu - \beta_1\nu \geq 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0,$$

$$\alpha_2\mu + \beta_2\nu \geq 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \beta_2 > 0.$$

При цьому область, яка визначається кривою з /5/, необмежена. Складовими частинами цієї кривої є криві вигляду з /5/ і координатні осі, до яких ці криві асимптотично прямують.

Приклад. Задано ряд Лорана

$$f(z, w) = \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} \exp[-\sqrt{\kappa^2 + l^2}] z^k w^l. \quad /6/$$

Крива спряжених радіусів збіжності ряду /6/ має вигляд

$$\ln^2 x + \ln^2 y = 1.$$

Отже, одержано результати, які можуть бути використані для визначення кривої спряжених радіусів збіжності та дослідження її властивостей.

Список літератури: 1. Енгибарян Н.Б. Области сходимости рядов Лорана. - Известия АН Арм.ССР. Математика, 1967, т.2, № 6. 2. Кардаш А.І., Чулик І.І. Дослідження граничних властивостей мажоранти та діаграми Ньютона функцій двох комплексних змінних. - ДАН УРСР, серія А, 1972, №4. 3. Кардаш А.І., Чулик І.І. Дослідження області збіжності степеневих рядів функцій двох комплексних змінних. - ДАН УРСР, серія А, 1972, № 5. 4. Кардаш А.І., Костовський О.М., Чулик І.І. Асимптотичні властивості діаграми Ньютона подвійного ряду Лорана. У цьому ж Віснику.

Марія Д. Мартиненко

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У МНОГОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

У тривимірному евклідовому просторі розглянемо область D , обмежену скінченним числом замкнених поверхонь типу Ляпунова, які не перетинаються між собою. А саме, позначимо через $S = \bigcup_{\kappa=0}^n S_{\kappa}$ скінченну сукупність замкнених поверхонь S_{κ} . Припустимо для простоти, що поверхня S_0 містить у собі всі поверхні S_{κ} ($\kappa = 1, \bar{n}$), які не містяться одна в одній. Позначимо через D_0 внутрішність поверхні S_0 , а через D_{κ} — зовнішність поверхні S_{κ} ($\kappa = 1, \bar{n}$). Нехай в області D задана еліптична система диференціальних рівнянь другого порядку варіаційного типу від додатно визначеного функціоналу

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^3 A_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + A(x) u(x) = 0, \quad /1/$$

де $A_{ij}(x) = A'_{ji}(x)$, $A(x) = A'(x)$ /штрих означає транспонування/.

Припустимо, що коефіцієнти $A_{ij}(x)$ задовольняють умову /1/

$$-\sum_{i,j=1}^3 \tilde{A}_{ij} \nu_i \tau_j = \operatorname{Re} \left\{ \left[\int \tilde{A}_0'(\beta \nu + \tau) d\beta \right]' \int \beta \tilde{A}_0'(\beta \nu + \tau) d\beta \right\} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \nu_i \nu_j, \quad /2/$$

де $\tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ji} = 2A_{ij}$, $\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji}'$, ν і τ — одиничні вектори;

$(\tau, \nu) = 0$, $\int (\dots) d\beta$ означає інтегрування по простому додатно орієнтованому замкненому контурі, що охоплює β -корені рівняння

$\det A_0(\beta \nu + \tau) = 0$ з додатними уявними частинами,

$$A_0(\alpha) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \alpha_i \alpha_j, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Якщо систему /I/ зобразимо у вигляді

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) = A_0(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) + A_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) = 0,$$

де $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ - однорідний оператор другого порядку; $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ - оператор, який має всі інші похідні, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u = (\begin{smallmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{smallmatrix})$, то припустимо, що коефіцієнти оператора $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовні три рази в E_3 , коефіцієнти при похідних порядку j $|j| = 0; 1; 1$ в операторі $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовні j разів у E_3 ; причому коефіцієнти оператора $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ будуть порядку $O(F(x))$, похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ та їх похідні до другого порядку ростуть не швидше, ніж $F(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, де $F(x)$ - така додатна в E_3 функція, що

$$\iiint_{\infty} \frac{dx}{F(x)} < \infty \quad \text{і} \quad \frac{|\det(A_0(x, 2\pi i \alpha) - \lambda^2 I)|}{[F(x)]^n |\alpha|^{2p} + \lambda^{2p}} \geq \mu > 0$$

для кожної точки $x \in E_3$ і для кожної дійсної точки $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$, λ - достатньо велике додатне число.

У цьому випадку існує фундаментальна матриця системи /I/ у всьому просторі [2], яку позначимо через $\omega(x, y)$, а у кожній із областей $D_0, \dots, D_n$ існує матриця Гріна, яка має тільки точкову особливість. Існування матриці Гріна для областей D_n $|n| = 0, \overline{n}$ випливає з існування розв'язку задачі Діріхле для цих областей [1].

Теорема. Будь-який розв'язок системи /I/, неперервний та обмежений в області D і на її межі, зображується єдиним способом у вигляді суми розв'язків цієї системи в однозв'язних областях $D_0, \dots, D_n$, причому в необмежених областях $D_0, \dots, D_n$ відповідні розв'язки системи /I/ регулярні на безмежності.

Відзначимо, що такий розклад розв'язку системи /I/ випливає з інтегрального зображення розв'язків системи /I/ в D через

узагальнені потенціали простого та подвійного шару, ядра яких внаслідок умови /2/ мають у цьому випадку тільки точкову особливість

$$u(x) = \sum_{\kappa=0}^n \iint_{S_{\kappa}} \{ \omega'(x, y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) u(y) - [u'(y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) \omega(x, y)]' \} d_y S, \quad /3/$$

де

$$B(y, \frac{\partial}{\partial y}) = -2 \left[\sum_{i,j=1}^3 \tilde{h}_{ij}(y) v_i(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^3 A'_i(y) v_i(y) \right]; \quad /4/$$

$v(y) = (v_1, v_2, v_3)$ — орт внутрішньої нормалі до $S \bigcup_{i=0}^n S_i$.

Таким чином,

$$u(x) = \sum_{\kappa=0}^n V_{\kappa}(x), \quad /5/$$

де

$$V_{\kappa}(x) = \iint_{S_{\kappa}} \{ \omega'(x, y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) u(y) - [u'(y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) \omega(x, y)]' \} d_y S_{(\kappa=0, \bar{n})} \quad /6/$$

є розв'язок системи /1/ в $D_{\kappa} \quad / \kappa = 0, \bar{n} /$.

Єдиність стверджуваного у теоремі зображення розв'язку системи /1/ доведемо від супротивного. Припустимо існування двох зображень одного й того ж розв'язку $u(x)$ системи /1/

$$u(x) = \sum_{\kappa=0}^n V_{\kappa}^{(1)}(x) = \sum_{\kappa=0}^n V_{\kappa}^{(2)}(x),$$

де $V_{\kappa}^j(x) \quad (j = 1; 2)$ — розв'язки системи /1/ в $D_{\kappa} \quad (\kappa = 0, \bar{n})$.

Тоді, приймаючи $V_{\kappa}^{(1)} - V_{\kappa}^{(2)} = \bar{V}_{\kappa}$, маємо в D таку рівність

$$\sum_{\kappa=0}^n \bar{V}_{\kappa}(x) = 0,$$

яку можна зобразити у вигляді

$$\bar{V}_0(x) = - \sum_{\kappa=1}^n \bar{V}_{\kappa}(x). \quad /7/$$

Із рівності /7/ випливає, що вектор-функція $V_0(x)$, визначена раніше як розв'язок системи /1/ в D_0 , є регулярним розв'язком /1/ у всьому просторі, оскільки $\bar{V}_\kappa(x)$ ($\kappa = \overline{1, n}$) визначені зовні D_0 .

Скористаємося тепер теоремою Ліувілья, доведеною Д.П.Мельник [2]. Якщо 2γ раз неперервно диференційований розв'язок еліптичної системи, що задовольняє умови теореми існування /класичної/ фундаментальної матриці, порядку $O(|x|^{-\kappa})$ при $|x| \rightarrow \infty$, то воно являє собою тотожний нуль /тут κ - будь-яке ціле число/.

Оскільки система /1/ і $\bar{V}_\kappa(x)$ ($\kappa = \overline{1, n}$) задовольняють умови цієї теореми, то із виразу $\bar{V}_0(x)$, що є регулярним розв'язком системи /1/ у всьому тривимірному просторі, випливає його тотожна рівність нулеві $\bar{V}_0(x) \equiv 0$. Аналогічно доводиться, що $\bar{V}_\kappa(x) \equiv 0$ ($\kappa = \overline{1, n}$). Таким чином,

$$V_\kappa^{(1)}(x) \equiv V_\kappa^{(2)}(x) \quad (\kappa = \overline{0, n}).$$

Доведена теорема обґрунтовує наступний метод розв'язування задачі Діріхле для системи /1/ в області D . Позначимо через $f_\kappa(x)$ межове значення шуканого розв'язку системи /1/ на поверхні S_κ , а через $G_\kappa(x, y)$ - матрицю Гріна системи /1/ для області D_κ ($\kappa = \overline{0, n}$). Зобразимо розв'язок задачі

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) = 0 \quad (x \in D), \quad /8/$$

$$u(x)|_{S_\kappa} = f_\kappa(x) \quad (\kappa = \overline{0, n}) \quad /9/$$

у вигляді

$$u(x) = \sum_{\kappa=0}^n \iint_{S_\kappa} u_\kappa(y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) G_\kappa(x, y) d_y S, \quad /10/$$

де $B(y, \frac{\partial}{\partial y})$ визначено формулою /4/; $u_\kappa(y)$ - невідомі густини, для знаходження яких одержимо таку систему інтегральних рівнянь:

$$u_l(x) + \sum_{\kappa+l=0}^n \iint_{S_\kappa} u_\kappa(y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) G_\kappa(x, y) d_y S = f_l(x) \quad (l = \overline{0, n}) \quad /11/$$

Систему регулярних інтегральних рівнянь /II/ можна розв'язати за першою теоремою Фредгольма. Для доведення цього розглянемо відповідну однорідну систему і позначимо через $u_\kappa^0(x)$ її розв'язок

$$u_\kappa^0(x) + \sum_{\nu=0}^n \iint_{S_\nu} u_\nu^0(y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) G_\kappa(x, y) d_y S = 0. \quad /12/$$

Нехай $V_\kappa^0(x)$ - розв'язок системи /I/ в області D_κ , який набуває на S_κ значення $u_\kappa^0(x)$, тобто

$$V_\kappa^0(x) = \iint_{S_\kappa} u_\kappa^0(y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) G_\kappa(x, y) d_y S. \quad /13/$$

Тоді вектор-функція

$$u^0(x) = \sum_{\kappa=0}^n \iint_{S_\kappa} u_\kappa^0(y) B(y, \frac{\partial}{\partial y}) G_\kappa(x, y) d_y S = \sum_{\kappa=0}^n V_\kappa^0(x)$$

є розв'язок системи /I/ в області D , який набуває внаслідок /12/ на межі нульового значення і тому дорівнює тотожно нулеві скрізь у D

$$u^0(x) = \sum_{\kappa=0}^n V_\kappa^0(x), \quad /14/$$

Звідси міркуваннями, використаними при доведенні єдиності зображення розв'язку системи /I/ у наведеній вище теоремі, одержимо

$$V_\kappa^0(x) = 0 \quad (x \in D_\kappa). \quad /15/$$

Оскільки $u_\kappa^0(x)$ - значення $V_\kappa^0(x)$ на поверхні S_κ , то з /10/ записуємо $u_\kappa^0(x) = 0$, тобто система /12/ має тільки нульовий розв'язок. Отже, для системи /I/ існує єдиний розв'язок.

С п и с о к л і т е р а т у р и: І. В о л о ш и н а М.С.

Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. - ДАН УРСР, 1958, № 10.

2. М е л ь н и к Д.П. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. - ДАН УРСР, 1958, № 6. 3. М а р і я

М а р т и н е н к о. Деякі крайові задачі для еліптичних систем. - ДАН УРСР, серія А, 1968, № 8.

В.А.Бакалець, Н.В.Людкевич

МЕТОД НЕОЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Розглянемо точний метод розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона на площині та в просторі у випадку замкнених кривих /поверхонь/ другого порядку, коли права частина рівняння – алгебраїчний поліном довільного степеня.

1. Запишемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u = P_n(x, y), \quad /1/$$

$$u|_S = 0, \quad /2/$$

де $P_n(x, y)$ – алгебраїчний поліном степеня n виду

$$P_n(x, y) = \sum_{i+j=0}^n \tilde{a}_{ij} x^i y^j; \quad /3/$$

S – замкнута крива другого порядку.

Розв'язок задачі /1/-/2/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = w(x, y) \cdot Q_n(x, y), \quad /4/$$

де $w(x, y)$ – функція, яка задає рівняння кривої S ; $Q_n(x, y)$ – алгебраїчний поліном степеня n з невідомими коефіцієнтами

$$Q_n(x, y) = \sum_{i+j=0}^n \alpha_{ij} x^i y^j. \quad /5/$$

Підставивши /4/ в /1/, маємо тотожність

$$\left[\frac{\partial^2 Q_n(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_n(x, y)}{\partial y^2} \right] w(x, y) + 2 \left[\frac{\partial Q_n(x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_n(x, y)}{\partial y} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right] Q_n(x, y) = P_n(x, y),$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x та y , записуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij} . Очевидно, що одержаний розв'язок задовольнятиме граничну умову /2/.

Розглянемо деякі конкретні випадки. Нехай S — коло радіуса R з центром у початку координат. Розв'язок задачі /1/-/2/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = (x^2 + y^2 - R^2) \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j. \quad /7/$$

Тоді для визначення a_{ij} отримаємо систему

$$\begin{aligned} & a_{n-k, k} [(n-k)(n-k-1) + k(k-1)] + a_{n-k+2, k-2} (n-k-2)(n-k-1) + \\ & + a_{n-k-2, k+2} (k+2)(k+1) - R^2 [a_{n-k+2, k} (n-k+2)(n-k+1) + \\ & + a_{n-k, k+2} (k+2)(k+1)] + 4 a_{n-k, k} (n+1) = \bar{a}_{n-k, k} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad /8/$$

Очевидно, що $a_{lm} = 0$, якщо l, m лежать поза проміжком $[0, n]$. Вкажемо розв'язки /7/ для деяких n :

$$n=0, \quad u_0(x, y) = \frac{1}{4} \bar{a}_{00} \cdot \omega(x, y),$$

$$n=1, \quad u_1(x, y) = \left[\frac{1}{8} (\bar{a}_{10} x + \bar{a}_{01} y) + \frac{1}{4} \bar{a}_{00} \right] \omega(x, y),$$

$$\begin{aligned} n=2, \quad u_2(x, y) = & \left\{ \frac{7\bar{a}_{20} - \bar{a}_{02}}{96} x^2 + \frac{\bar{a}_{11}}{12} xy + \frac{7\bar{a}_{02} - \bar{a}_{20}}{96} y^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} (\bar{a}_{10} x + \bar{a}_{01} y) + \frac{1}{4} \left[\bar{a}_{00} + \frac{\bar{a}_{20} + \bar{a}_{02}}{8} \right] \right\} \omega(x, y), \end{aligned}$$

$$n=3, \quad u_3(x, y) = \left\{ \frac{1}{192} [(9\bar{a}_{30} - \bar{a}_{12}) x^3 + (11\bar{a}_{21} - \right.$$

$$-3\bar{\alpha}_{03})x^2y + (11\bar{\alpha}_{12} - 3\bar{\alpha}_{30})xy^2 + (9\bar{\alpha}_{03} - \bar{\alpha}_{21})y^3] + \frac{1}{96} [(7\bar{\alpha}_{10} - \bar{\alpha}_{02})x^2 + (7\bar{\alpha}_{02} - \bar{\alpha}_{20})y^2] + \frac{1}{12} \bar{\alpha}_{11}xy + [\bar{\alpha}_{10} + \frac{R^2}{12} (\bar{\alpha}_{12} + 3\bar{\alpha}_{30})]x + [\bar{\alpha}_{01} + \frac{R^2}{12} (\bar{\alpha}_{21} + 3\bar{\alpha}_{03})]y + \frac{1}{4} [\bar{\alpha}_{00} + \frac{\bar{\alpha}_{10} + \bar{\alpha}_{02}}{8}] \cdot \omega(x, y),$$

де $\omega(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$.

Знайдені розв'язки повністю збігаються з результатами роботи [1], в якій вони одержані значно складнішим способом і з частинними випадками формули /7/. Аналогічні розв'язки можна одержати для інших конкретних кривих другого порядку.

2. Результати, отримані вище, можна поширити на просторові задачі. Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона в просторі

$$\Delta u = P_n(x, y, z), \quad /9/$$

$$u|_S = 0, \quad /10/$$

де

$$P_n(x, y, z) = \sum_{i+j+k=n} \bar{\alpha}_{i/j/k} x^i y^j z^k; \quad /11/$$

S - замкнена поверхня другого порядку.

Розв'язок задачі /9/-/10/ шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y, z) = \omega(x, y, z) \cdot Q_n(x, y, z), \quad /12/$$

де $\omega(x, y, z)$ - функція, яка задає рівняння поверхні S .

$$Q_n(x, y, z) = \sum_{i+j+k=n} \alpha_{i/j/k} x^i y^j z^k. \quad /13/$$

Підставивши /12/ у /9/, отримаємо тотожність

$$\left[\frac{\partial^2 Q_n(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_n(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_n(x, y, z)}{\partial z^2} \right] \omega(x, y, z) + 2 \left[\frac{\partial Q_n(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial \omega(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q_n(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial \omega(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial Q_n(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial \omega(x, y, z)}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial^2 \omega(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega(x, y, z)}{\partial z^2} \right] Q_n(x, y, z) = P_n(x, y, z). \quad /14/$$

Прирівнюючи в /14/ коефіцієнти при однакових степенях x , y та z , отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_{ijk} . Очевидно, що такий розв'язок задовольнятиме граничну умову /10/.

Нехай S - куля радіуса R з центром у початку координат, тоді

$$u_n(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \sum_{i+j+k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k. \quad /15/$$

Для визначення a_{ijk} з /14/ отримуємо систему

$$\begin{aligned} & a_{n-k, k-2, 2} [(n-k)(n-k-1) + (k-2)(k-2-1) + 2(2-1)] + \\ & + (n-k+2)(n-k+1) [a_{n-k+2, k-2-2, 2} + a_{n-k+2, k-2, 2-2}] + \\ & + (k-2+2)(k-2+1) [a_{n-k, k-2+2, 2-2} + a_{n-k-2, k-2+2, 2}] + \\ & + (2+2)(2+1) [a_{n-k, k-2-2, 2+2} + a_{n-k-2, k-2, 2+2}] - \\ & - R^2 [(n-k+2)(n-k-1) a_{n-k+2, k-2, 2} + (k-2+2)(k-2+1) a_{n-k, k-2+2, 2} + \\ & + (2+2)(2+1) a_{n-k, k-2, 2+2}] + (4n+6) a_{n-k, k-2, 2} = \bar{a}_{n-k, k-2, 2} \end{aligned}$$

$$(k=0, 1, \dots, n; \quad 2=0, 1, \dots, k). \quad /16/$$

Але, очевидно, що $a_{lmr} = 0$, коли l, m, r лежать поза проміжком $[0, n]$. Наведемо розв'язки /15/ для деяких n

$$n=0, \quad u_0(x, y, z) = \frac{1}{6} \bar{a}_{000} \omega(x, y, z);$$

$$n=1, \quad u_1(x, y, z) = \left\{ \frac{1}{10} (\bar{a}_{100} x + \bar{a}_{010} y + \bar{a}_{001} z) + \frac{1}{6} \bar{a}_{000} \right\} \omega(x, y, z);$$

$$\begin{aligned} n=2, \quad u_2(x,y,z) = \left\{ \frac{1}{140} \left[(9\bar{a}_{200} - \bar{a}_{020} - \bar{a}_{002})x^2 + (9\bar{a}_{020} - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{a}_{200} - \bar{a}_{002})y^2 + (9\bar{a}_{002} - \bar{a}_{200} - \bar{a}_{020})z^2 \right] + \frac{1}{14} [\bar{a}_{110}xy + \right. \\ \left. + \bar{a}_{101}xz + \bar{a}_{011}yz] + \frac{1}{10} [\bar{a}_{100}x + \bar{a}_{010}y + \bar{a}_{001}z] + \frac{1}{16} [\bar{a}_{000} + \right. \\ \left. + \frac{R^2}{10} (\bar{a}_{200} + \bar{a}_{020} + \bar{a}_{002}) \right] \} \omega(x,y,z), \end{aligned}$$

де $\omega(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$.

3. Відзначимо, що вимога нульових граничних умов для задач /1/-/2/ і /9/-/10/ не зменшує їх загальності. Наприклад, розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= \rho_n(x,y), \\ u|_S &= \rho_m(x,y), \end{aligned} \quad /17/$$

де $\rho_m(x,y)$ - многочлен степеня m .

У цьому випадку будемо такий многочлен $h(x,y)$, що $h(x,y)|_S = \rho_m(x,y)$. Зробивши заміну

$$z(x,y) = u(x,y) - h(x,y),$$

очевидно, для $z(x,y)$ маємо задачу

$$\Delta z = \bar{\rho}_n(x,y), \quad z|_S = 0, \quad /18/$$

причому

$$\bar{\rho}_n(x,y) = \rho_n(x,y) - \Delta h(x,y).$$

Аналогічно не зменшує загальності вимога, щоб центр границі області знаходився у початку координат. Якщо центр кривої /поверхні/ є в точці $x=\alpha$, $y=\beta$, то заміною $x'=x-\alpha$, $y'=y-\beta$ зведемо його в початок координат, при цьому відповідно зміняться гранична умова та права частина рівняння Пуассона. Якщо права частина рівняння

Пуассона — довільна гладка функція, то її завжди можемо рівномірно наблизити многочленом відповідного степеня. Причому похибка між точним розв'язком і тим, який ми одержали, згідно теореми Вейерштраса [2], дорівнюватиме похибці наближення правої частини многочленом $P_n(x, y)$.

Список літератури: 1. Мартинюк В.Е.

Основная краевая задача для обобщенного полигармонического уравнения. — Вычислительная и прикладная математика, 1973, вып.20. 2. Канторович Л.Б., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.

УДК 517.944+518.61

М.Д.Коркуна

ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНОГО МЕТОДУ ПРОГРАМУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Метод динамічного програмування [1] застосовується до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа [2]. При цьому розглядають два алгоритми. Використання одного із них пов'язане з обчисленням обернених матриць, а практична реалізація другого не наведена.

У цій статті продовжуємо дослідження другого алгоритму і здійснюємо його реалізацію на ЕОМ.

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа у прямокутнику R :

$$\Delta u = 0, \quad /1/$$

$$u|_r = g(x, y) \quad /2/$$

де Γ - границя області R), яка еквівалентна задачі про мінімум функціоналу

$$D(u) = \iint_R (u_x^2 + u_y^2) dR \quad /3/$$

у класі функцій $W_2^1(R)$, що задовольняють граничні умови /2/.

Виберемо в R сітку з кроком h по x і y . Введемо позначення

$$v_j = \begin{cases} u_{kj} & \text{для } j=1, \dots, l-1 \\ u_{k+l,j} & \text{для } j=l, \dots, m-1 \end{cases}$$

Визначимо $f_{lk}(v_1, \dots, v_{m-1})$ як

$$\begin{aligned} f_{lk}(v_1, \dots, v_{m-1}) = \min_{\{u_{ij}\}} & \left[\sum_{j=1}^l (u_{k+l,j} - u_{k+l,j-1})^2 + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{l-1} (u_{k+l,j} - u_{kj})^2 + \sum_{i=k+2}^n \left[\sum_{j=1}^m (u_{ij} - u_{i,j-1})^2 + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j=1}^{m-1} (u_{ij} - u_{i-1,j})^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad /4/$$

Звідси отримуємо функціональне рівняння

$$\begin{aligned} f_{lk}(v_1, \dots, v_{m-1}) = \min_{\omega} & [(v_l - \omega)^2 + (v_{l-1} - \omega)^2 + \\ & + f_{l-1,k}(v_1, \dots, v_{l-2}, \omega, v_l, \dots, v_{m-1})], \end{aligned} \quad /5/$$

де $\omega = u_{k+l,l-1}$. Останнє співвідношення дає зв'язок між областями, які зображені на рис.1,2.

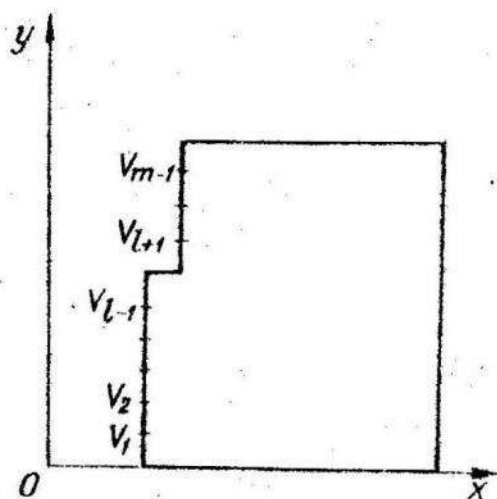


Рис. I.

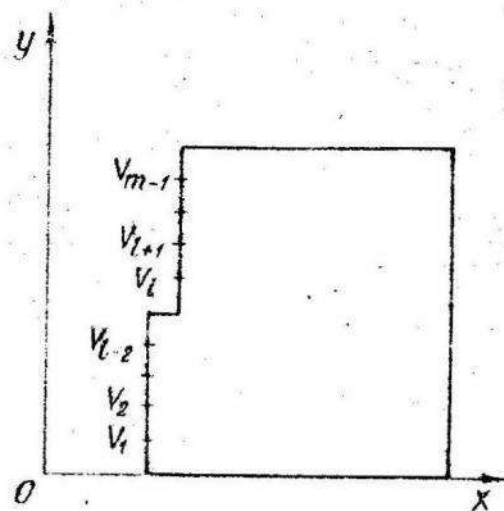


Рис. 2.

Враховуючи те, що $f_{l\kappa}(v_1, \dots, v_{m-1})$ є квадратичною формою по v , отримаємо

$$f_{l\kappa}(v) = (A^{(l,\kappa)} v, v) - 2(\beta^{(l,\kappa)}, v) + c^{(l,\kappa)}, \quad /6/$$

де $A^{(l,\kappa)}$ – симетрична матриця; $\beta^{(l,\kappa)}$ і $c^{(l,\kappa)}$ – вектори, $v = (v_1, \dots, v_{m-1})$. Тоді вираз /5/ набуде вигляду

$$f_{l\kappa}(v) = \min_{\omega} [(v_l - \omega)^2 + (v_{l-1} - \omega)^2 + (A^{(l-1,\kappa)} v, v) - 2(\beta^{(l-1,\kappa)}, v) + c^{(l-1,\kappa)}] \quad /7/$$

Значення ω , за якого $f_{l\kappa}(v)$ набуває мінімуму, одержуємо з рівності нулевій похідній по ω виразу /7/

$$\omega = \frac{v_l + v_{l-1} + \beta_{l-1}^{(l-1,\kappa)} - \sum_{j=1}^{l-2} a_{l-1,j}^{(l-1,\kappa)} v_j - \sum_{j=2}^{m-1} a_{l-1,j}^{(l-1,\kappa)} v_j}{2 + a_{l-1,l-1}^{(l-1,\kappa)}} \quad /8/$$

Тут $a_{l-1,j}^{(l-1,\kappa)}$ і $\beta_{l-1}^{(l-1,\kappa)}$ – невідомі. Для їх визначення підставимо /8/ у /7/. Тоді

$$f_{l\kappa}(v) = [(\alpha, v) + \beta]^2 + [(\alpha', v) + \beta]^2 + \\ + (A^{(l-1, \kappa)}(v + \delta v), v + \delta v) - 2(b^{(l-1, \kappa)}, v + \delta v) + c^{(l-1, \kappa)}; \quad /9/$$

$$\alpha_j = \begin{cases} -(1 + \alpha_{l-1, l-1}^{(l-1, \kappa)} + \alpha_{l-1, l}^{(l-1, \kappa)})r & \text{при } j = l, \\ r & \text{при } j = l-1, \\ -\alpha_{l-1, j}^{(l-1, \kappa)} r & \text{для решетки } j; \end{cases}$$

$$\alpha'_j = \begin{cases} (1 - \alpha_{l-1, l}^{(l-1, \kappa)})r & \text{при } j = l, \\ -(1 + \alpha_{l-1, l-1}^{(l-1, \kappa)})r & \text{при } j = l-1, \\ -\alpha_{l-1, j}^{(l-1, \kappa)} r & \text{для решетки } j; \end{cases}$$

$$\beta = b_{l-1}^{(l-1, \kappa)} r, \quad r = \frac{1}{2 + \alpha_{l-1, l-1}^{(l-1, \kappa)}}.$$

$$\delta v = (\delta v_1, \dots, \delta v_{m-1});$$

$$\delta v_j = \begin{cases} (\alpha', v) + \beta & \text{при } j = l-1, \\ 0 & \text{для решетки } j. \end{cases}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях v в /9/ і /6/, одержуємо співвідношення для визначення $\bar{\alpha}_{ij}^{(l,\kappa)}$ і $\beta_j^{(l,\kappa)}$:

$$\bar{\alpha}_{ij}^{(l,\kappa)} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_i' (\alpha_j' + 2\alpha_{l-1,j}^{(l-1,\kappa)} + \alpha_{l-1,l-1}^{(l-1,\kappa)} \alpha_j') + \alpha_{ij}^{(l-1,\kappa)}, \quad /10/$$

$$\begin{aligned} \beta_j^{(l,\kappa)} = & \beta_j^{(l-1,\kappa)} + \beta_{l-1}^{(l-1,\kappa)} \alpha_j' - \beta (\alpha_j + \alpha_j' + \alpha_{l-1,j}^{(l-1,\kappa)} + \\ & + \alpha_{l-1,l-1}^{(l-1,\kappa)} \alpha_j') \end{aligned} \quad /11/$$

при $l = 2, \dots, m-1$.

Зі співвідношення

$$f_{l,\kappa}(v_1, \dots, v_{m-1}) = (v_l - u_{\kappa+1,0})^2 + f_{0\kappa}(v_1, \dots, v_{m-1})$$

маємо формули при $l=1$

$$\alpha_{ij}^{(1,\kappa)} = \begin{cases} \alpha_{ij}^{(0,\kappa)} + 1 & \text{при } i=j=1, \\ \alpha_{ij}^{(0,\kappa)} & \text{для решти } j, \end{cases} \quad /12/$$

$$\beta_i^{(1,\kappa)} = \begin{cases} \beta_i^{(0,\kappa)} + u_{\kappa+1,0} & \text{при } i=1, \\ \beta_i^{(0,\kappa)} & \text{для решти } i. \end{cases} \quad /13/$$

При $l=m$ елементи матриць $\bar{\alpha}^{(l,\kappa)}$ рахуватимуться за формулою /10/, а елементи векторів $\beta^{(l,\kappa)}$ за

$$\beta_j^{(m,\kappa)} = \beta_j^{(m-1,\kappa)} + \beta_{m-1}^{(m-1,\kappa)} \alpha_j' -$$

$$- \gamma [(\delta_{m-1}^{(m-1, \kappa)} - u_{\kappa+1, m} (1 + \alpha_{m-1, m-1}^{(m-1, \kappa)})) \alpha_j + \quad /14/$$

$$+ (u_{\kappa+1, m} + \delta_{m-1}^{(m-1, \kappa)}) (\alpha_j + \alpha_{m-1, j}^{(m-1, \kappa)} + \alpha_{m-1, m-1}^{(m-1, \kappa)} \alpha_j')]] .$$

Вимагаючи, щоб $A^{(\ell, \kappa)}$ була симетричною, маємо

$$a_{ij}^{(\ell, \kappa)} = \frac{1}{2} [\bar{a}_{ij}^{(\ell, \kappa)} + \bar{a}_{ji}^{(\ell, \kappa)}] . \quad /15/$$

Враховуючи те, що $A^{(m, n-1)} = J$, $\delta^{(m, n-1)} = u_n$ (u_n - значення $u(x, y)$ на правій границі), $A^{(m, \kappa+1)} = A^{(0, \kappa)}$, $\delta^{(m, \kappa+1)} = \delta^{(0, \kappa)}$ у кожній точці сітки елементи матриць $A^{(\ell, \kappa)}$ і векторів $\delta^{(\ell, \kappa)}$ шукаємо за формулами /12/, /13/, /10/, /11/, /14/, /15/, запам'ятовуючи при цьому рядок матриці $\alpha_{\ell-1, j}^{(\ell-1, \kappa)}$ і елемент вектора $\delta_{\ell-1}^{(\ell-1, \kappa)}$. Далі за формулою /8/ знайдемо розв'язок нашої задачі.

Для ілюстрації описаного методу розглянемо такі два приклади:

1/ одиничний квадрат з кроком $h = 1/16$ та граничними умовами

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1), \quad u(x, 0) = 1;$$

2/ одиничний квадрат з кроком $h = 1/16$ та граничними умовами

$$u(0, y) = -y^2, \quad u(1, y) = 1-y^2, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 1) = x^2-1.$$

Результати обчислень порівнювали для задачі 1 з даними праці [2], а для задачі 2 - з точним розв'язком /див. таблицю/.

Точка	Задача 1		Задача 2	
	Метод динамічного програмування	Розв'язок з праці [2]	Метод динамічного програмування	Точний розв'язок
I	2	3	4	5
(1/16, 1/16)	0,49571	0,49570	0,00000	0,000000
(1/2, 1/16)	0,87408	0,87407	0,24609	0,246093

Закінчення таблиці				
1	2	3	4	5
(15/16, 1/2)	0,49570	0,49570	0,62891	0,628906
(1/2, 1/2)	0,25001	0,24999	0,00000	0,000000
(1/2, 15/16)	0,02181	0,02181	-0,62891	-0,628906

Отже, отримані результати з певною точністю збігаються з точним розв'язком із праці [2].

Список літератури: 1. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960. 2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М., Мир, 1974.

УДК 518.517.3

М.В.Жук

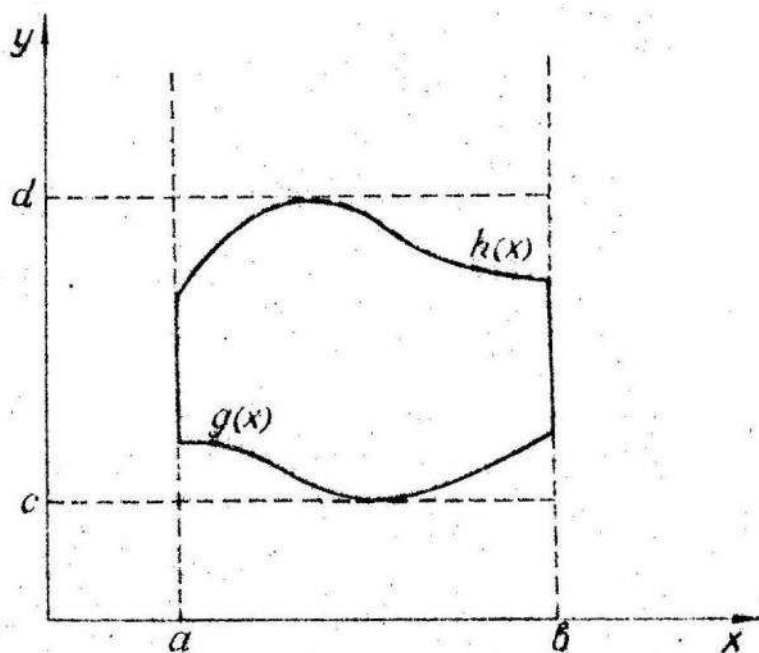
МЕТОД МЕХАНІЧНИХ КВАДРАТУР ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння

$$u_1(x,y) = \iint_{D_1} K_1(x,y,\xi,\eta) u_1(\xi,\eta) d\xi d\eta + f_1(x,y) \quad (1)$$

в області D_1 , обмеженій по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$. Припускаємо, що ядро $K_1(x,y,\xi,\eta)$ неперервне в області $D_1 \times D_1$, а вільний член $f_1(x,y)$ в області D_1 .

Доповнюємо область D_1 до прямокутника $D=[a,b;c,d]$ /див.рисунк/.



Вважаємо, що ядро рівняння /1/ $K(x, y, \xi, \eta)$ можна продовжити по неперервності в області $D \times D$, і отримати у цій області неперервну функцію $\tilde{K}(x, y, \xi, \eta)$. Крім того, припускаємо, що вільний член рівняння /1/ $f(x, y)$ теж можна продовжити по неперервності в області D , і отримати неперервну в області D функцію $f(x, y)$.

Тоді розглянемо рівняння

$$u(x, y) = \iint_D K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y), \quad /2/$$

де

$$K(x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} K(x, y, \xi, \eta) & \text{при } x, y, \xi, \eta \in D, \times D, \\ \tilde{K}(x, y, \xi, \eta) & \text{при } x, y, \xi, \eta \in D \times D, \\ 0 & \text{при } x, y, \xi, \eta \in D \times (D \setminus D). \end{cases} \quad /3/$$

Наведемо деякі результати про збіжність квадратурних процесів [1].

Нехай J - метричний компакт; ν - додатна скінченна регулярна міра на J така, що $\nu(S(t_0, \tau)) = \nu(\bar{S}(t_0, \tau))$ при $\tau > 0$ для довільної відкритої сфери $S(t_0, \tau)$ і замкненої сфери $\bar{S}(t_0, \tau)$.

Розбиття компакта J на ν -вимірні підмножини $J_{1n}, J_{2n}, \dots, J_{kn}$, які не перетинаються,

$$J_{kn} \cap J_{ln} = \emptyset \quad \text{при } k \neq l, \quad \bigcup_{k=1}^n J_{kn} = J, \quad /4/$$

що $\nu(J_{kn}^o) = \nu(J_{kn}) = \nu(\bar{J}_{kn})$, називається правильним, якщо при $n \rightarrow \infty$ діаметри підмножин J_{kn} прямують до нуля

$$\max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(J_{kn}) \rightarrow 0, \quad /5/$$

де J_{kn}^o та $\bar{J}_{kn}$ - відповідно внутрішня частина та замкнення J_{kn} .

Нехай X - банахів простір. Обмежена на J функція $\varphi(\zeta)$ зі значеннями в X є ν -інтегровною, тоді і лише тоді, коли для кожної правильної послідовності ν -розбиття $J = \bigcup_{k=1}^n J_{kn}$ виконується умова

$$\sum_{k=1}^n \omega(\varphi, J_{kn}) \nu(J_{kn}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad /6/$$

де $\omega(\varphi, J_{kn})$ - коливання функції φ на J_{kn} .

Рівномірно обмежена система $\mathcal{M} = \{\varphi(\zeta)\}$ ν -інтегровних функцій називається рівномірно ν -інтегровною, якщо для кожної правильної послідовності ν -розбиття $J = \bigcup_{k=1}^n J_{kn}$ збіжність /6/ відбувається рівномірно відносно $\varphi \in \mathcal{M}$

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{M}} \sum_{k=1}^n \omega(\varphi, J_{kn}) \nu(J_{kn}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad /7/$$

У праці [1] доведено, що для довільної ν -інтегровної функції $\varphi(\zeta)$ квадратурний процес

$$\int_J \varphi(\zeta) \nu(d\zeta) = \sum_{k=1}^n \alpha_{kn} \varphi(\zeta_{kn}) + R_n(\varphi) \quad /8/$$

з вузлами $\zeta_{kn} \in J$ та коефіцієнтами $\alpha_{kn} > 0$ збігається ($R_n(\varphi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) тоді і лише тоді, коли для кожного $n = 1, 2, \dots$ існує така правильна послідовність ν -розбиття $J = \bigcup_{k=1}^n J_{kn}$, що

$$\zeta_{kn} \in J_{kn}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad /9/$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{kn} - \nu(J_{kn})| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad /10/$$

За допомогою квадратурної формули /8/ запишемо рівняння /2/ у вигляді

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_a^b \alpha_{kn} K(x, y, \xi, \eta_{kn}) u(\xi, \eta_{kn}) d\xi = f(x, y) + \int_a^b \rho_n(x, y, \xi) d\xi /II/$$

де $\rho_n(x, y, \xi) = R_n(Ku)$, $c \leq \eta_{1n} < \eta_{2n} < \dots < \eta_{nn} \leq d$.

Прийmemo в /II/ послідовно $y = y_{1n}, \dots, y_{nn}$. Тоді приходимо до наступної системи рівнянь, яку задовольняють функції $u(x, y_{mn})$, $m = 1, 2, \dots, n$ - значення шуканого розв'язку рівняння /2/ на прямих $(x, y_{1n}), (x, y_{2n}), \dots, (x, y_{nn})$

$$u(x, y_{mn}) = \sum_{k=1}^n \int_a^b \alpha_{kn} K(x, y_{mn}, \xi, \eta_{kn}) u(\xi, \eta_{kn}) d\xi = f(x, y) + \int_a^b \rho_n(x, y, \xi) d\xi.$$

Тоді наближені значення $c_{mn}(x) = u(x, y_{mn})$ шукаємо з системи n інтегральних рівнянь

$$c_{mn}(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^b \alpha_{kn} K(x, y_{mn}, \xi, \eta_{kn}) c_{kn}(\xi) d\xi = f(x, y_{mn}), m=1, \dots, n. /I2/$$

Теорема. Нехай рівняння /I/ має єдиний неперервний розв'язок $u_1^*(x, y)$, а квадратурний процес /8/ збігається.

Тоді система інтегральних рівнянь /I2/ при достатньо великих n має єдиний неперервний розв'язок $c_{1n}(x), \dots, c_{nn}(x)$ і

$$\max_k \max_{(x, y_{kn}) \in D_1} |c_{kn}(x) - u_1^*(x, y_{kn})| \rightarrow 0, /I3/$$

якщо $n \rightarrow \infty$.

Швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$\max_k \max_{(x, y_{kn}) \in D_1} |c_{kn}(x) - u_1^*(x, y_{kn})| \leq \rho \varepsilon_n, /I4/$$

де $\rho = \text{const} > 0$,

$$\varepsilon_n = \max_{a \leq x \leq b} \max_{1 \leq k \leq n} \left| \int_a^b \tilde{\rho}_n(x, y_{mn}, \xi) d\xi \right|, \tilde{\rho}_n(x, y_{mn}, \xi) = R_n(\tilde{K}_{mn} u_1^*), /I5/$$

$$\tilde{K}_{mn} u_1^* = \tilde{K}_1(x, y_{mn}, \xi, \eta) u_1^*(\xi, \eta).$$

Доведення. Інтегральне рівняння /2/ розглянемо як операторне

$$u = Tu + f \quad /2/$$

у банаховому просторі неперервних по x та обмежених і вимірних по y в області D функцій $u(x, y)$

$$\|u(x, y)\| = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \sup_{\gamma \leq y \leq \alpha} |u(x, y)|,$$

$$Tu = \iint_D K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad /16/$$

Інтегральний оператор T буде цілком неперервним як оператор із E у простір $C(D)$ і тим більше як оператор в E . Рівняння /1/ має єдиний неперервний розв'язок, тому для однорідного рівняння $u = Tu$, із цілком неперервним у $C(D)$ оператором $T, u = \iint_D K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta$ існує лише нульовий розв'язок у $C(D)$. Звідси випливає, що рівняння $u = fu$ теж має тільки нульовий розв'язок у просторі $C(D)$, оскільки

$$u(x, y) = \iint_D K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \iint_D K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Таким чином, для оператора $I - T$ існує обмежений обернений у $C(D)$ і /2/ має єдиний неперервний розв'язок u^* , який у D , збігається з u^* .

Із збіжності процесу /8/ випливає, що існує послідовність розбиття $[c, \alpha] = J = \bigcup_{k=1}^n J_{kn}$, $n = 1, 2, \dots$, для якої виконуватимуться співвідношення /4/, /5/, /9/, /10/, причому /5/ і /10/ матимуть вигляд

$$\max_{1 \leq k \leq n} \sup_{\xi', \eta' \in J_{kn}} |\xi' - \eta'| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad /5'/$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{kn} - \beta_{kn}| = \sum_{k=1}^n |\delta_{kn}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad \beta_{kn} = \text{mes } J_{kn}. \quad /10'/$$

Позначимо через $\chi_{kn}(\eta)$ характеристичну функцію множини J_{kn} /1/. Множину функцій вигляду $u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n l_k(x) \chi_{kn}(y)$, де $l_k(x)$ - довільні неперервні функції, позначимо через E_n ; очевидно, що E_n - замкнений підпростір в E . Введемо проєкційний оператор P_n , який проєктує E на E_n ,

$$P_n h(x, y) = \sum_{k=1}^n h(x, y_{kn}) \chi_{kn}(y), \quad h(x, y) \in E.$$

Очевидно, що $P_n E = E_n$, $P_n z_n = z_n$ для $z_n \in E_n$ і $\|P_n\| = 1$. Із /6/ і /5/ для довільної неперервної у D функції $z(x, y)$, а отже, і рівномірно неперервної маємо

$$\|z - P_n z\| = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \max_{1 \leq k \leq n} \sup_{y \in J_{kn}} |z(x, y) - z(x, y_{kn})| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Інакше, послідовність P_n як операторів із $C(D)$ в E сильно прямує до оператора вкладення $C(D)$ в E . Оскільки T цілком неперервний як оператор із E в $C(D)$, то на основі леми 15.5 із праці [2] отримуємо

$$\|U_n\| = \|T - P_n T\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad /17/$$

Із лінійної незалежності $\chi_{kn}(y)$ випливає, що система /12/ рівносильна операторному рівнянню

$$z_n = P_n z_n + f_n, \quad /18/$$

де

$$f_n = \sum_{m=1}^n f(x, y_{mn}) \chi_{mn}(y), \quad z_n(x, y) = \sum_{m=1}^n \ell_m(x) \chi_{mn}(y) \in E_n, \quad /19/$$

$$T_n z_n = \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{A}} \chi_{kn} \chi(x, y_{mn}, \xi, \eta) \ell_k(\xi) d\xi \right\} \chi_{mn}(y). \quad /20/$$

Рівносильність розуміємо у такому сенсі: вектор $\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)$ буде розв'язком системи /12/ тоді і лише тоді, коли $u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \ell_k(x) \chi_{kn}(y)$ буде розв'язком рівняння /18/.

Покажемо тепер, що

$$\|S_n\| = \|T_n - P_n T\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad /21/$$

Для $z_n = \sum_{k=1}^n \ell_k(x) \chi_{kn}(y) \in E_n$ маємо

$$P_n T z_n = \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \ell_k(\xi) \int_{J_{kn}} \chi(x, y_{mn}, \xi, \eta) d\eta d\xi \right\} \chi_{mn}(y).$$

Але, враховуючи /20/, отримуємо

$$T_n z_n = \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} X(x, y, \xi, \eta_{kn}) d\eta l_k(\xi) d\xi \right\} X_{mn}(y) + \\ + \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} r_{kn} X(x, y_{mn}, \xi, \eta_{kn}) l_k(\xi) d\xi \right\} X_{mn}(y).$$

Тоді

$$\|S_n z_n\| \leq \left[\max_{\alpha \leq x \leq \beta} \max_{1 \leq m \leq n} \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} |X(x, y, \xi, \eta_{kn}) - X(x, y_{mn}, \xi, \eta)| d\xi d\eta + \right. \\ \left. + M(\beta - \alpha) \sum_{k=1}^n |r_{kn}| \right] \|z_n\|,$$

де

$$M = \max_{\alpha \leq x, \xi \leq \beta} \max_{\alpha \leq y \leq \beta} \max_{\eta(\xi) \leq \eta \leq h(\xi)} |X(x, y, \xi, \eta)|.$$

Із рівномірної інтегровності по η відносно x, y, ξ сімейства функцій

$$\{x_{x, y, \xi} = X(x, y, \xi, \eta)\} \quad x, y \in D, \quad \xi \in [\alpha, \beta]$$

та співвідношення /10'/ випливає, що

$$\|S_n\| \leq (\beta - \alpha) \left[\sup_{x, y, \xi} \sum_{k=1}^n \omega(x_{x, y, \xi}; J_{kn}) \beta_{kn} + M \sum_{k=1}^n |r_{kn}| \right] \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Отже, /21/ виконується.

Таким чином, враховуючи виконання співвідношень /17/, /21/ та співвідношень $f_n = P_n f$ і $\|f - P_n f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ можемо застосувати теорему 17.1 із праці [2]. При цьому отримуємо, що при достатньо великих n рівняння /18/ має єдиний розв'язок $u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_{kn}(x) X_{kn}(y)$, а система /12/ - єдиний розв'язок $c_{1n}(x), c_{2n}(x), \dots, c_{nn}(x)$. Збіжність /13/ випливає зі збіжності $\|u_n - u^*\| \rightarrow 0$ та нерівності

$$\|u_n - u^*\| \geq \|u_n - P_n u^*\| = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \max_{1 \leq k \leq n} |c_{kn}(x) - u^*(x, y_{kn})|. \quad /22/$$

Згідно з цією ж теоремою маємо

$$\tilde{p} z_n \leq \|u_n - P_n u^*\| \leq p z_n,$$

де

$$\tilde{p}, p = \text{const} > 0, \quad z_n = \| (T_n P_n - P_n T) u^*(x, y) \|,$$

звідки отримуємо /14/.

Список літератури: Г.М. Вайникко

О сходимости метода механических квадратур для интегральных уравнений с разрывными ядрами. — Сиб. математ. журн., 1971, 12, № 1. 2. Приближенное решение операторных уравнений /М.А.Кресносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко и др. М., Наука, 1969.

УДК 518.517.948

Б.А.Остудін

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ряд задач математичної фізики формують у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} q_i(\tau) [D_i(\tau, \bar{\tau}) \ln \frac{1}{|\tau - \bar{\tau}|} + R_i(\tau, \bar{\tau})] d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) K_j(\tau, \bar{\tau}) d\tau = u^*(\bar{\tau}) \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad j \neq i, \quad /1/$$

де $u^*(\bar{\tau})$ — задана функція ($\bar{\tau} \in [\alpha_i, \beta_i]$) ; $q_i(\tau)$ — шукані функції, про які відомо наперед, що вони на кінцях проміжків (α_i, β_i)

мають особливості виду $(\tau - \alpha_i)^{n_i} (\beta_i - \tau)^{m_i}$ ($n_i, m_i \leq 1$);

$$D_i(\tau, \bar{\tau}), R_i(\tau, \bar{\tau}) \in C[P_i], K_j(\tau, \bar{\tau}) \in C[P_j], \alpha P_k = [\alpha_k, \beta_k] \times [\alpha_i, \beta_i].$$

Рівняння /1/ належать до класу некоректних задач, а тому для його розв'язування застосовують метод саморегуляризації [1,2]. Суть його полягає в тому, що, враховуючи особливість в ядрі інтегрального рівняння /1/ та припускаючи, що функція

$$\omega_i(\tau) = q_i(\tau) (\tau - \alpha_i)^{n_i} (\beta_i - \tau)^{m_i}$$

мало змінюється на достатньо невеликому проміжку довжини h , рівняння /1/ зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$\sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \omega_j(\tau) K_j(\tau, \bar{\tau}) d\tau - \omega_i(\bar{\tau}) G_i(\bar{\tau}) = U^*(\bar{\tau}), \quad /2/$$

де $K_j(\tau, \bar{\tau}) \in C[P_j]$; $G_i(\bar{\tau})$ - відома функція, яка при достатньо малих h поводить себе як добуток $h \cdot \ln h$.

Для отримання гладкого розв'язку задачі /2/ застосуємо апарат інтерполяційних кубічних сплайнів [3]. Для цього розіб'ємо кожний з проміжків $[\alpha_j, \beta_j]$ на N_j частин точками

$$\tau_\kappa^j = \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} - \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} \cos \frac{2\kappa - 1}{2N_j} \pi \quad (\kappa = 1, 2, \dots, N_j - 1), \quad /3/$$

$$\tau_0^j = \alpha_j, \quad \tau_{N_j}^j = \beta_j.$$

Запишемо через ω_κ^j значення шуканої функції $\omega_j(\tau)$ в точці τ_κ^j . Очевидно, що $\omega_0^j = \omega_{N_j}^j = 0$. Відносно нерівномірної сітки /3/ побудуємо інтерполяційний кубічний сплайн

$$S(\omega_j, \tau) = M_{\kappa-1}^j \frac{(\tau_\kappa^j - \tau)^3}{6h_{\kappa-1}^j} + M_\kappa^j \frac{(\tau - \tau_{\kappa-1}^j)^3}{6h_{\kappa-1}^j} + \left[\omega_{\kappa-1}^j - \frac{M_{\kappa-1}^j (h_{\kappa-1}^j)^2}{6} \right] \times$$

$$\times \frac{(\tau_\kappa^j - \tau)}{h_{\kappa-1}^j} + \left[\omega_\kappa^j - \frac{M_\kappa^j (h_{\kappa-1}^j)^2}{6} \right] \frac{(\tau - \tau_{\kappa-1}^j)}{h_{\kappa-1}^j}, \quad /4/$$

де $h_{\kappa-1}^j = \tau_{\kappa}^j - \tau_{\kappa-1}^j$, $\tau \in (\tau_{\kappa-1}^j, \tau_{\kappa}^j)$ ($\kappa = 1, 2, \dots, N_j$),

$$M_{\kappa}^j = [S(\omega_j, \tau)]'' / \tau - \tau_{\kappa}^j :$$

Додаткові крайові умови, що накладаються на сплайн /4/, задамо у вигляді

$$[S(\omega_j, \tau)]''' / \tau - \tau - 0 = [S(\omega_j, \tau)]''' / \tau - \tau + 0, \tau = \tau_1^j, \tau_{N_j-1}^j. \quad /5/$$

Зауважимо також, що умовами інтерполяції сплайну /4/ є виконання співвідношень

$$S(\omega_j, \tau_{\kappa}^j) = \omega_{\kappa}^j \quad (\kappa = 1, 2, \dots, N_j - 1). \quad /6/$$

Враховуючи умови інтерполяції /6/, гладкості, а також крайові умови /5/, отримуємо для визначення параметрів M_{κ}^j систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left(2 + \frac{h_0^j}{h_1^j}\right) M_1^j + \frac{h_1^j - h_0^j}{h_1^j} M_2^j = \alpha_1^j,$$

$$\beta_i^j M_{i-1}^j + 2 M_i^j + \lambda_i^j M_{i+1}^j = \alpha_i^j \quad (i = 2, 3, \dots, N_j - 2),$$

$$\frac{h_{N_j-2}^j - h_{N_j-1}^j}{h_{N_j-2}^j} M_{N_j-2}^j + \left(2 + \frac{h_{N_j-1}^j}{h_{N_j-2}^j}\right) M_{N_j-1}^j = \alpha_{N_j-1}^j, \quad /7/$$

$$M_0^j = \left(1 + \frac{h_0^j}{h_1^j}\right) M_1^j - \frac{h_0^j}{h_1^j} M_2^j,$$

$$M_{N_j}^j = \left(1 + \frac{h_{N_j-1}^j}{h_{N_j-2}^j}\right) M_{N_j-1}^j - \frac{h_{N_j-1}^j}{h_{N_j-2}^j} M_{N_j-2}^j.$$

де $\lambda_{k+1}^j = \frac{h_{k+1}^j}{h_k^j + h_{k+1}^j}$; $\beta_{k+1}^j = \frac{h_k^j}{h_k^j + h_{k+1}^j}$, α_k^j - друга поділена різниця функції $\omega_j(\tau)$ відносно точок $\tau_{k-1}^j, \tau_k^j, \tau_{k+1}^j$, що обчислюється за формулою

$$\alpha_k^j = \frac{6}{h_k^j + h_{k+1}^j} \left[\frac{\omega_{k+1}^j}{h_k^j} - \frac{h_k^j + h_{k+1}^j}{h_k^j h_{k+1}^j} \omega_k^j + \frac{\omega_{k-1}^j}{h_{k-1}^j} \right]. \quad /8/$$

Розв'язуючи рівняння /7/ відносно M_k^j , одержуємо

$$M_k^j = \sum_{t=1}^m \sum_{l=1}^{N_t-1} A_{t,l}^{j,k} \alpha_l^t, \quad /9/$$

де $A_{t,l}^{j,k}$ - елементи обчисленої оберненої матриці коефіцієнтів системи /7/.

Щоб знайти невідомі величини ω_k^j , підставимо вираз для сплайну /4/ з врахуванням /9/ в інтегральне рівняння /2/. Для отримання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно величин ω_k^j розіб'ємо кожний з проміжків $[\alpha_i, \beta_i]$ на N_i частин точками поділу

$$\bar{\tau}_s^i = \frac{\beta_i + \alpha_i}{2} - \frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \cos \frac{2s-1}{2N_i} \pi \quad (s=1,2,\dots,N_i-1), \\ i=1,2,\dots,m, \\ \tau_0^i = \alpha_i, \quad \tau_{N_i}^i = \beta_i.$$

Записавши для кожної з цих точок співвідношення /2/ і враховуючи наступні позначення

$$S_{k,s}^{j,i} = \int_{\tau_{k-1}^j}^{\tau_k^j} (\tau_k^j - \tau)^3 K_j(\tau, \bar{\tau}_s^i) d\tau, \quad T_{k,s}^{j,i} = \int_{\tau_{k-1}^j}^{\tau_k^j} (\tau - \tau_{k-1}^j)^3 K_j(\tau, \bar{\tau}_s^i) d\tau, \\ U_{k,s}^{j,i} = \int_{\tau_{k-1}^j}^{\tau_k^j} (\tau_k^j - \tau) K_j(\tau, \bar{\tau}_s^i) d\tau, \quad Q_{k,s}^{j,i} = \int_{\tau_{k-1}^j}^{\tau_k^j} (\tau - \tau_{k-1}^j) K_j(\tau, \bar{\tau}_s^i) d\tau,$$

$$UQ_{\kappa,s}^{j,i} = \frac{U_{\kappa,s}^{j,i}}{h_{\kappa-1}^j} + \frac{Q_{\kappa-1,s}^{j,i}}{h_{\kappa-2}^j}, \quad SU_{\kappa,s}^{j,i} = S_{\kappa,s}^{j,i} - (h_{\kappa-1}^j)^2 U_{\kappa,s}^{j,i},$$

$$TQ_{\kappa,s}^{j,i} = T_{\kappa,s}^{j,i} - (h_{\kappa-1}^j)^2 Q_{\kappa,s}^{j,i}, \quad SQ_{\kappa,s}^{j,i} = \frac{SU_{\kappa,s}^{j,i}}{h_{\kappa-1}^j} + \frac{TQ_{\kappa-1,s}^{j,i}}{h_{\kappa-2}^j},$$

дістаємо для знаходження величин ω_{κ}^j систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^m \left\{ \omega_t^i \left[UQ_{2,s}^{t,i} + \frac{QQ_{2,s}^{t,i}}{(h_2^t + h_1^t)h_1^t} - \frac{QQ_{2,s}^{t,i}}{h_0^t h_1^t} \right] + \right. \\ & + \omega_{N_t-1}^t \left[UQ_{N_t,s}^{t,i} + \frac{QQ_{N_t-2,s}^{t,i}}{(h_{N_t-2}^t + h_{N_t-3}^t)h_{N_t-2}^t} - \frac{QQ_{N_t-1,s}^{t,i}}{h_{N_t-1}^t h_{N_t-2}^t} \right] + \\ & + \sum_{l=1}^{N_t-3} (D_{l,s}^{t,i} + UQ_{l+2,s}^{t,i}) \omega_{l+1}^t \left. \right\} - \omega_s^i G_i(\bar{\tau}_s^i) = U^*(\bar{\tau}_s^i), \end{aligned}$$

де $D_{l,s}^{t,i} = \frac{QQ_{l,s}^{t,i}}{(h_l^t + h_{l-1}^t)h_l^t} - \frac{QQ_{l+1,s}^{t,i}}{h_{l+1}^t h_l^t} + \frac{QQ_{l+2,s}^{t,i}}{(h_{l+2}^t + h_{l+1}^t)h_{l+1}^t},$

$$QQ_{l,s}^{t,i} = \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{\kappa=2}^{N_j} SQ_{\kappa,s}^{j,i} A_{t,\kappa}^{j,\kappa-1} + SU_{l,s}^{j,i} \left[\frac{A_{t,l}^{j,1}}{h_0^j} \left(1 + \frac{h_0^j}{h_1^j} \right) - \frac{A_{t,l}^{j,2}}{h_1^j} \right] + \right.$$

$$+ TQ_{N_j, s}^{j, i} \left\{ \frac{A_{t, \ell}^{j, N_j-1}}{h_{N_j-1}^j} \left(1 + \frac{h_{N_j-1}^j}{h_{N_j-2}^j} \right) - \frac{A_{t, \ell}^{j, N_j-2}}{h_{N_j-2}^j} \right\}.$$

Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь легко розв'язується методом Гаусса.

Список літератури: І. Дмитрієв В.І., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода. - Вычислительные методы и программирование, 1968, вып.10. 2. Остудин Б.А. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода со слабой особенностью методом саморегуляризации. - Вычислительная и прикладная математика, 1976, вып.29. 3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1976.

УДК 518:517.944/ 947

З.С.Бережанська

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В R^3 МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У праці [1] запропонований алгоритм розв'язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння теплопровідності у просторі з щілинами. За допомогою теплового потенціалу простого шару задача зведена до інтегрального рівняння I-го роду з невідомою густиною, що досить ефективно для такого класу задач.

Цю методику ми переносимо на розв'язування третьої крайової задачі для багатозв'язних областей, рівняння границь яких можна за-

писати в явному вигляді. Визначення рівнянь – єдина робота, яку необхідно здійснити для застосування алгоритму в конкретному випадку.

Розглянемо третю крайову задачу для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}, \quad /1/$$

$$T|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T|_S = T_0, \quad /2/$$

де $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$ – сукупність розімкнутих поверхонь,

рівняння яких $x_3 = f_i(x_1, x_2)$; T_0 – гранична умова на S .

Як відомо [2], ця задача зводиться до інтегрального рівняння за допомогою теплового потенціалу подвійного шару.

$$T(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{2^4 \pi^{3/2}} \int_0^{\bar{t}} dt \iint_S \mu(s, t) \frac{1}{(\bar{t}-t)^{3/2}} e^{-\frac{\bar{z}^2}{4(\bar{t}-t)}} \frac{\partial z}{\partial n} ds, \quad /3/$$

де $\bar{z}$ – відстань між біжучою точкою X поверхні S і фіксованою точкою $\bar{X}$ простору; $\mu(s, t)$ – поверхнева густина, яка є розв'язком наступного інтегрального рівняння

$$-\frac{1}{2^4 \pi^{3/2}} \int_0^{\bar{t}} dt \iint_S \mu(s, t) \left[\frac{\gamma_1 + \alpha \gamma_2}{(\bar{t}-t)^{3/2}} - \frac{\gamma_2}{2(\bar{t}-t)^{5/2}} \right] e^{-\frac{\bar{z}^2}{4(\bar{t}-t)}} ds = T_0, \quad /4/$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial n^2},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^2.$$

Це рівняння типу Фредгольма по X і Вольтера по t .

Занишемо невідому густину у вигляді

$$\mu(s, t) = q(s) q(t). \quad /5/$$

Якщо у рівняння /4/ підставити /5/, перейти від поверхневого інтегралу до подвійного та змінити порядок інтегрування, то отримаємо

$$-\frac{1}{2^4 \pi^{3/2}} \sum_{i=1}^m \left\{ \iint_{\Delta_i} q_i(x_1, x_2) F^{(i)}(x_1, x_2) (Y_1 + \alpha Y_2^2) \left[\int_0^{\bar{t}} q(t) \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(\bar{t}-t)}}{(\bar{t}-t)^{3/2}} dt \right] dx_1 dx_2 - \right. \\ \left. - \iint_{\Delta_i} q_i(x_1, x_2) F^{(i)}(x_1, x_2) Y_2 \left[\int_0^{\bar{t}} q(t) \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(\bar{t}-t)}}{(\bar{t}-t)^{3/2}} dt \right] dx_1 dx_2 \right\} = T_0^{(i)}, \quad /6/$$

де Δ_i - проекція S_i на координатну площину $(x_1, 0, x_2)$;

$$F^{(i)}(x_1, x_2) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^2}.$$

Невідомі функції $q_i(x_1, x_2)$ і $q(t)$ зобразимо у вигляді

$$q_i(x_1, x_2) = \sum_{r=1}^{N^{(i)}} \frac{\alpha_r^{(i)} \beta_r^{(i)}}{[\beta_r^{(i)}]^2 + (x_1 - x_{1r}^{(i)})^2 + (x_2 - x_{2r}^{(i)})^2}, \quad /7/$$

$$q(t) = \operatorname{erfc}(\sqrt{\bar{t}}) e^{\bar{t}-t}, \quad /8/$$

де $\alpha_r^{(i)}$ - невідомі коефіцієнти; $\beta_r^{(i)}$ - деякі наперед задані нелінійні параметри; $x_r^{(i)}$ - точки, які належать області S

$$\operatorname{erfc}(\sqrt{\bar{t}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\bar{t}}}^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad /9/$$

Враховуючи /8/ і розкладаючи $e^{\bar{t}-t}$ у ряд Тейлора, обчислимо в /6/ інтеграли по часу. Тоді дістаємо

$$-\frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\bar{t}})}{2^4 \pi^{3/2}} \left\{ \sum_{i=1}^m \iint_{\Delta_i} q_i(x_1, x_2) F^{(i)}(x_1, x_2) \left\{ \frac{2^2}{2} [(Y_1 + \alpha Y_2^2) - Y_2] \times \right. \right. \\ \times \left(\frac{2^2 R_1}{2^2} + R_0 \right) - \frac{2^4}{2^4} R_2 Y_2 \left. \right\} + \sum_{p=3}^{\infty} \left[\frac{1}{(p-1)!} (E_{p-2}(\bar{t}) + Q_{p-2}(\bar{t}) R_0(\bar{t})) \times \right. \\ \left. \times (Y_1 + \alpha Y_2^2 - \frac{1}{p} Y_2) \right] \left. \right\} dx_1 dx_2 = T_0^{(i)}, \quad /10/$$

$$R_0(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{z/c} (z/2\sqrt{\pi}) ;$$

$$R_1(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{4\pi}} (z/2\sqrt{\pi}) + \frac{R_0(z)}{2} ;$$

$$R_2(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{4\pi}} (z/2\sqrt{\pi}) \left[\left(\frac{z}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 + \frac{3}{2} \right] + \frac{3}{2} R_0(z) ;$$

$$E_p(z) = e^{-\frac{z^2}{4\pi}} \sum_{j=1}^p \frac{(\bar{t})^{p-(j-\frac{1}{2})} z^{2(j-1)}}{(-2)^{j+1} \prod_{j=1}^p [2p-(2j-1)]} ;$$

$$Q_p(z) = \frac{(-1)^p z^{2p-1}}{2^{p+2} \prod_p (2p-1)} .$$

Підставляючи /7/ у /10/ і застосовуючи метод колокації у точках x_k , отримуємо для визначення невідомих $\alpha_j^{(n)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь. При цьому підінтегральна функція має особливість, якщо точка інтегрування суміщається з точкою колокації. Обчислюючи подвійні інтеграли за методом з праці [1] В.Л.Рвачова, цю особливість можна усунути спеціальним вибором точок інтегрування та точок колокації.

Одержана система лінійних алгебраїчних рівнянь добре зумовлена. При цьому діагональні елементи матриці – домінуючі і визначник системи – відмінний від нуля. Визначивши невідомі $\alpha_j^{(n)}$, температурне поле у довільній точці $\bar{x}$ простору при кожному t знаходимо за формулою /3/.

Список літератури: І. Бережанская З.С.,
Галазюк В.А., Дюдкевич И.В. Нестационарная задача
теплопроводности в пространстве с включениями. — XIV научное совещание
по тепловым напряжениям в элементах конструкций. К., Наукова думка,
1977. 2. Интегральные уравнения/Забрейко П.И., Кошелев А.И.,
М.А.Красновальский и др. М., Наука, 1968.

УДК 518:517.948

Ю.В.Нікольський

ПРО ОДИН ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ

За аналогією до методу Рунге-Куты розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь пропонуємо нову ідею побудови чисельних методів спуску для задачі відшукування екстремуму функцій.

Розглянемо подібний метод для мінімізації опуклої і достатньо гладкої функції $f(x)$, заданої на всьому просторі E_n або на деякій його опуклій множині

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n f'(x_n),$$

$$S_n = \theta f'(x_n) + (1 - \theta) f'(x_{n+1}), \quad 0 < \theta < 1, \quad (f'(x_n), S_n) > 0, \quad /1/$$

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де коефіцієнти α_n, β_n визначають відповідно з умов

$$g_1(\alpha_n) = \min_{\alpha} g_1(\alpha),$$

$$g_1(\alpha) = f(x_n - \alpha f'(x_n)),$$

/2/

$$g_2(\beta_n) = \min_{\beta} g_2(\beta),$$

$$g_2(\beta) = f(x_n - \beta S_n).$$

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ обмежена внизу $\inf f(x) = f$, її градієнт $f'(x)$ задовольняє умову Ліпшица $\|f'(x) - f'(y)\| \leq R \|x - y\|$, $R > 0$ для довільних $x, y \in E_n$, а вибір α_n, β_n здійснюється з умов /2/, то вектор S_n в /1/ визначає напрямок спуску і $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f$.

Доведення. Якщо $f'(x_n) = 0$, то в /1/ одержуємо тривіальний випадок $x_n = x_{n+1} = \dots$. Тому припускаємо $f'(x_n) \neq 0$. Тоді

$$f(x_{n+1}) = f(x_n - \beta_n S_n) \leq f(x_n - \beta S_n),$$

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \beta (f'(x_n), S_n) - \frac{\beta^2}{2} R \|S_n\|^2.$$

При виборі $\beta = \frac{(f'(x_n), S_n)}{R \|S_n\|^2}$ одержуємо

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \frac{L^2 \|f'(x_n)\|^2}{2R} > 0,$$

де

$$L = \frac{(f'(x_n), S_n)}{\|f'(x_n)\| \|S_n\|},$$

тобто послідовність $\{f(x_n)\}$ є монотонно спадною, і з огляду на обмеженість функції $f(x_n) - f(x_{n+1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f.$$

Застосуємо /1/ до мінімізації квадратичної функції $f(x) = \frac{1}{2} (Ax, x)$, де матриця A — додатно визначена і симетрична. Тоді формули /1/, /2/ набувають вигляду

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$S_n = A(x_{n+1} - \alpha_n Ax_n),$$

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n S_n, \quad /3/$$

$$\alpha_n = \frac{\|Ax_n\|^2}{(A^2x_n, Ax_n)},$$

$$\beta_n = \frac{\theta \|Ax_n\|^2 + (1-\theta)(Ax_n, Ax_{n_1})}{\theta^2(A^2x_n, Ax_n) + 2\theta(1-\theta)(A^2x_{n_1}, Ax_n) + (1-\theta)^2(A^2x_{n_1}, x_{n_1})}.$$

Очевидно, що вектор S_n визначає напрямок спуску. Для знаходження $n+1$ наближення одержуємо

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) \left[1 - \frac{\|Ax_n\|^2}{(A^2x_n, Ax_n)(Ax_n, x_n)} N_n(\theta) \right], \quad /4/$$

де

$$N_n(\theta) = \frac{\theta^2}{1 - 2\lambda_{1n}(1-\theta) + \lambda_{2n}(1-\theta)^2}; \quad /5/$$

$$\lambda_{1n} = \frac{\|A^2x_n\|^2 \|Ax_n\|^2}{(A^2x_n, Ax_n)^2}; \quad \lambda_{2n} = \frac{\|Ax_n\|^4 (A^3x_n, A^2x_n)}{(A^2x_n, Ax_n)^3}.$$

З /5/ видно, що при $\theta=1$ можна отримати метод найшвидшого спуску.

Нехай $m\|p\|^2 \leq (Ap, p) \leq M\|p\|^2$, $M \geq m > 0$, $p \in E_n$, тоді, використовуючи оцінку з [1], легко записати

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\leq f(x_0) \prod_{i=0}^n q_i, \\ \|x_{n+1}\| &\leq \|x_0\| \sqrt{\frac{M}{m}} \prod_{i=0}^n q_i^{1/2}, \\ q_i &= 1 - \frac{4Mm}{(M+m)^2} N_i(\theta). \end{aligned} \quad /6/$$

З формул /6/ випливає, що /3/ збігається до точки мінімуму для квадратичної функції не повільніше методу найшвидшого спуску [2], якщо

$$1 \leq N_i(\theta) \leq \alpha, \quad \alpha = \frac{M^2 + m^2}{2Mm}. \quad /7/$$

Таку швидкість збіжності можна одержати, якщо на кожному кроці вибраний параметр θ знаходиться у певних інтервалах, границі яких визначають з /5/ і залежать від λ_{1i} і λ_{2i} . Однак, оскільки обчислення проводять за формулами /3/, то значення λ_{1i} і λ_{2i} залежні від вибраного перед початком обчислень параметра θ і значень функції на цій ітерації. Тому оцінки, які можна отримати для таких границь, неефективні. Але можна показати, що, оскільки $\lambda_{2i} \geq \lambda_{1i} > 1$, то забезпечити виконання умови /7/ можна завжди, якщо параметр θ вибраний достатньо близький до одиниці. На основі отриманих результатів можна сформулювати теорему.

Теорема 2. Метод /1/ у застосуванні до мінімізації квадратичної функції при деякому виборі параметра збігається не повільніше, ніж метод найшвидшого спуску.

На прикладі тестових функцій

$$z = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2,$$

$$z = (1-x)^2 + 100(y-x^3)^2,$$

для яких мінімум, що дорівнює нулеві, досягається у точці /1,1/, з початковим наближенням /-0,5,0,5/ проведемо порівняння ефективності методів /1/ та найшвидшого спуску. Результати обчислень зведені у таблицю.

Метод	Значення функції						Час, с
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}		
I	2	3	4	5	6	7	
Номер ітерації							
$\theta = 1,0$	604	977	1212	1450	1717	5180	
$\theta = 0,75$	29	102	180	277	369	2210	
$\theta = 0,7$	59	106	158	237	284	1160	
$\theta = 0,6$	2	12	109	133	200	1580	
$\theta = 0,5$	113	174	255	289	473	2690	

Закінчення таблиці

1	2	3	4	5	6	7
$\theta = 1,0$	525	3711				
$\theta = 0,75$	27	239	438	550	754	3150
$\theta = 0,7$	126	294	398	513	712	2970
$\theta = 0,6$	26	79	274	504	698	2690
$\theta = 0,55$	7	162	352	559	790	2600

З наведених вище даних видно, що порівняно з іншими значеннями, вибір $\theta = 0,6 - 0,7$ дає найвищу швидкість збіжності, мінімізуючи послідовності до точки мінімуму при застосуванні методу /1/.

Список літератури: 1. Канторович Л.В. О методе наискорейшего спуска. - ДАН СССР, 1947, т.56, № 3. 2. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука, 1975.

УДК 519.21

І.Д.Квіт, Є.В.Москвяк

РОЗПОДІЛИ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ РУЙНУВАННЯ

Залежно від мікроструктури руйнування матеріалів може бути двох типів: з попередньою значною деформацією або без неї. В останньому випадку руйнування називається крихким. Однак для встановлення різниці, /з достатнім ступенем надійності/ між двома розподілами крихкого руйнування треба провести тисячі спроб, що нераціонально. Тому необхідно встановити апріорний розподіл крихкого руйнування.

Крихке руйнування настає внаслідок появи неоднорідностей критичної інтенсивності. Припустимо, що неоднорідності рівномірно розпо-

ділені в матеріалі у вигляді чужорідних включень, тріщин тощо. нас не цікавить природа неоднорідностей, для нас неоднорідність – причина крихкого руйнування матеріалу.

Виділимо в матеріалі деякий об'єм u . Позначимо через $p_0(u)$ – ймовірність відсутності критичної неоднорідності в об'ємі u . Зрозуміло, що

$$p_0(0) = 1, \quad p_0(\infty) = 0. \quad /1/$$

Нехай $p_0(v)$ – ймовірність відсутності критичної неоднорідності в об'ємі v , що несумісний з об'ємом u . Якщо припустити, що події з ймовірностями $p_0(u)$ і $p_0(v)$ незалежні, то ймовірність відсутності критичної неоднорідності в об'єднаному об'ємі $u+v$

$$p_0(u+v) = p_0(u) p_0(v). \quad /2/$$

Упохіднимо співвідношення /2/ по u та поділимо результат сторо-
нами на /2/. Одержимо

$$\frac{d \ln p_0(u+v)}{du} = \frac{d \ln p_0(u)}{du}. \quad /3/$$

Оскільки співвідношення /3/ повинно зберігатися при довільному значенні v , то воно стає. Отже,

$$\frac{d \ln p_0(u)}{du} = a, \quad a = \text{const}.$$

Звідси

$$\ln p_0(u) = au + \ln \theta, \quad \theta = \text{const}, \quad \theta > 0$$

і далі

$$p_0(u) = \theta e^{au}.$$

Використаємо граничні умови /1/. З умови

$$p_0(0) = \theta e^{a \cdot 0} = 1$$

випливає, що $\theta = 1$, а з умови

$$p_0(\infty) = e^{a \cdot \infty} = 0$$

маємо, що стала a – від'ємна. Введемо позначення $a = -\lambda$, де $\lambda > 0$. Таким чином, ймовірність відсутності критичної неоднорідності в об'ємі u

$$p_0(u) = e^{-\lambda u}. \quad /4/$$

Якщо вважати, що наявність в об'ємі u єдиної неоднорідності критичної інтенсивності призводить до руйнування цього об'єму, то ймовірність цієї події

$$F(u; \lambda) = 1 - e^{-\lambda u}, \quad u > 0, (\lambda > 0). \quad /5/$$

Отже, ймовірність крихкого руйнування матеріалу однією неоднорідністю критичної інтенсивності залежить від об'єму та швидко зростає зі збільшенням об'єму.

Математичне сподівання випадкової змінної з функцією розподілу /5/ дорівнює $\frac{1}{\lambda}$. Отже, обернене значення параметра λ експонентного розподілу /5/ є середнім об'ємом, що руйнується однією неоднорідністю критичної інтенсивності. Таким чином, λ – параметр масштабу.

Але, для того щоб крихке руйнування відбулося, потрібно принаймні $N > 1$ неоднорідностей. Число N назвемо мінімальним критичним числом. Будемо вважати, що поява неоднорідностей утворює пуассонів випадковий процес. Нехай ймовірність появи K неоднорідностей в об'ємі u дорівнює

$$p_K(u) = e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^K}{K!}, \quad (K = 0, 1, 2, \dots). \quad /6/$$

Тоді ймовірність руйнування об'єму u дорівнює ймовірності появи принаймні N неоднорідностей

$$\sum_{K=N}^{\infty} p_K(u) = e^{-\lambda u} \sum_{K=N}^{\infty} \frac{(\lambda u)^K}{K!}. \quad /7/$$

Правий бік /7/ можна записати у вигляді

$$\frac{\lambda^N}{(N-1)!} \int_0^u e^{-\lambda \tau} \tau^{N-1} d\tau.$$

Це легко перевірити повторним інтегруванням частинами останнього інтеграла. Лівий бік /7/ позначимо через $F(u; \lambda, N)$. Отже, /7/ запишемо у формі

$$F(u; \lambda, N) = \frac{\lambda^N}{(N-1)!} \int_0^u e^{-\lambda \tau} \tau^{N-1} d\tau, \quad u > 0, (\lambda > 0; N = 2, 3, \dots). \quad /8/$$

Вираз /8/ представляє ймовірність крихкого руйнування об'єму u внаслідок дії пуассонівського потоку неоднорідностей з мінімальним критичним числом N . Розподіл /8/ називається розподілом Ерланга.

Зауважимо, що коли один з вимірів об'єму u малий у порівнянні з двома іншими, то u вважаємо плоскою областю. Якщо два виміри малі в порівнянні з третім, то u вважаємо відрізком. Ймовірнісні закони крихкого руйнування не залежать від геометричної форми матеріалу.

Відзначимо також, що змінну u можна розуміти ще як час, міцність тощо. При цьому змінюється лише термінологія.

Виведений розподіл ймовірностей /8/ можна узагальнити, вважаючи N не обов'язково натуральним числом, а довільним додатним числом. При цьому факторіал узагальнюють до гамма-функції. Тому новий розподіл називається гамма-розподілом. Запишемо його у вигляді

$$F(t; \alpha, \beta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^t e^{-\alpha \tau} \tau^{\beta-1} d\tau, \quad t > 0, (\alpha > 0, \beta > 0), \quad /9/$$

де α - параметр масштабу; β - параметр форми.

Із наведених міркувань випливає, що крихке руйнування матеріалів при рівномірному розподілі у них неоднорідностей, незалежно від фізичної та хімічної природи неоднорідностей, апіорі керується гамма-розподілом.

Деформація додатної випадкової змінної ξ називається випадкова змінна $\alpha \xi^{\frac{1}{\theta}}$, де $\alpha > 0$, $\theta \neq 0$. При $0 < \alpha < 1$, $\theta = 1$ маємо стиск; при $1 < \alpha < \infty$, $\theta = 1$ — розтяг; при $\alpha = 1$, $\theta = -1$ — інверсія.

Деформація експонентної випадкової змінної ξ з функцією розподілу

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad /10/$$

при $\alpha > 0$, $\theta > 0$ називається деформацією Вейбула. Функція розподілу деформації Вейбула для $t > 0$

$$P\{\alpha \xi^{\frac{1}{\theta}} \leq t\} = P\{\xi \leq (\frac{t}{\alpha})^{\theta}\} = \int_0^{(\frac{t}{\alpha})^{\theta}} e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-(\frac{t}{\alpha})^{\theta}}.$$

Таким чином, деформація Вейбула експонентної випадкової змінної з функцією розподілу /10/ має розподіл

$$G(t; \alpha, \theta) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-(\frac{t}{\alpha})^{\theta}}, & t \geq 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0, \theta > 0). \quad /11/$$

Функція /11/ називається функцією розподілу Вейбула.

Коли функцію розподілу /10/ тлумачити як імовірність руйнування матеріалу за час t однією неоднорідністю критичної інтенсивності [порівн./5/], то /11/ треба приймати як імовірність руйнування матеріалу однією неоднорідністю критичної інтенсивності при попередній значній деформації. Параметри α та θ розподілу /11/ характеризують деформацію. Відзначимо, що Вейбул у праці [2] подає приклади допасовування розподілів типу /11/ до різних експериментальних даних. Методи оцінки параметрів, розподілів /9/ і /11/ розглядаються, наприклад, у працях [3 і 4].

Незалежно від параметра θ , з /11/ дістаємо

$$G(\alpha; \alpha, \theta) = G(\alpha) = 1 - e^{-1} = 0,632. \quad /12/$$

Це означає, що вартість параметра α є абсцисою, відповідною 63,2%-ній ординаті розподілу Вейбула. Отже, параметр α в розподілі /II/ - параметр масштабу.

Коли значення параметра α відоме, то параметр θ можна знайти різними способами. Наприклад, зі співвідношення

$$G\left(\frac{\alpha}{\theta}; \alpha, \theta\right) = G\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \quad /13/$$

дістаємо

$$\theta = -t_{\theta} \{-\ln [1 - G(\frac{\alpha}{\theta})]\}, \quad /14/$$

або зі співвідношення

$$G(2\alpha; \alpha, \theta) = G(2\alpha) = 1 - e^{-2\frac{\alpha}{\theta}} \quad /15/$$

випливає

$$\theta = t_{\theta} \{-\ln [1 - G(2\alpha)]\}. \quad /16/$$

Зі співвідношень /13/ і /15/ бачимо, що з ростом θ розподіл Вейбула стрімкіше змінюється на ділянці від $\frac{\alpha}{\theta}$ до 2α . Справді, це добре видно з таких даних:

θ	$G(\frac{\alpha}{\theta})$	$G(2\alpha)$
0,5	0,50	0,75
1	0,40	0,86
2	0,22	0,98
3	0,12	0,9997

Вони виражають загальну тенденцію: при $\theta \rightarrow \infty$ розподіл Вейбула збігається до виродженого в точці $t = \alpha$ розподілу. Отже, параметр θ у розподілі /II/ - параметр форми. Оскільки при $\theta = 1$ розподіл Вейбула збігається з експонентним, то чим параметр θ більший від одиниці, тим руйнування матеріалу відбувається зі значнішою попередньою деформацією. Наприклад, у праці [2] показано, що міцність індійської савовни на розрив характеризується параметром 1,456, а межа текучості сталі - параметром 2,934.

Легко перевірити, що деформація Вейбула гама змінної з функцією розподілу /9/ має густину

$$w(t; \alpha, \theta, \alpha, \beta) = \frac{\theta \alpha^\beta}{\alpha^\beta \Gamma(\beta)} e^{-\alpha(\frac{t}{\theta})^\beta} t^{\beta-1}, \quad t > 0, (\alpha > 0, \theta > 0, \alpha > 0, \beta > 0). \quad /17/$$

Початковий момент порядку κ , математичне сподівання, дисперсія та коефіцієнт варіації випадкової змінної з густиною /17/ відповідно дорівнюють

$$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\beta \Gamma(\beta)} \Gamma(\frac{\kappa}{\beta} + \beta), \quad (\kappa = 1, 2, \dots); \quad \frac{\alpha}{\alpha^\beta \Gamma(\beta)} \Gamma(\frac{1}{\beta} + \beta),$$

$$\frac{\alpha^2 \{ \Gamma(\frac{1}{\beta} + \beta) \Gamma(\beta) - \Gamma^2(\frac{1}{\beta} + \beta) \}}{\alpha^\beta \Gamma^2(\beta)}, \quad \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta} + \beta) \Gamma(\beta)}{\Gamma^2(\frac{1}{\beta} + \beta)} - 1}.$$

У розподілі з густиною /17/ параметри α і α - параметри масштабу; θ і β - параметри форми.

На підставі наведених міркувань робимо такий загальний висновок: руйнування матеріалів при рівномірному розподілі неоднорідностей у них, незалежно від фізичної та хімічної природи неоднорідностей, априорі керується розподілом з густиною /17/. Невідомі параметри оцінюємо з експерименту. Випадкова змінна з густиною /17/ залежно від вибраних параметрів описує різні процеси руйнування матеріалів - від крихкого до руйнування зі значною деформацією. Відзначимо, що процеси руйнування з різних точок зору розглядаються в семитомній енциклопедії руйнування [5], /порівн. [1] /.

Із наступної таблиці видно, які часткові випадки включає чотирипараметрична сім'я густин /17/:

Параметри				Розподіл
α	β	α	λ	
1	1	α	1	Експонентний
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	χ^2 - квадрат
1	1	α	n	Ерланга
1	1	α	β	Гама
1	2	α	$\frac{3}{2}$	Максвелла
$\sqrt{2}$	2	1	1	Релея
α	β	1	1	Вейбула

Таким чином, сім'я /17/ об'єднує багато розподілів, введених раніше.

Список літератури: 1. Разрушение. Т.2. Под.ред. Г.Либовиц. М., Мир, 1975. 2. Weibull, W. A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Mechanics*, 1951, vol. 18, n. 3. 3. *Technometrics*, 1969, vol. 11. 4. *Technometrics*, 1975, vol. 17. 5. *Fracture*, N.Y. - X.

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко, О.А.Миськів

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Розглядаємо задачу оптимального проектування складових оболонок обертання, які є елементами електровакuumних приладів. Мінімум цільової функції /маси конструкції/ шукають на допустимому підпросторі.

що визначаються обмеженнями на максимальні розтягуючі напруження та деякі геометричні параметри.

Оптимізується конструкція, що складається зі сферичної оболонки радіуса R_1 і товщини h_1 . Сферична оболонка на одному кінці спряжена з циліндричною оболонкою радіуса R_2 , товщини h_2 і довжини l_2 , а на другому – з циліндричною оболонкою радіуса R_3 , товщини h_3 і довжини l_3 . Циліндрична оболонка радіуса R_3 закрита круглою пластинкою товщини h_4 . Конструкція перебуває під рівномірним зовнішнім тиском q .

Задача оптимального проектування за вагою на міцність зводиться до відшукування мінімуму

$$V/\pi = R_1^3 h_1 + \frac{R_2^3 h_2}{4} + 2 R_2 l_2 h_2 + 2 R_3 l_3 h_3 + 2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) R_3^2 h_1 \quad /1/$$

при обмеженнях

$$\sigma_1^{\max} \leq [\sigma]; \quad \sigma_2^{\max} \leq [\sigma]; \quad /2/$$

$$C_1 h_1^{-1} h_4 \leq 1; \quad /3/$$

$$C_2 h_2^{-1} h_3 \leq 1; \quad /3'/$$

$$\sigma_0^{\max} \leq [\sigma];$$

$$C_3 h_3^{-1} h_4 \leq 1.$$

Регульованими параметрами вибирають товщини елементів конструкції.

Розрахунок конструкції і визначення максимальних розтягуючих напружень проводять аналогічно [3].

Задача оптимального проектування /1/-/3/ /1/-/3'/ методом апроксимації функцій одночленними поліномами за допомогою числових методів [3] зводиться до такої задачі геометричного програмування[1]:

знайти мінімум

$$g_0(\bar{h}) = C_2 h_1^{\theta_{22}} h_2^{\theta_{32}} h_3^{\theta_{42}} h_4^{\theta_{52}} \quad /4/$$

при вимушених обмеженнях

$$g_1(\bar{h}) = \frac{G_1^{\max}}{[G]} \approx C_3 h_1^{\theta_{13}} h_2^{\theta_{33}} h_3^{\theta_{43}} h_4^{\theta_{53}} ; \quad /5/$$

$$g_2(\bar{h}) = \frac{G_2^{\max}}{[G]} \approx C_4 h_1^{\theta_{14}} h_2^{\theta_{34}} h_3^{\theta_{44}} h_4^{\theta_{54}} ;$$

$$g_3(\bar{h}) = C_5 h_1^{-1} h_4 \leq 1 ; \quad /6/$$

$$g_4(\bar{h}) = C_6 h_2^{-1} h_3 \leq 1 ;$$

$$g_5(\bar{h}) = \frac{G_0^{\max}}{[G]} \approx C_5' h_1^{\theta_{25}} h_2^{\theta_{35}} h_3^{\theta_{45}} h_4^{\theta_{55}} \leq 1 ;$$

$$g_6(\bar{h}) = C_6' h_2^{-1} h_3 \leq 1 \quad /6'/$$

і натуральних

$$h_i > 0 \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad /7/$$

Ступінь важкості задач /4/-/7/ дорівнює нулеві.

Складена програма на алгоритмічній мові АЛГОЛ-60 стосовно транслятора ТА-ІМ, яка здійснює апроксимацію вихідних функцій одночленими поліномами, визначає оптимальні товщини та проводить розрахунок конструкції. Для уточнення отриманого розв'язку задачі /4/-/7/ використовується ітераційний процес [2].

Програми реалізовані при таких значеннях фіксованих параметрів:

$$q = 0,01 \text{ кг/мм}^2 ; E = 6240 \text{ кг/мм}^2 ; [G] = 0,9 \text{ кг/мм}^2 ; \nu = 0,2 ;$$

$$l_2 = l_3 = 25 \text{ мм} ; R_2 = 40 \text{ мм} ; R_1 = 100 \text{ мм} ; R_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} R_1 ;$$

$$C_5 = 0,5 ; C_6 = 0,25 ; \theta_2 = \pi - \arcsin(R_2/R_1) ; \theta_1 = \pi/2 + \pi/6 .$$

У задачах /4/-/6/, /7/ і /4/-/6'/, /7/ отримано оптимальні товщини:

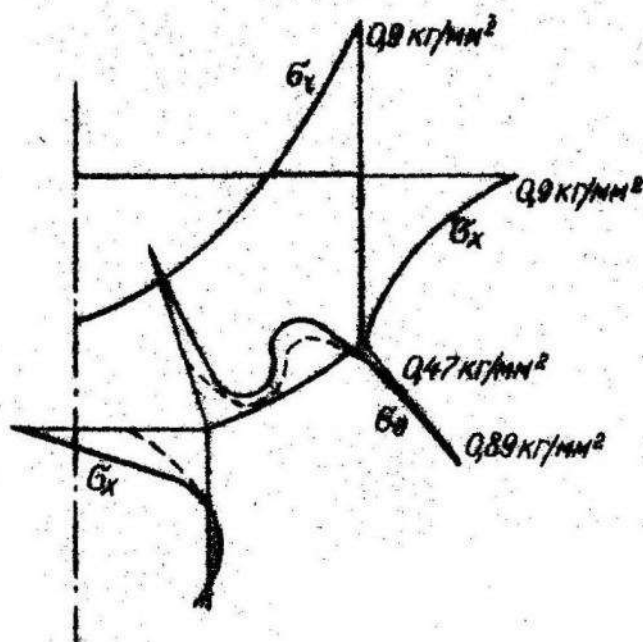
$$h_1 = 3,54 \text{ мм}; h_2 = 1,77 \text{ мм}; h_3 = 7,09 \text{ мм}; h_4 = 7,08 \text{ мм};$$

$$h_1 = 1,97 \text{ мм}; h_2 = 1,76 \text{ мм}; h_3 = 7,04 \text{ мм}; h_4 = 7,01 \text{ мм}.$$

Значення максимальних розтягуючих напружень, що виникають у точках спрężення циліндричної оболонки з пластинок і зі сферичною оболонкою, відповідно такі:

$$\sigma_z^{\max} = 0,89 \text{ кг/мм}^2; \sigma_x^{\max} = 0,89 \text{ кг/мм}^2; \sigma_\theta^{\max} = 0,47 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\sigma_z^{\max} = 0,90 \text{ кг/мм}^2; \sigma_x^{\max} = 0,90 \text{ кг/мм}^2; \sigma_\theta^{\max} = 0,89 \text{ кг/мм}^2.$$



Результати пружних розрахунків конструкції графічно зображені на рисунку /пунктир відповідає оптимальним товщинам при обмеженнях /2/-/3//.

При обмеженнях /2/-/3/ об'єм конструкції зменшився на 33%.

Список літератури: 1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., Мир, 1972. 2. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. М., Мир, 1973. 3. Ощипко Л.И., Іванків К.С., Діна Т.В. Оптимальний розрахунок деяких елементів електровакуумних приладів. - Вісник Львів.ун-ту, серія мех.-мат, вип.12, 1977.

УДК 539.3

В.М.Воян

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗРАХУНКУ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Аналіз напружено-деформованого стану просторових конструкцій, що перебувають під дією зовнішньої сили, проводиться на основі співвідношень тривимірної теорії пружності методом скінчених елементів.

Основні співвідношення методу скінчених елементів [4] будуються на основі узагальненого функціоналу Лагранжа

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} W(u) d\Omega - \int_S u t^v ds. \quad /1/$$

де Ω просторова область, яку займає тіло; S - частина границі області Ω , на якій задано поверхневе навантаження з вектором напружень t^v , що діє по зовнішній нормалі v до поверхні S ; $W(u)$ - пружний потенціал; u - вектор переміщень.

Область Ω зображається у вигляді суми скінчених елементів - криволінійних шестигранників з 8-ма /елемент першого порядку/ або 20-ма вузлами /елемент другого порядку/ [2]. Для побудови інтерполяційних

функція здійснимо перехід у межах кожного елемента від глобальних декартових $x = (x_1, x_2, x_3)$ до криволінійних локальних координат $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, $|\alpha^i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$. Це відповідає відображенню довільного скінченного елемента на куб зі стороною два /позначимо його Ω_0 /. На такому елементі Ω_0 будемо інтерполяційні функції

$$N_i(\alpha) = \frac{1}{8\pi} (x_0 \sum_{j=1}^3 \xi_{ji} \alpha^j - 2) \prod_{j=1}^3 (1 + \xi_{ji} \alpha^j) \text{ при } i = 1, 2, \dots, 8;$$

$$N_i(\alpha) = \frac{\prod_{j=1}^3 (1 + \xi_{ji} \alpha^j) \prod_{j=1}^3 (1 + \alpha^j)}{4 \prod_{j=1}^3 (1 + \eta_{ji} \alpha^j)} \text{ при } i = 9, 10, \dots, 20. \quad /2/$$

У цих позначеннях конкретна функція визначається значеннями ξ_{ji} , η_{ji} , які можуть дорівнювати 1, -1 або 0. Якщо розглядати елемент першого порядку, то для нього приймаємо $x_0 = 0$, $x = -2$. Для елемента другого порядку $x_0 = x = 1$.

Похідні компонент вектора переміщень у локальних координатах

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha^1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \alpha^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^3} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^3} & \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Коротко це запишемо так: $u_{i,\alpha} = J u_{i,x}$. Аналогічно можна записати

$$u_{2,\alpha} = J u_{2,x},$$

$$u_{3,\alpha} = J u_{3,x}.$$

Для того щоб здійснити обернене відображення, необхідно визначити матрицю J^{-1} . Позначимо

$$J^{-1} = \frac{1}{\Delta} A,$$

де A - матриця відповідних алгебраїчних доповнень матриці J ;

$\Delta = |J|$ - визначник матриці J . Введемо позначення $\frac{\partial N_j}{\partial \alpha^i} = C_{ij}$,

$i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, n$; $n = 8$ або $n = 20$. Елементи матриці A

знаходять через координати вузлів скінченного елемента і значення похідних інтерполяційних функцій таким чином:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \{ M_{(i+1),k} (C_{(j+1),k} C_{(j+2),m} - C_{(j+2),k} C_{(j+1),m}) M_{(i+2),m} \},$$

де індекс в дужках означає сумування по модулю три; $M_{ij} = x_j^i$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Обернена матриця J^{-1} визначена в явному вигляді, а не знаходиться чисельно. Визначник α матриці J

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_{1,k} C_{k,j} \right\} M_{1,j}.$$

Для побудови матриці жорсткості запишемо функціонал /1/ як суму

$$F(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^E \int_{\Omega_k} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega - \sum_{k=1}^{E^*} \int_{S_k} u t^v ds, \quad /3/$$

де E - кількість елементів області Ω ; E^* - кількість елементів, що прилягають до S ,

$$\varepsilon^T = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right).$$

Підінтегральний вираз квадратичної частини функціоналу /3/ можна перетворити таким чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon^T D \varepsilon &= \left(\frac{1}{\alpha} q e \right)^T D \left(\frac{1}{\alpha} q e \right) = \frac{1}{\alpha^2} e^T Q^T D Q e = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} q^T \Phi^T D^T Q^T D Q \Phi q = q^T \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \Psi^T R \Psi \right\} q, \end{aligned}$$

де $\Psi = D \Phi$, $R = Q^T D Q$

$$\Phi = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}, \quad N = (N_1, N_2, \dots, N_n);$$

q - вектор-стовпчик невідомих вузлових переміщень; D - матриця диференціювання по $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$;

$$q^T = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha^3} \right).$$

Елементи матриці R виначаються формулами

$$\begin{aligned} R_{11} &= q S_{11} + \mu S_{22} + \mu S_{33}, & R_{12} &= \mu S_{12} + \lambda S_{12}^T, \\ R_{22} &= \mu S_{11} + q S_{22} + \mu S_{33}, & R_{13} &= \mu S_{13} + \lambda S_{13}^T, \\ R_{33} &= \mu S_{11} + \mu S_{22} + q S_{33}, & R_{23} &= \mu S_{23} + \lambda S_{23}^T, \end{aligned}$$

де

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \alpha_{j1} & \alpha_{i2} \alpha_{j1} & \alpha_{i3} \alpha_{j1} \\ \alpha_{i1} \alpha_{j2} & \alpha_{i2} \alpha_{j2} & \alpha_{i3} \alpha_{j2} \\ \alpha_{i1} \alpha_{j3} & \alpha_{i2} \alpha_{j3} & \alpha_{i3} \alpha_{j3} \end{pmatrix},$$

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - постійні Ляме; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона матеріалу; $\rho = \lambda + 2\mu$.

Враховуючи, що $\alpha \Omega = \alpha \cdot \alpha \Omega_0$, матрицю жорсткості скінченного елемента записуємо як

$$Q_n = \int_{\Omega_0} \frac{1}{\alpha} \Psi^T R \Psi \alpha \Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{\alpha} \rho \alpha \Omega_0,$$

де

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix},$$

і кожну з матриць ρ_i , розміру $n \times n$ обчислюємо за алгоритмом

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= q T_{11} + \mu T_{22} + \mu T_{33}, & \rho_{12} &= \mu T_{11} + \lambda T_{12}^T, \\ \rho_{22} &= \mu T_{11} + q T_{22} + \mu T_{33}, & \rho_{13} &= \mu T_{13} + \lambda T_{13}^T, \\ \rho_{33} &= \mu T_{11} + \mu T_{22} + q T_{33}, & \rho_{23} &= \mu T_{23} + \lambda T_{23}^T. \end{aligned}$$

Елементи матриці T_{ij} /розміру $n \times n$ /

$$T_{ij} = \{z_{ip} \cdot z_{jl}\}_{i,p}, \quad i=1,2,3; \quad j,p=1,2,\dots,n;$$

$$z_{ip} = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} c_{kp}, \quad z_{jl} = \sum_{k=1}^4 \alpha_{jk} c_{kl}.$$

Для обчислення матриці жорсткості скінченного елемента необхідно проінтегрувати елементи матриці T_{ij} , розділені на α , і домножити їх відповідно на q, μ або λ . Зауважимо, що інтегрування проводиться для кожного скінченного елемента Ω_n у локальних координатах α на стандартному елементі Ω_0 . Тому значення інтерполяційних функцій N_i і їх похідних можна обчислити у фіксованих точках квадратурної формули Гаусса лише один раз і використовувати для обчислення матриці жорсткості кожного елемента. Це дає змогу значно скоротити об'єм обчислень.

Вектор навантаження скінченного елемента

$$F_n = \int_{\Omega_n} u' t' \alpha s = \rho \int_{\Omega_0} \Phi' \Phi Q' \Delta \alpha \alpha' \alpha \alpha',$$

де $\Delta = (F\theta - F)^{1/2} = (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2)^{1/2}$ - якобіан перетворення, що обчислюється при $\alpha^0 = 1$; ρ - інтенсивність поверхневого навантаження;

Q' - вектор напрямних косинусів у вузлах.

Схема методу скінченних елементів реалізована у вигляді комплексу програм на мовах АЛГОЛ-60 для ЕОМ М-222 і ФОРТРАН-IV для ЕОМ ЕС-1022. Щоб перевірити методику, проводили розрахунок напружено-деформованого стану порожнистого циліндра, навантаженого внутрішнім рівномірно розподіленим тиском інтенсивності ρ , при внутрішньому радіусі, який дорівнює двом, а зовнішньому - п'яти [3]. У цьому прикладі використано два елементи другого порядку по товщині. Результати обчислень переміщень у радіальному напрямі добре узгоджуються з точним розв'язком [3], а також з результатами, одержаними методом скінченних елементів на основі розрахунку циліндра як осесиметричного.

метричного тіла з вибором дев'яти трикутних елементів по товщині, і наведені нижче:

$\sigma \cdot 10^3$	2000	2375	2750	3125	3500	3875	4250	4625	5000
	3362	2923	2618	2398	2235	2114	2023	1955	1905
$E u_i \cdot 10^3$	3359	2904	2613	2386	2230	2106	2018	1948	1900
	3327	2878	2589	2365	2210	2088	2001	1932	1884

Тут у першому рядку наведено значення точного розв'язку, другому - розв'язку за методом скінченних елементів на основі осесиметричної теорії пружності, третьому - результати даної методики.

Список літератури: 1. Байков А.Д., Вульфович Н.А., Зарубаєв В.П. О расчете массивных конструкций с применением конечных элементов высокого порядка точности. - В сб.: Метод конечных элементов в строительной механике, Горький, 1975. 2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975. 3. Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970. 4. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів, Вища школа, вид-во при Львів.ун-ті, 1976.

УДК 518:519.3

Г.А.Шинкаренко, М.В.Марчук
РОЗРАХУНОК ТРИВИМІРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ
МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Нехай потрібно знайти розподіл температури u в об'ємі Ω , віднесеному до декартової системи координат x^i , $i = 1, 2, 3$.

Задача зводиться до інтегрування рівняння

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) = f \quad /1/$$

в області Ω при крайовій умові

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(u - T) = 0 \quad /2/$$

на поверхні Γ області Ω , де λ - коефіцієнт теплопровідності; α - коефіцієнт тепловіддачі / $\alpha \geq 0, \alpha \neq 0$ /; f - інтенсивність внутрішніх джерел тепла; T_∞ - температура зовнішнього середовища; ν - зовнішня нормаль до поверхні Γ .

Поставлена крайова задача еквівалентна знаходженню мінімуму функціонала [5]

$$F(u) = \int_{\Omega} \left[\lambda \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - 2fu \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha(u - T) u d\Gamma \quad /3/$$

на множині функцій з простору $W_2^1(\Omega)$, що задовольняють умову /2/ у тих точках $P \in \Gamma$, для яких $\lambda(P) = 0$ і $\alpha(P) \neq 0$.

Зобразимо об'єм Ω у вигляді об'єднання скінченного числа шестигранних елементів Ω_e , внутрішності яких попарно не перетинаються, але вони можуть мати спільну грань, ребро або вершину.

У цьому випадку функціонал /3/ зводиться до вигляду

$$F(u) = \sum_e F_e(u) = \sum_e \left[\int_{\Omega_e} \left[\lambda \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - 2fu \right] d\Omega + \int_{\Gamma_e} \alpha(u - T) u d\Gamma \right] /4/$$

де Γ_e - спільна частина границі Γ і поверхні скінченного елемента Ω_e .

Для побудови основних співвідношень методу скінчених елементів скористаємось ізопараметричною апроксимацією на шестигранниках [3]. Для цього введемо на елементі Ω локальну систему координат α^s / $\alpha^s \in I, s = 1, 2, 3$ / з початком координат в центрі маси і систему розрахункових вузлів $P_j(x_j^1, x_j^2, x_j^3), j = 1, 2, \dots$. Кожному вузлу P_j поставимо у відповідність деякий поліном $\mathcal{U}_j(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, такий, що $\mathcal{U}_j(P_i) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} - символ Кронекера [3]. За допомогою функцій $\mathcal{U}_j$ на елементі Ω_e величини x^s, u, f апроксимуються інтерполяційними поліномами

$$x^s = \sum_j \varphi_j x_j^s = \varphi x^s, \quad s = 1, 2, 3,$$

$$u = \sum_j \varphi_j q_j = \varphi q^e, \quad q_j = f(\rho_j), \quad /5/$$

$$f = \sum_j \varphi_j f_j = \varphi f^e, \quad f_j = f(\rho_j).$$

Між векторами $\varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial x^3} \right)^T$ та $\sigma = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial u}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial u}{\partial \alpha^3} \right)^T$ встановлюється залежність $\varepsilon = \Delta_e^{-1} J \sigma$, де елементи матриці J визначаються формулами

$$J_{11} = \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^1} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^1} - \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1}, \quad J_{12} = \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^1} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1} - \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1} \cdot \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^1} \quad /6/$$

та іншими, що одержуються з них шляхом циклічної перестановки індексів 1, 2, 3;

$$\Delta_e = \sum_{s=1}^3 J_{ks} \frac{\partial x^s}{\partial \alpha^k} = \sum_{s=1}^3 J_{ks} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^s} x^s = A_k x^k, \quad k = 1, 2, 3. \quad /7/$$

З врахуванням співвідношень /5/-/7/ зводимо інтеграл за об'ємом в функціоналі $F_e(u)$ до вигляду

$$\int_{\Omega} (\varepsilon^T \varepsilon - 2fu) d\Omega = \int_{\mathcal{K}} (\sigma^T D \sigma - 2fu) \Delta_e d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3, \quad /8/$$

де матриця $D = \lambda \Delta_e^{-2} J^T J$; $\mathcal{K}$ - куб $|\alpha^s| \leq 1$, $s = 1, 2, 3$. Використавши формули /4/, /5/, /7/, /8/ одержимо основні співвідношення методу скінченних елементів

$$F = \sum_e q^e{}^T (K_e q^e - 2M_e f^e), \quad /9/$$

$$\begin{aligned} K_e &= \int_{\mathcal{K}} \lambda \Delta_e^{-1} \left[\sum_{j,k=1}^3 J_{kj} J_{ki} \frac{\partial \varphi^T}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^j} \right] d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 = \\ &= \int_{\mathcal{K}} \lambda \Delta_e^{-1} \left[\sum_{k=1}^3 A_k^T A_k \right] d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3, \end{aligned} \quad /10/$$

$$M_e = \int_{\mathcal{K}} \Delta_e \varphi^T \varphi d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3. \quad /11/$$

Якщо деяка грань елемента Ω_e , скажімо $\alpha^3 = 1$, є частиною границі Γ , то в функціоналі $F_e(u)$ наявний член $\int_{\Gamma_e} \lambda u(u - T) d\Gamma$. У цьому

випадку апроксимуємо функції x^s, u, T на поверхні $\alpha^2=1$ формулами, аналогічними /5/ [для функцій x^s, u достатньо взяти $\alpha^2=1$ у виразах /5/]. Приймаючи $Q_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha^j}$, одержуємо елемент площі $d\Gamma$ у змінних α^1, α^2 : $d\Gamma = \sqrt{G_{11}G_{22}-G_{12}^2} d\alpha^1 d\alpha^2$. Підставляючи останній вираз в інтеграл по поверхні, одержуємо додаткові вклади у матриці /10/, /11/, зумовлені наявністю поверхневого інтегралу в функціоналі $F_e(u)$.

Інтеграла у виразах /10/, /11/ знаходять чисельно, причому обчислення $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^s}$ у вузлах квадратурної формули виконують один раз для всіх елементів. Таким чином, обчислення матриць K_e, M_e для кожного елемента зводиться до деякої послідовності матричних операцій.

З умов мінімуму функціоналу $F(u)$ одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\sum_e (K_e \varphi_e - M_e f^e) = 0$, розв'язок якої дає значення температури у розрахункових вузлах об'єму Ω .

Зауважимо, що застосування методу скінченних елементів до розв'язування задач на власні значення та нестационарних задач теплопровідності з використанням процесу Гальоркіна потребує обчислення виразів /10/, /11/.

Наведений алгоритм реалізований у вигляді АЛГОЛ-програми для транслятора ТА-2М ЕОМ М-222. За розрахункові вузли взято вершини шестигранників. Основні співвідношення обчислюють за допомогою квадратурної формули, яка дає точне значення інтеграла $\int_x f d\alpha$, якщо інтегрована функція є поліномом не вище n -ятого порядку [4]. У тримірному випадку ця формула вимагає обчислення чотирнадцяти значень інтегрованої функції, тоді як формули Гаусса такого порядку точності потребують обчислення її значень у 27 вузлах. Система рівнянь методу скінченних елементів формується без збереження рівнянь для вузлових параметрів, які можна визначити з крайових умов /2/; її розв'язок виконується методом Гаусса [5].

Приклад 1. Розв'язана задача про розподіл температури в сфері $2 \leq r \leq 6$ на внутрішній поверхні якої температура $u = 1$, на зовнішній - $u = 2$. Розрахунок здійснювали на сітці, наведеній у праці [1]. Результати зведені в таблицю. У першому рядку подано результати з праці [1], другому - результати розв'язування цієї задачі як осесиметричної з використанням лінійної апроксимації на трикутних елементах меридіанного перетину, третьому - результати, одержані додатковим розбиттям кожного трикутника на чотири подібних, четвертому - результати методики, і п'ятому - точні значення розв'язку.

r	3	4	5
1	1,49	1,74	1,89
2	1,4915	1,7441	1,8973
3	1,4978	1,7484	1,8992
4	1,5008	1,7524	1,9014
5	1,5000	1,7500	1,9000

У праці [1] використовувався такий самий ізопараметричний елемент, але допускалось, що визначник матриці Якобі Δ_e [7] набуває постійного значення у межах елемента, що дорівнює його величині у центрі маси.

Приклад 2. За цієї програмою розраховано потенціал електростатичного поля у кубі $|x^i| \leq 0,45$, $i = 1, 2, 3$, утвореного двома симетрично розміщеними пластинами /електродами/ $|x^i| \leq 0,25$ / $i = 1, 2$ /,

$x^3 = \pm 0,15$, на яких задані потенціали ± 1 . На гранях куба потенціал дорівнює нулеві. Обчислення проводили на тій же сітці, що у праці [2]. Наведемо значення потенціалу на осі x^1 :

$x^1 = 0,075 - 0,500$ /0,496/, $x^1 = 0,25 - 0,633$ /0,618/, $x^1 = 0,35 - 0,300$ /0,289/. У дужках представлені результати [2], одержані за допомогою різницевої схеми другого порядку точності.

Список літератури: 1. Гуляр А.И., Киселов И.В., Черный Б.М. Решение трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечных элементов. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1974, вып.22.

2. Дудкевич А.Т., Людкевич И.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток. - Вычислительная и прикладная математика, 1977, вып.32.

3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975.

4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М., Наука, 1967.

5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 1970.

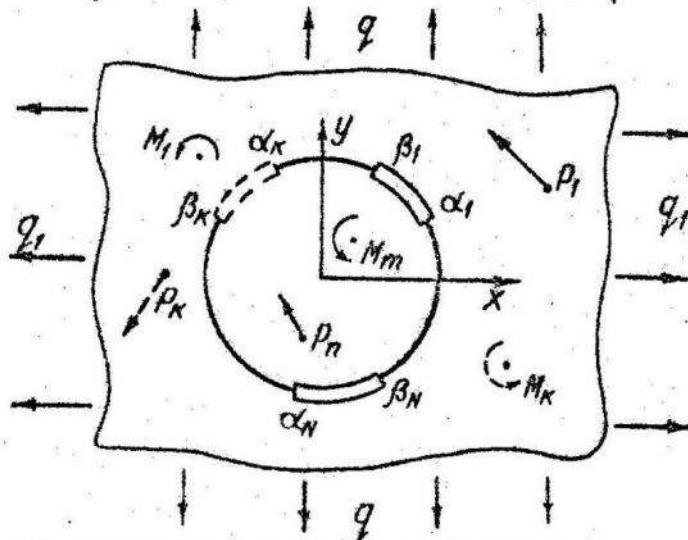
6. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів, Вища школа, вид-во при Львів.ун-ті, 1976.

УДК 639.311

Д.В.Гриліцький, Ю.І.Сорокати, Г.Т.Сулим
СИСТЕМА СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧІ
ДЛЯ ТОНКОСТІННИХ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ПО ДУЗІ КОЛА

Будуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь плоскої теорії пружності, що дає розв'язок задачі про збурення напружено-деформованого стану системою N -пружних тонкостінних включень постійної товщини $2h$, які розташовані на границі L розмежування матеріалів диску S , радіусом R і безмежної пластинки S_0 з відповідно пружними характеристиками ν_j, E_j ($j=1,2$)/див.рисунок/. Вважаємо, що пружні константи всіх включень ν_0, E_0 , а їхні осеві лінії складають у сукупності лінію $L' = \bigcup_{\kappa=1}^N \tilde{\alpha}_{\kappa} \tilde{\beta}_{\kappa} \subset L$. Компонент перебуває під дією однорід-

ного поля напружень на безмежності ($\sigma_y^\infty = q, \sigma_x^\infty = q_1, \tau_{xy}^\infty = 0$) і системи зосереджених сил $P_j = P_{xy} + i P_{\theta j}$, прикладених у точках z_{0j} ($j = \overline{1, n}$), та моментів M_j , прикладених у точках z_{j0} ($j = \overline{1, m}$).



Граничні умови задачі запишемо у вигляді:

$$[\sigma_{p2}(t) + i \tau_{p\theta2}(t)] - [\sigma_{p1}(t) + i \tau_{p\theta1}(t)] = f'(t), \quad t \in L', \quad /1/$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ [v_{p2}(t) + i v_{\theta2}(t)] - [v_{p1}(t) + i v_{\theta1}(t)] \} = i R g'(t) + R g(t) / i t, \quad t \in L'. \quad /2/$$

Функції $f(t)$, $g(t)$ - невідомі, причому $f'(t) = g(t) = 0$, коли $t \notin L'$.

Радіальні та дотичні напруження $\sigma_{pj}, \tau_{p\theta j}$, компоненти вектора переміщень $v_{pj}, v_{\theta j}$ /індекс j відносить відповідну величину до області $S_j, j = \overline{1, 2}$ / повинні задовольняти умови контакту середовища з тонким пружним включенням

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{\theta2} + v_{\theta1}}{2} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{v_{p2} + v_{p1}}{2} \right) = \kappa_0 T - \kappa_1 \frac{\sigma_{p2} + \sigma_{p1}}{2},$$

$$\frac{v_{\theta2} - v_{\theta1}}{2h} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_{p2} + v_{p1}}{2} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{v_{\theta2} + v_{\theta1}}{2} \right) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\tau_{p\theta2} + \tau_{p\theta1}}{2}, \quad /3/$$

$$\frac{v_{p2} - v_{p1}}{2h} = \kappa_0 \frac{\sigma_{p2} + \sigma_{p1}}{2} - \kappa_1 T,$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta2} - v_{\theta1}) + \frac{1}{R} (v_{p2} - v_{p1}) = -\kappa_2 (\sigma_{p2} - \sigma_{p1}),$$

$$\text{де } T = N_0 \epsilon_K - \frac{P}{2h} \int_{\alpha_K}^{\beta_K} [\tau_{p\theta 2}(\theta) - \tau_{p\theta 1}(\theta)] d\theta - \int_{\alpha_K}^{\beta_K} [\tau_{p\theta 2}(\theta) + \tau_{p\theta 1}(\theta)] d\theta.$$

Якщо в областях S_j ($j = 1, 2$) ввести в розгляд функції

$$\Omega_j(z) = \omega'_j(z) = [z \bar{\Phi}_j(\frac{R^2}{z}) + \bar{\Psi}_j(\frac{R^2}{z})]' = [\bar{\Phi}_j(\frac{R^2}{z}) - \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_j(\frac{R^2}{z}) - \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}'_j(\frac{R^2}{z})], \quad /4/$$

$$\text{де } \bar{\Phi}_j(z) = \bar{\phi}_j(z) + \bar{\phi}_{oj}(z), \quad \bar{\Psi}_j(z) = \bar{G}_j(z) + \bar{\Psi}_{oj}(z) \quad /5/$$

потенціали Колосова-Мусхелішвілі [2], і перейти до границі при $z \rightarrow t = Re^{i\theta}$, то умови /1/, /2/ перепишемо

$$[\bar{\phi}_{o2}(t) - \Omega_{o1}(t)]^+ - [\bar{\phi}_{o1}(t) - \Omega_{o2}(t)]^- = f'(t) + \alpha'(t), \quad /6/$$

$$[\frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{\phi}_{o2}(t) + \frac{1}{2\mu_1} \Omega_{o1}(t)]^+ - [\frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{\phi}_{o1}(t) + \frac{1}{2\mu_1} \Omega_{o2}(t)]^- = g'(t) + G(t), \quad /7/$$

де $\bar{\phi}_j(z)$, $\bar{G}_j(z)$, $\alpha'(t)$, $G(t)$ - відомі функції, що належать від навантаження; $\bar{\phi}_{oj}(z)$, $\bar{\Psi}_{oj}(z)$ і $\Omega_{oj}(z)$ - невідомі голоморфні функції у площині з розрізом по L' .

За формулами Сохоцького-Племеля з /6/ та /7/ одержуємо

$$X^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} [f'(t) + \alpha'(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(\tau) + \alpha'(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad /8/$$

$$Y^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} [g'(t) + G(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g'(\tau) + G(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad /9/$$

де

$$X^+(t) = \bar{\phi}_{o2}^+(t) - \Omega_{o1}^+(t); \quad Y^+(t) = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{\phi}_{o2}^+(t) + \frac{1}{2\mu_1} \Omega_{o1}^+(t), \quad /10/$$

$$X^-(t) = \bar{\phi}_{o1}^-(t) - \Omega_{o2}^-(t); \quad Y^-(t) = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{\phi}_{o1}^-(t) + \frac{1}{2\mu_1} \Omega_{o2}^-(t).$$

З /10/ легко записати

$$\bar{\phi}_{o2}^+(t) = \frac{\mu_2}{c_{21}} X^+(t) + \frac{2\mu_1\mu_2}{c_{21}} Y^+(t), \quad \Omega_{o1}^+(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{c_{21}} X^+(t) + \frac{2\mu_1\mu_2}{c_{21}} Y^+(t),$$

$$\bar{\phi}_{o1}^-(t) = \frac{\mu_1}{c_{12}} X^-(t) + \frac{2\mu_1\mu_2}{c_{12}} Y^-(t), \quad \Omega_{o2}^-(t) = -\frac{\mu_2\mu_1}{c_{12}} X^-(t) + \frac{2\mu_1\mu_2}{c_{12}} Y^-(t). \quad /11/$$

Скориставшись відомими [2] зображеннями напружень і переміщень через комплексні потенціали та врахувавши /5/, /10/ і /11/, маємо

$$G_{p1}(t) + i G_{p01}(t) = -m_n^+ f'(t) - l_1 g'(t) + m_n^- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} + l_1^+ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} + A(t),$$

$$G_{02}(t) = 4 \operatorname{Re} \{ A_2(t) + \Phi_{02}^+(t) \} - G_{p2}(t), \quad G_{01}(t) = 4 \operatorname{Re} \{ A_1(t) + \Phi_{01}^+(t) \} - G_{p1}(t), \quad /12/$$

$$U_{p1}(t) + i U_{01}(t) = \frac{R}{t} \left\{ -l_2^- f(t) + m_{21}^+ g(t) + l_2^+ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} - m_{21}^- \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} + B(t) \right\},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \theta} [U_{p1}(t) + i U_{01}(t)] &= i \left\{ -l_2^- f'(t) - m_{21}^- g'(t) + l_2^+ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} - m_{21}^- \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} \right\} + \\ &+ \frac{i}{t} \left\{ l_2^- f(t) + m_{21}^+ g(t) - l_2^+ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} + m_{21}^- \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} \right\} + D(t). \end{aligned}$$

Для відокремлення дійсної та уявної частини у співвідношеннях /12/ скористаємось відображенням лінії L' на відрізок дійсної осі

$L' = \tilde{U}[\alpha_n, \beta_n]$ за допомогою функції

$$t = -R \frac{x + i\tau}{x - i\tau} \cdot e^{i\omega}, \quad /13/$$

де $\tau = \operatorname{ctg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}$, ω та ε повільні кути, що задовольняють умови

$$\beta_n < \omega + \pi < \alpha_n, \quad \varepsilon \leq \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}.$$

Задовольняючи умови /3/, 1, вважаючи, що $f(t) = f_1(x) + i f_2(x)$, $g(t) = f_3(x) + i f_4(x)$, одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $f_j(x)$, ($j = \overline{1, 4}$)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \left\{ \alpha_{ij}(x) f_j'(x) + \beta_{ij}(x) \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_j'(\tau) d\tau}{\tau - x} + \int_{\alpha_i}^x \lambda_{ij}(\gamma) \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_j'(\tau) d\tau}{\tau - \gamma} d\gamma + \right. \\ \left. + \int_{\alpha_i}^x \kappa_{ij}(x, \gamma) f_j'(\gamma) d\gamma + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(x) [f_j(\tau)]_{\alpha_k}^{\beta_k} \right\} = F_i(x), \quad i = \overline{1, 4}, \quad /14/ \end{aligned}$$

де $F_i(x)$ - відомі функції. У /12/, /14/ прийнято такі позначення:

$$m_{kj}^{\pm} = \mu_k \frac{C_{jn} \pm C_{kn} x_k}{2 C_n C_{kn}}; \quad n_{kj}^{\pm} = \mu_k \frac{3 C_{jn} \pm C_{kn} x_k}{2 C_n C_{kn}}; \quad l_1^{\pm} = \mu_1 \mu_2 \left(\frac{1}{C_{12}} \pm \frac{1}{C_{21}} \right),$$

$$l_1^0 = \frac{C_{11} x_1 \pm C_{21} x_2}{4 C_n C_{11}}; \quad c_{kj} = \mu_k + x_k \mu_j, \quad (k, j = \overline{1, 2}; k \neq j);$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} \beta_{11}(x) &= -\beta_{13}(x) = \lambda_{11} R_2(x) R; \quad -\lambda_{11} \beta_{12}(x) = \beta_{14}(x) = \lambda_{11}(x) R \cdot R_1(x); \\
\lambda_{21} \beta_{21}(x) &= \beta_{23}(x) = \lambda_{21} R \cdot R_1(x); \quad \lambda_{21} \beta_{22}(x) = \beta_{24}(x) = \lambda_{21} \cdot R \cdot R_2(x); \\
\lambda_{31} \beta_{31}(x) &= \beta_{33}(x) = \lambda_{31} R R_2(x); \quad \lambda_{31} \beta_{32}(x) = \beta_{34}(x) = -\lambda_{31} \cdot R \cdot R_1(x); \\
\beta_{4j}(x) &= 0, \quad \lambda_{2j}(y) = \lambda_{4j}(y) = \kappa_{4j}(x, y) = \alpha_{4j}(x) = 0; \quad (j = \overline{1, 4}); \\
\lambda_{13} \alpha_{11}(x) &= \lambda_{12} \alpha_{13}(x) = \lambda_{12} \lambda_{13} R R_1(x); \quad \lambda_{13} \alpha_{12}(x) = \lambda_{12} \alpha_{14}(x) = \lambda_{12} \lambda_{13} R \cdot R_2(x); \\
\lambda_{23} \alpha_{21}(x) &= \lambda_{22} \alpha_{23}(x) = \lambda_{22} \lambda_{23} R R_2(x); \quad \lambda_{23} \alpha_{22}(x) = \lambda_{22} \alpha_{24}(x) = -\lambda_{23} \lambda_{22} R R_1(x); \\
\lambda_{33} \alpha_{31}(x) &= \lambda_{32} \alpha_{33}(x) = \lambda_{33} \lambda_{32} R \cdot R_1(x); \quad \lambda_{33} \alpha_{32}(x) = \lambda_{32} \alpha_{34}(x) = \lambda_{32} \lambda_{33} R R_2(x); \\
\alpha_{41}(x) &= \kappa_2 \alpha_{43}(x) = \kappa_2 R R_1(x); \quad \alpha_{42}(x) = \kappa_2 \alpha_{44}(x) = \kappa_2 R R_2(x); \\
\gamma_{14} \lambda_{11}(y) &= \gamma_{13} \lambda_{13}(y) = \gamma_{14} \gamma_{13} R_4(y); \quad \gamma_{14} \lambda_{12}(y) = \gamma_{13} \lambda_{14}(y) = \gamma_{13} \gamma_{14} R_3(y); \\
\gamma_{34} \lambda_{31}(y) &= \gamma_{13} \lambda_{33}(y) = \gamma_{34} \gamma_{33} R_3(y); \quad \gamma_{32} \lambda_{32}(y) = \gamma_{31} \lambda_{34}(y) = \gamma_{31} \gamma_{32} R_4(y); \\
\kappa_{11}(x, y) &= -\lambda_1 R_3(y); \quad \kappa_{12}(x, y) = \lambda_1 R_4(y); \quad \kappa_{13}(x, y) = \kappa_{14}(x, y) = 0; \\
\kappa_{21}(x, y) &= \lambda_2 R_4(x); \quad \kappa_{22}(x, y) = \lambda_2 R_3(x); \quad \kappa_{23}(x, y) = \kappa_{24}(x, y) = 0; \\
\kappa_{31}(x, y) &= -\lambda_3 R_3(y); \quad \kappa_{32}(x, y) = \lambda_3 R_4(y); \quad \kappa_{33}(x, y) = -\lambda_3 R_3(x); \quad \kappa_{34}(x, y) = \lambda_3 R_4(x); \\
\alpha_{11}(x) &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{x}{2\gamma} - \gamma_{13} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\gamma} - \frac{\gamma\kappa}{2} \right) \right]; \quad \alpha_{12}(x) = -\frac{1}{2\kappa} \left[1 + \gamma_{13} \ln \frac{x^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2} \right]; \\
\alpha_{21}(x) &= -\alpha_{22}(x) = -\frac{x}{2\pi\gamma}; \quad \alpha_{23}(x) = \left[\frac{\lambda_{21}}{2\kappa} + \lambda_2 R_4(x) \right]; \quad \alpha_{24}(x) = \left[\lambda_2 R_3(x) - \frac{\lambda_{21}x}{2\pi\gamma} \right]; \\
\alpha_{31}(x) &= -\frac{1}{\kappa} \left[\frac{x}{2\gamma} - \gamma_{33} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\gamma} - \frac{\gamma\kappa}{2} \right) \right]; \quad \alpha_{32}(x) = -\frac{1}{2\kappa} \left[1 + \gamma_{33} \ln \frac{x^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2} \right]; \\
\alpha_{33}(x) &= \frac{1}{\kappa} \left[\gamma_{34} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\gamma} - \frac{\gamma\kappa}{2} \right) - \frac{\lambda_{21}x}{2\gamma} \right] - \lambda_3 R_3(x); \\
F_1(x) &= \frac{2\kappa_0}{\Lambda_1} \int_{\alpha_1}^x \operatorname{Im} \{A(x)\} \frac{2\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx + \frac{\kappa_0 R}{\Lambda_1} N_{\alpha_1} - \frac{\kappa_1 R}{\Lambda_1} \operatorname{Re} \{A(x)\} - \frac{1}{\Lambda_1} \operatorname{Re} \{B(x)\} - \\
&- \frac{R}{\Lambda_1} \operatorname{Im} \{D(x)\}; \quad \alpha_{34}(x) = \lambda_3 R_4(x) - \frac{1}{2\kappa} \left[\lambda_{31} + \gamma_{14} \ln \frac{x^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2} \right]; \quad /15/ \\
F_2(x) &= R \mu_0 \operatorname{Re} \{D(x)\} - \mu_0 \operatorname{Im} \{B(x)\} + R \operatorname{Im} \{A(x)\}; \quad F_4(x) = 0; \\
F_3(x) &= \frac{\kappa_1 R}{\kappa_0 m_{12}} N_{\alpha_1} - \frac{R}{m_{12}} \operatorname{Re} \{A(x)\} + \frac{2\kappa_1}{\kappa_0 m_{12}} \int_{\alpha_1}^x \operatorname{Im} \{A(x)\} \frac{2\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= l_2^+ + \kappa_1 m_{12}^-; \quad \Lambda_2 = -(\mu_0 l_2^+ + m_{12}^-); \quad \Lambda_3 = m_{21}^+ - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - m_{12}^+; \\
\lambda_{11} &= (m_{11}^- - \kappa_1 l_1^+)/\Lambda_1; \quad \lambda_{12} = (l_2^- - \kappa_1 \Lambda_3)/\Lambda_1; \quad \lambda_{13} = (\Lambda_3 + \kappa_1 l_1^-)/\Lambda_1; \\
\lambda_{21} &= (\mu_0 m_{21}^- - l_1^+)/\Lambda_2; \quad \lambda_{22} = (\mu_0 l_2^- - \Lambda_3)/\Lambda_2; \quad \lambda_{23} = (\mu_0 \Lambda_3 + l_1^-)/\Lambda_2; \\
\lambda_{31} &= l_1^+ / m_{12}^-; \quad \lambda_{32} = -\Lambda_3 / m_{12}^-; \quad \lambda_{33} = l_1^- / m_{12}^-; \quad \lambda_1 = \kappa_0 R / 2h \Lambda_1; \\
\lambda_2 &= \mu_0 R / 2h \Lambda_2; \quad \lambda_3 = R / 2h \kappa_0 m_{12}^-; \quad \lambda_4 = \kappa_1 R / 2h \kappa_0 m_{12}^-; \quad \gamma_{11} = 2\kappa_0 \Lambda_3 / \Lambda_1; \\
\gamma_{12} &= 2\kappa_0 l_1^- / \Lambda_1; \quad \gamma_{13} = -2\kappa_0 m_{12}^- / \Lambda_1; \quad \gamma_{34} = -2\kappa_1 l_1^+ / \kappa_0 m_{12}^-; \quad \gamma_{14} = -2\kappa_0 l_1^+ / \Lambda_1; \\
\gamma_{31} &= -2\kappa_1 \Lambda_3 / \kappa_0 m_{12}^-; \quad \gamma_{32} = 2\kappa_1 l_1^- / \kappa_0 m_{12}^-; \quad \gamma_{33} = -2\kappa_1 / \kappa_0; \quad R_1(x) = x/R; \\
R_2(x) &= (\gamma^2 - x^2)/2\gamma R; \quad R_3(x) = (\gamma^2 - x^2)/(\gamma^2 + x^2); \quad R_4(x) = 2\gamma x/(\gamma^2 + x^2).
\end{aligned}$$

Функції $f_j(x)$ задовольняють додаткові умови

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_K}^{\beta_K} [\tau_{p\theta_2}(\theta) - \tau_{p\theta_1}(\theta)] d\theta + \frac{2h}{R} \int_{\alpha_K}^{\beta_K} [\tau_{p\theta_2}(\theta) + \tau_{p\theta_1}(\theta)] d\theta &= \frac{2h}{R} (N_{\beta_K} - N_{\alpha_K}) = \text{const}; \\
\frac{R}{2h} \int_{\alpha_K}^{\beta_K} [\sigma_{p\theta_2}(\theta) - \sigma_{p\theta_1}(\theta)] d\theta - \frac{1}{2} \int_{\alpha_K}^{\beta_K} [\sigma_{p\theta_2}(\theta) + \sigma_{p\theta_1}(\theta)] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\alpha_K}^{\beta_K} [\sigma_{\theta_2}(\theta) + \sigma_{\theta_1}(\theta)] d\theta &= \tau_{\beta_K}^c - \tau_{\alpha_K}^c = \text{const}; \\
\int_{\alpha_K}^{\beta_K} \frac{\partial}{\partial \theta} [v_{p\theta_2}(\theta) - v_{p\theta_1}(\theta)] d\theta &= \alpha_{\beta_K} - \alpha_{\alpha_K} = \text{const}, \quad /16 \\
\int_{\alpha_K}^{\beta_K} \frac{\partial}{\partial \theta} [v_{\theta_2}(\theta) - v_{\theta_1}(\theta)] d\theta &= c_{\alpha_K} - c_{\beta_K} = \text{const} \quad (\kappa = 1, \bar{N}).
\end{aligned}$$

У випадку абсолютно жорсткого включення $|E_0 \rightarrow \infty| f_3(x) = f_4(x) = 0$ і система /14/ вироджується у рівняння

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\overline{f'(t)} dt}{t - \tau} - \frac{l_2^-}{l_2^+} \overline{f'(t)} = -\frac{1}{R l_1^+} \{B(t) + i R D(t)\}, \quad t \in L' \quad /17/$$

для визначення $f_1(x)$ і $f_2(x)$.

Для розрізу, коли $E_0 \rightarrow 0, f_1(x) = f_2(x) = 0$, одержуємо рівняння

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g'(s) ds}{s-t} - \frac{t_1^-}{t_1^+} g'(t) = -\frac{L}{t_1^+} A(t), \quad t \in L. \quad /18/$$

Відзначимо, що при $R \rightarrow \infty$ так, що $R d\theta_k = \text{const}$ система /14/ переходить у відому систему рівнянь для визначення напруженого стану в пластинці з прямолінійними тонкостінними включеннями [1].

С п и с о к л і т е р а т у р и: І. Г р и л и ц к и й Д.В., С у л и м Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. - ПММ, т.39, 1975, № 3. 2. М у с х е л и - ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.

УДК 539.377

Т.Л.Мартинovich, С.І.Кібальнікова

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ В АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ ПРІ ЗАДАНІЙ ТЕМПЕРАТУРІ НА КОНТУРІ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ

Розглянемо плоску задачу стаціонарної термопружності для нескінченної анізотропної пластинки S , ослабленої криволінійним отвором Z , що описується рівнянням $x+iy = R(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^N C_k e^{-ik\theta} \chi(\sum_{k=1}^N k/C_k)^{1/2})$. Матеріал пластинки наділений прямолінійною анізотропією відносно пружних і теплових властивостей. Торцеві площини пластинки теплоізовані. На контурі отвору Z задана температура $T|_Z = T_0(s)$, а на зовнішній границі пластинки, віддаленій у нескінченність, підтримується стала температура T_∞ . Беручи до уваги, що $T = 2\text{Re}\Phi_3(z_3)$, $z_3 = x + \mu_3 y$ [4], задача зводиться до визначення аналітичної функції $\Phi_3(z_3)$ з граничної умови

$$\Phi_j(t_j) + \overline{\Phi_j(t_j)} = T_c(s) \text{ на } Z$$

$$\lim_{|z_j| \rightarrow \infty} \Phi_j(z_j) = \frac{1}{2} T_\infty.$$

/1/

Після того як функція $\Phi_j(z_j)$ визначена, комплексні потенціали $\Phi_j(z_j) = \varphi_j'(z_j)$, $j = 1, 2$, що описують напружений стан в анізотропній пластинці, знаходимо з граничних умов [2]

$$\begin{aligned} \int_2 F(t) dU &= -2(1+i\mu_3) \int_2 F(t) \Phi_3(t_3) dt_3 - \bar{z}(1+i\bar{\mu}_3) \int_2 F(t) \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3, \\ \int_2 \overline{F(t)} dU &= -2(1+i\mu_3) \int_2 \overline{F(t)} \Phi_3(t_3) dt_3 - \bar{z}(1+i\bar{\mu}_3) \int_2 \overline{F(t)} \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3, \end{aligned} \quad /2/$$

де

$$U = \sum_{j=1}^2 [(1+i\mu_j) \varphi_j(z_j) + (1+i\bar{\mu}_j) \overline{\varphi_j(z_j)}]; \quad /3/$$

z - відома стала [2,3]; t - афікс точки контура Z ; $z_j = x + \mu_j y$, $j = 1, 2, 3$ - узагальнені комплексні змінні областей S_j , які отримують в області S відповідними афінними перетвореннями; $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ - корені відповідних характеристичних рівнянь [4]; $F(t)$ - граничне значення довільної функції $F(z)$, голоморфної в області S .

Афікси точок контурів Z_j областей S_j і контура Z зв'язані співвідношеннями

$$t_j = \frac{1-i\mu_j}{2} t + \frac{1+i\mu_j}{2} \bar{t} \quad (j=1, 2, 3). \quad /4/$$

При великих $|z_j|$ функції $\Phi_j(z_j)$, $j = 1, 2, 3$ мають вигляд

$$\Phi(z_j) = A_j^\infty + D^{(j)} z_j^{-1} + O\left(\frac{1}{z_j^2}\right), \quad /5/$$

причому A_j^∞ , $j = 1, 2, 3$ - відомі сталі, а сталі $D^{(j)}$ визначаються з умов однозначності переміщень.

Нехай функція

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^N C_k \zeta^{-k} \right) (\omega'(\zeta) \neq 0, |\zeta| \geq 1) \quad /6/$$

конформно відображає зовнішність одиничного кола $r(|\zeta| > 1)$ на зовнішність контура $\mathcal{Z}$. Тоді співвідношення /4/ запишемо як

$$t_j = \frac{R_j}{R} [\omega(\zeta) + m_j \bar{\omega}(\frac{1}{\bar{\zeta}})], \quad (t_j \in \mathcal{Z}_j, \zeta \in r). \quad /7/$$

де

$$R_j = \frac{R(1-i\mu_j)}{2}; \quad m_j = \frac{1+i\mu_j}{1+i\mu_j} \quad (j=1,2,3).$$

Увівши позначення $\varphi_j(z_j) = \varphi_{*j}(\zeta_j)$, $\phi_3(z_3) = \phi_{*3}(\zeta_3)$, з врахуванням /5/, /6/, /7/ функція температури $\phi_3(z_3)$ і комплексні потенціали $\varphi_j(z_j) = \varphi'_j(z_j)$ $j=1,2$ допускають зображення [2,3]

$$\varphi'_j(z_j) = \frac{D^{(j)} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \alpha_{\kappa}^{(j)} \zeta_j^{\kappa} - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \bar{\alpha}_{\kappa}^{(j)} \zeta_j^{-\kappa}}{R_j[(\zeta_j - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa C_{\kappa} \zeta_j^{-\kappa}) - m_j R R^{-1}(\zeta_j^{-1} - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \bar{C}_{\kappa} \zeta_j^{\kappa})]}, \quad /8/$$

$$\phi_3(z_3) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} g_{\kappa} \zeta_3^{\kappa} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} G_{\kappa} \zeta_3^{-\kappa}. \quad /9/$$

Для обмеженості функцій $\varphi'_j(\zeta_j)$ і $\phi'_3(\zeta_3)$ в областях $1 < |\zeta_j| < \infty$ повинні виконуватися умови [1]

$$\varphi'_{*j}(\zeta_j^{(\nu)}) = 0 \quad (j=1,2) \quad (\nu=1,2,\dots,N-1). \quad /10/$$

$$\phi'_{*3}(\zeta_3^{(\nu)}) = 0 \quad (\nu=1,2,\dots,N-1), \quad /11/$$

де $\zeta_j^{(\nu)}$ - корені рівнянь

$$\zeta_j - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa C_{\kappa} \zeta_j^{-\kappa} - m_j R R^{-1}(\zeta_j^{-1} - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \bar{C}_{\kappa} \zeta_j^{\kappa}) = 0 \quad (j=1,2,3) \quad /12/$$

за модулем більші одиниці ($|\zeta_j^{(\nu)}| > 1$).

Для визначення коефіцієнтів розкладу шуканих функцій $\varphi_j(z_j)$ отримуюмо систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $4(N-1)$ виду

$$\sum_{j=1}^2 [(1+i\bar{\mu}_j) \bar{\alpha}_n^{(j)} + (1+i\mu_j) \alpha_n^{(j)}] = q_n, \\ \sum_{j=1}^2 [(1+i\mu_j) \alpha_n^{(j)} + (1+i\bar{\mu}_j) \bar{\alpha}_n^{(j)}] = f_n, \quad /13/$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \kappa \alpha_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^{-k} - \sum_{k=1}^{N-1} \kappa \alpha_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^k = \sum_{k=N}^{2N} \kappa \alpha_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^k + D^{(j)} \sum_{k=N}^{\infty} \kappa \alpha_k^{(j)} (\zeta_j^{(v)})^{-k}.$$

$$\alpha_n^{(j)} \text{ при } n > 2N, \quad (j=1,2) \quad (v=1,2,\dots,N-1).$$

Функцію температури $T_c(s)$, задану на контурі отвору Z , розкладемо на одиничному колі $r(|\sigma|=1)$ у комплексний ряд Фур'є

$$T_c = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \sigma^{-n} \quad (v_0 = T_{\infty}). \quad /14/$$

Внесемо /7/, /8/, /14/ у граничну умову /1/, тоді

$$\sum_{n=1}^N (g_n \sigma^n + \bar{g}_n \sigma^{-n}) + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n \sigma^n + a_n \sigma^{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \sigma^{-n} \text{ на } r. /15/$$

Із співвідношення /15/ знаходимо

$$G_n = \bar{v}_n - \bar{g}_n \quad (n=1,2,\dots,N), \quad G_n = \bar{v}_n \quad \text{при } n > N, \quad /16/$$

$$G_0 = \frac{1}{2} v_0, \quad v_0 = T_{\infty}.$$

Коефіцієнти g_n / $n=1,2,\dots,N-1$ / визначають з такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримують з /11/

$$\sum_{n=1}^{N-1} n [\bar{g}_n (\zeta_j^{(v)})^{-n} + g_n (\zeta_j^{(v)})^n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{v}_n (\zeta_j^{(v)})^{-n} \quad (v=1,2,\dots,N-1), /17/$$

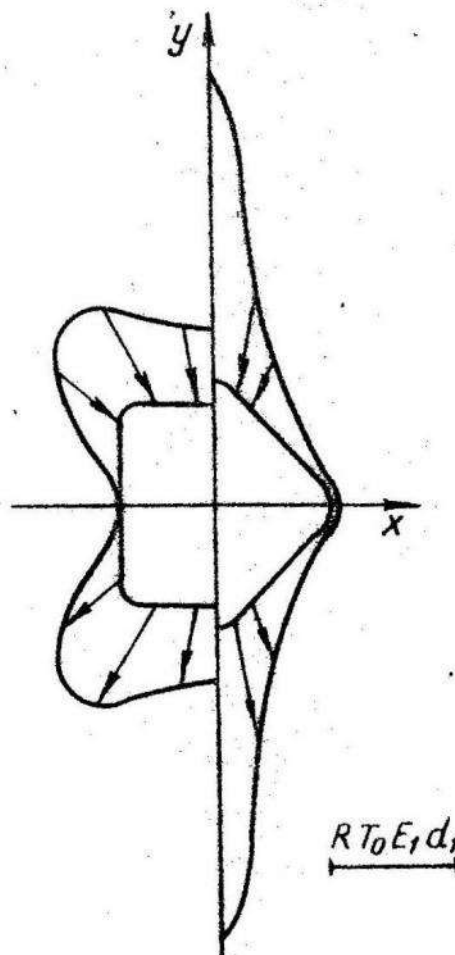
де $\zeta_j^{(v)}$ - корінь рівняння /12/ / $j=3$ / ($|\zeta_j^{(v)}| > 1$).

Як числовий приклад розглянемо ортотропну пластинку з квадратним отвором. У цьому випадку $N=3$, $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=\bar{C}_3$, $R=\bar{R}$, $\kappa_{12}=0$, $\alpha_0=0$, $\mu_j = i\beta_j$ / $j=1,2,3$ /. При додатному C_3 вершини квадрата лежать на осях x і y , а при від'ємному C_3 - сторони квадрата паралельні осям координат. На контурі квадратного отвору задана температура, що змінюється за законом $T_{1/2} = T_0 y$. Коефіцієнти розкладу функції температури /14/ відповідно дорівнюють

$$v_0 = 0, \quad v_1 = -\frac{1}{2} R T_0 i, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = \frac{1}{2} R T_0 C_3 i, \quad v_n = 0 \quad \text{при } n > 3.$$

Обчислення проведені для пластинки, виготовленої зі склотекстоліту КАСТ-В з такими пружними і теплофізичними характеристиками:

$$\frac{E_1}{E_2} = 1,45; \quad \frac{E_1}{G} = 6; \quad \nu_1 = 0,17; \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0,8; \quad \frac{K_{22}}{K_H} = 0,6 \quad /18/$$



На рисунку показані графіки розподілу напружень σ_θ у частках $(T_0 E_1 \alpha, R)$ по контуру квадратного отвору з закругленими кутами $(\rho_1 = \pm \frac{1}{6})$ відповідно для двох орієнтацій отвору.

Аналогічний приклад розглянуто у праці [5] методом малого параметра.

С п и с о к л і т е р а т у р и: 1. Мартынович Т.Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. - Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 6. 2. Мартынович Т.Л., Нищенко И.А., Махмуд Аллам. Температурные напряжения около эллиптического отверстия в анизотропной пластинке. - Прикладная механика, 1974, т.10, вып. 1. 3. Кібальнікова С.І. Визначення температурних напружень в рівномірно нагрітій анізотропній пластинці з криволінійним отвором. - Вісник Львів. політехн. ін-ту, № 119, Математика і механіка, 1977. 4. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд-во Саратовского ун-та, 1967. 5. Уздалев А.И., Юрьева А.А. Концентрация температурных напряжений в ортотропной пластинке с квадратным отверстием. - Прикладная механика, 1970, т.6, вып.2.

УДК 533.311

О.О. Євтушенко

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ СМУГИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Наше дослідження, як і праці [1,2], присвячене задачі про рівновагу кусково-однорідної смуги з тонкостінним пружним включенням на прямій лінії розділу матеріалів /рис.1/.

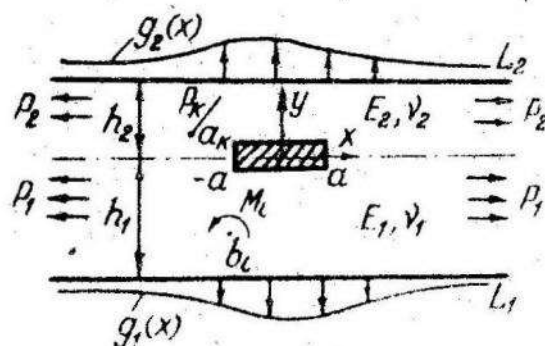


Рис. 1.

Припускаємо, що пружна система перебуває під дією напружень на безмежності p_j , розподілених вздовж берегів L_j зусиль $q_j(x)$ а також зосереджених сил $\vec{P}_\kappa$ і моментів M_ℓ , прикладених відповідно у точках $\alpha_\kappa, \beta_\ell$ $/j=1,2; \kappa=1,2,\dots,n \quad \ell=1,2,\dots,m/$

У розгляд вводимо стрибки напружень і похідних зміщень на лінії спаян смуг

$$(\sigma_{y1} - i\tau_{xy1}) - (\sigma_{y2} - i\tau_{xy2}) = f_1(x) - if_2(x),$$

$$(u'_1 + i v'_1) - (u'_2 + i v'_2) = f_3(x) + if_4(x), \quad x \in [-\alpha, \alpha], \quad //$$

$$f_j(x) = 0, \quad x \in [-\alpha, \alpha] \quad (j=1,2,3,4).$$

Для визначення невідомих функцій $f_j(x)$ маємо чотири умови взаємодії тонкостінного включення з матрицею [2].

Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної [2,3], розв'язок поставленої задачі зводимо до наступної системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f_2(t) dt}{t-x} + \frac{\lambda_n}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f_4(t) dt}{t-x} - \lambda_{n2} f_1(x) + \lambda_{n3} f_3(x) - \\ & - \lambda_1 \int_{-\alpha}^x f_2(t) dt + \frac{1}{\lambda_1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sum_{j=1}^4 K_j^1(x,t) f_j(t) dt = F_1(x), \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{[f_3(t) + \lambda_{21} f_1(t)] dt}{t-x} + \lambda_{22} f_2(x) + \lambda_{23} f_4(x) - \\ & - \lambda_2 \int_{-\alpha}^x f_3(t) dt + \frac{1}{\lambda_2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sum_{j=1}^4 K_j^2(x,t) f_j(t) dt = F_2(x), \quad //2/ \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{[f_4(t) + \lambda_{31} f_1(t)] dt}{t-x} + \lambda_{32} f_1(x) + \lambda_{33} f_3(x) + \\ & + \int_{-\alpha}^x [\lambda_3 f_2(t) + \lambda_4 f_4(t)] dt + \frac{k_0}{\ell_1^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sum_{j=1}^4 K_j^3(x,t) f_j(t) dt = F_3(x) \\ & f_3(x) = -k_2 f_1(x), \end{aligned}$$

де $\lambda_{ij}, \lambda_j, \lambda_j, \mu_0, \mu_2, \epsilon_j^*$ - деякі сталі, що залежать від пружних властивостей матеріалів включення і матриці, $F_j(x)$ - силові функції; $K_j^i(x, t)$ - регулярні фредгольмівські ядра. Явний вигляд їх внаслідок громіздкості не наводимо.

Напруження на безмежності та пружні сталі матеріалів смуг зв'язані співвідношеннями /3/, а шукані функції повинні задовольняти умови /4/.

$$\mu_2(x_1 \Gamma_1 - \bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}_1') = \mu_1(x_2 \Gamma_2 - \bar{\Gamma}_2 - \bar{\Gamma}_2'), \quad /3/$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_j(t) dt = A^j \quad /j = 1, 2, 3, 4/ \quad /4/$$

Формули для $f_j, \bar{f}_j' (j=1, 2), A^j$ наведені у праці [2].

Розв'язок системи рівнянь /2/ описує поведінку включення з довільними пружними властивостями: від абсолютно жорсткого до абсолютно податливого, яке моделює тріщину. Справедливість цього підтверджують отримані у часткових випадках відомі вже результати для пружного включення на лінії спая півплощин [2] і для тріщини на границі з'єднання смуг [3].

Коли смуги мають однакові пружні властивості, то розв'язок системи інтегральних рівнянь шукають методом ортогональних поліномів [4]. У результаті отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій у ряди по поліномах Чебишева I-го роду.

На ЕОМ М-222 проведено числовий аналіз задачі для одного випадку симетричного навантаження

$$b_y(x, \pm H) = q, \quad b_x^{\infty} = \bar{p}_n = M_t = 0 \quad (n=1, \dots, n; t=1, \dots, m).$$

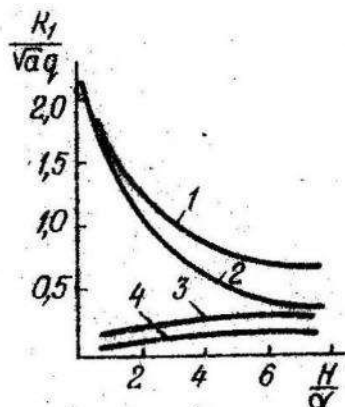


Рис. 2.

Обчислення проводили при $\alpha/h = 10$, $\nu_0 = \nu = 1/3$ з точністю до 1%, яку оцінювали числовим методом. На рис. 2 показано залежність коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень K_I від відносної ширини смуги H/α . Криві 1-4 відповідають значенням відносної жорсткості вклучення $k = E_0/E: 10^{-3}, 10^{-1}, 10, 10^3$.

С п и с о к л и т е р а т у р и: 1. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. - Прикладная механика, 1972, т.8, вып. II. 2. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями. - Прикладная механика, 1975, т.39, вып.3. 3. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В., Белокур И.П. Влияние подкрепляющих полуплоскостей на коэффициенты интенсивности напряжений у концов трещины в полосе. - ФХММ, 1976, № 5. 4. Сулим Г.Т., Грилицкий Д.В. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составного тела с трещинами. - ФХММ, 1976; №2.

УДК 539.311

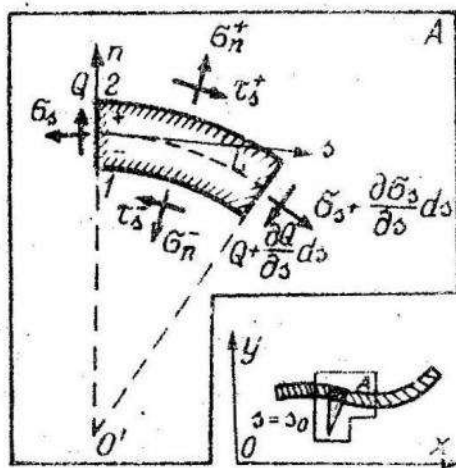
Г.Т. Сулим

ТЕРМОПРУЖНІ УМОВИ ВЗАЄМОДІЇ СЕРЕДОВИЩА З ТОНКОСТІННИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Визначимо умови, які у плоскій задачі теорії пружності задовольняють граничні значення напружень і переміщень у пружному середовищі на лінії контакту з ортотропним термопружним включенням малої товщини.

Від їх точності залежить достовірність і область застосування розв'язку задач про концентрацію напружень біля тонкостінних включень у конструктивних елементах.

Величини, що характеризують температуру T і напружено-деформований стан на лівому та правому краях включення, позначатимемо індексами "-" та "+", а у відповідних точках матриці - індексами "1" та "2" (див. рисунок/).



Складаючи рівняння рівноваги вузького елемента включення довжиною $ds = \rho d\theta$ і одиничною висотою в напрямку осі z , що перпендикулярна до площини xOy , одержуємо

$$\begin{aligned} Q - h\rho(\sigma_s'' + \sigma_s') - \rho(\tau_{sn}^+ - \tau_{sn}^-) - h(\tau_{sn}^+ + \tau_{sn}^-) &= 0, \\ \rho Q' - \rho(\sigma_n^+ - \sigma_n^-) + h(\sigma_s^+ + \sigma_s^-) - h(\sigma_n^+ + \sigma_n^-) &= 0, \\ Q + \frac{1}{3}h^2(\sigma_s^{'''} - \sigma_s'') + h(\tau_{sn}^+ + \tau_{sn}^-) + \frac{h^2}{\rho}(\tau_{sn}^+ - \tau_{sn}^-) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де s та n - напрямки дотичної і нормалі до серединної лінії L включення; ρ - радіус кривизни лінії L ; $2h$ - товщина включення; Q - перерізуюча сила у поперечному перерізі включення, штрихом позначено частинну похідну по s .

Матеріал включення вважаємо ортотропним з головними напрямками ізоотропії s , n і z . Тоді наявні формули

$$\varepsilon_i = \alpha_{ii} \sigma_i - \alpha_{ij} \sigma_j + \alpha_i (T - T_0), \quad \gamma_{sn} = \beta_{sn} \tau_{sn}, \quad (i, j = s, n; i \neq j), \quad /2/$$

де у випадку плоскої деформації

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{E_i} (1 - \nu_{iz} \nu_{zi}); \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{1}{E_i} (\nu_{ij} + \nu_{iz} \nu_{zj}); \quad \alpha_i = \alpha (1 + \nu_{zi});$$

для узагальненого плоского напруженого стану

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{E_i}; \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{\nu_{ij}}{E_i}; \quad \alpha_i = \alpha;$$

а також $\beta_{sn} = 1/G_{sn}$; α — коефіцієнт лінійного теплового розширення включення; T — абсолютна температура включення; T_0 — значення, від якого починається відрахунок температури включення; E_i , ν_{ij} , ν_{iz} , ν_{zi} , G_{sn} — пружні постійні включення.

Компоненти деформації визначаються відомими залежностями

$$\varepsilon_n = \frac{\partial u_n}{\partial n}, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{\rho}, \quad \gamma_{sn} = \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{u_s}{\rho}. \quad /3/$$

Згідно з формулами /2/,

$$\varepsilon_s^+ \pm \varepsilon_s^- = \alpha_{ss} (\sigma_s^+ \pm \sigma_s^-) - \alpha_{sn} (\sigma_n^+ \pm \sigma_n^-) + \alpha_s [(T_+ - T_0) \pm (T_- - T_0)], \quad /4/$$

$$\varepsilon_n^+ \pm \varepsilon_n^- = \alpha_{nn} (\sigma_n^+ \pm \sigma_n^-) - \alpha_{ns} (\sigma_s^+ \pm \sigma_s^-) + \alpha_n [(T_+ - T_0) \pm (T_- - T_0)], \quad /5/$$

$$\gamma_{sn}^+ \pm \gamma_{sn}^- = \beta_{sn} (\tau_{sn}^+ \pm \tau_{sn}^-), \quad /6/$$

де внаслідок малої товщини $2h$ -включення наявні наближені рівності

$$\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^- = \frac{u_n^+ - u_n^-}{h}, \quad \varepsilon_s^+ \pm \varepsilon_s^- = u_s^{t+} \pm u_s^{t-} + \frac{u_n^+ \pm u_n^-}{\rho},$$

$$\gamma_{sn}^+ + \gamma_{sn}^- = \frac{u_s^+ - u_s^-}{h} + u_n^{t+} + u_n^{t-} - \frac{u_s^+ + u_s^-}{\rho}, \quad \gamma_{sn}^+ - \gamma_{sn}^- = u_n^{t+} - u_n^{t-} - \frac{u_s^+ - u_s^-}{\rho}. \quad /7/$$

Після інтегрування другого рівняння рівновати /1/ з урахуванням /5/ і /7/ запишемо

$$Q = Q_0 + \int_{s_0}^s \left\{ \sigma_n^+ - \sigma_n^- + \frac{h}{\rho} (1 - \alpha_n) (\sigma_n^+ + \sigma_n^-) + \alpha_\rho [u_n^+ - u_n^- - \alpha_n h (T_+ + T_- - 2T_0)] \right\} \alpha s,$$

де $Q_0 = 0$ - значення перерізуючої сили Q на торці включення $S = S_0$ можна наближено вважати рівним нулю;

$$\alpha_p = \frac{1}{\rho \alpha_{nn}}; \alpha_i = \frac{\alpha_{ii}}{\alpha_{ij}}; \beta_i = \frac{\alpha_{ij} \alpha_{nn} - \alpha_{in} \alpha_{ni}}{\alpha_{in}}; \gamma_i = \frac{\alpha_{is} \alpha_{nn} + \alpha_{in} \alpha_{ni}}{\alpha_{in}} \quad (i, j = s, n; i \neq j).$$

Якщо з першого і третього рівняння рівноваги /1/ виключити Q , використати поряд із /7/ рівність /4/ та знехтувати величиною h^2/ρ^2 порівняно з одиницею, то отримаємо вираз для середнього значення позадовнього розтягуючого напруження σ_{sc} в поперечному перерізі включення

$$\sigma_{sc} = \frac{1}{2} (\sigma_s^+ + \sigma_s^-) = \sigma_{sc}^0 + \frac{1}{h} \int_{S_0}^s \left[\frac{1}{2} (\tau_{sn}^- - \tau_{sn}^+) - \frac{h}{\rho} (\tau_{sn}^+ + \tau_{sn}^-) \right] \alpha ds - \frac{h}{\rho} (\sigma_s^+ - \sigma_s^-),$$

де

$$\sigma_s^+ - \sigma_s^- = \frac{1}{\alpha_s} (\sigma_n^+ - \sigma_n^-) + \frac{1}{\alpha_{ss}} (u_s^+ - u_s^-) + \frac{1}{\rho \alpha_{ss}} (u_n^+ - u_n^-) - \frac{\alpha_s}{\alpha_{ss}} (T_+ - T_-);$$

σ_{sc}^0 - значення σ_{sc} у перерізі $S = S_0$.

Умови ідеального механічного контакту включення з матрицею запишемо

$$u_{ii} = u_i^-, \quad u_{iz} = u_i^+, \quad \sigma_{ni} = \sigma_n^-, \quad \sigma_{nz} = \sigma_n^+, \quad \tau_{in}^+ = \tau_{in}^-, \quad \tau_{sn}^+ = \tau_{sn}^- \quad (i = s, n) / 8 /$$

Тепер вкажемо чотири варіанти умов взаємодії середовища із включенням.

I. Співвідношення /4/-/6/, взяті зі знаками "+", а також третє рівняння рівноваги /1/ з врахуванням наближень /7/ та умов /8/, дають

$$u_{s1}' + u_{n1}' + \left[\frac{u_{n2} + u_{m1}}{\rho} \right]^* = 2\alpha_{ss} \sigma_{sc} - \alpha_{sn} (\sigma_{n2} + \sigma_{m1}) + \alpha_s (T_+ + T_- - 2T_0),$$

$$\frac{1}{h} (u_{n2} - u_{n1}) = \alpha_{nn} (\sigma_{n2} + \sigma_{n1}) - 2\alpha_{sn} \sigma_{sc} + \alpha_n (T_+ + T_- - 2T_0),$$

$$\frac{1}{h} (u_{s2} - u_{s1}) + \left[(u_{n2}' + u_{n1}') - \left[\frac{1}{\rho} (u_{s2} + u_{s1}) \right]^* \right]^{**} = \beta_{sn} (\tau_{sn}^2 + \tau_{sn}^+), \quad / 9 /$$

$$\int_{S_0}^s \left\{ \frac{1}{h} (\tau_{sn}^2 + \tau_{sn}^+) + \left[\frac{1}{\rho} (\tau_{sn}^2 - \tau_{sn}^+) \right]^* + \frac{Q}{h^2} \right\} \alpha ds + \sigma_s^+ - \sigma_s^- = 0$$

поряд з

$$Q = \int_{s_0}^s \left\{ \sigma_{n2} - \sigma_{n1} + \left[\frac{h}{\rho} (1 - \alpha_n) (\sigma_{n2} + \sigma_{n1}) \right]^* + \alpha_p [u_{n2} - u_{n1} - \alpha_n h (T_+ + T_- - 2T_0)] \right\} \alpha ds,$$

$$\sigma_{sc} = \sigma_{sc}^0 + \frac{1}{h} \int_{s_0}^s \left\{ \frac{1}{2} (\tau'_{sn} - \tau_{sn}^2) - \left[\frac{4}{\rho} (\tau_{sn}^2 + \tau'_{sn}) \right]^* \right\} \alpha ds - \frac{h}{\rho} (\sigma_s^+ - \sigma_s^-),$$

$$\sigma_s^+ - \sigma_s^- = \frac{1}{\alpha_s} (\sigma_{n2} - \sigma_{n1}) + \frac{1}{\alpha_{ss}} (u'_{s2} - u'_{s1}) + \left[\frac{L}{\rho \alpha_{ss}} (u_{n2} - u_{n1}) \right]^* - \frac{\alpha_s}{\alpha_{ss}} (T_+ - T_-).$$

Зірочки означають, що відповідними членами у квадратних дужках при певних умовах можна знехтувати, про що буде мова далі.

Замість однієї довільної з двох перших умов/9/зручно взяти співвідношення, яке отримуємо виключенням з них значень σ_{sc} .

$$u'_{s2} + u'_{s1} + \left[\frac{1}{\rho} (u_{n2} + u_{n1}) \right]^* + \frac{\alpha_s}{h} (u_{n2} - u_{n1}) - \frac{h}{\rho} (\sigma_{n2} + \sigma_{n1}) + \frac{h}{\rho} (T_+ + T_- - 2T_0) = 0. \quad /10/$$

Умови для прямолінійного включення одержуємо при $\rho \rightarrow \infty$.

Можна запропонувати цілий ряд спрощень умов взаємодії:

а/у кожному з рівнянь рівноваги /І/ четверті доданки дістаємо, врахувавши різниці у довжині ліній контакту елемента включення зліва та справа, і при малому h/ρ ними можна знехтувати. Припущення вказує на те, що $h(\sigma_n^+ + \sigma_n^-)/\rho$ мале порівняно з $\sigma_n^+ - \sigma_n^-$ і тому в отриманих співвідношеннях можна відкинути квадратні дужки, відзначені однією зірочкою;

б/ значення h/ρ вважається малим порівняно з одиницею. Тому у виразах /7/ можна знехтувати величинами, які містять множник h/ρ , а в умовах не брати до уваги виразів, що відзначені двома зірочками;

в/ жорсткість включення на згин мала. Тоді виразом $h^2(\sigma_s^+ - \sigma_s^-)$ у третьому рівнянні рівноваги /І/ можна знехтувати і четверта умова з /9/ набере вигляду

$$Q + \left[\frac{h^2}{\rho} (\tau_{sn}^2 - \tau'_{sn}) \right]^* + 3h (\tau_{sn}^2 + \tau'_{sn}) = 0; \quad /11/$$

г/ розглянемо абсолютно гнучке ниткоподібне тонке включення.

У цьому випадку можна вважати, що $\sigma_s^+ - \sigma_s^- = 0$, $Q = 0$ і не розглядати

третьє рівняння рівноваги /1/, а замість четвертої умови /9/ слід взяти залежність

$$\sigma_{m2} - \sigma_{m1} + \frac{1}{\rho} \int_{s_0}^s \frac{1}{h} (\tau_{sn}^2 - \tau'_{sn}) ds + \frac{1}{\rho} [\sigma_{m2} + \sigma_{m1} + \int_{s_0}^s \frac{1}{\rho} (\tau_{sn}^2 + \tau'_{sn}) ds - 2\sigma_{sc}^0] = 0, \quad /12/$$

яку отримують з першого і другого рівнянь рівноваги після виключення $\sigma_s^+ + \sigma_s^-$ та підстановки $Q = 0$. Крім того, у третьому співвідношенні /9/ треба знехтувати членом, що відзначений трьома зірочками;

д/ вважаючи товщину включення досить малою, включення гнучким і беручи до уваги всі попередні припущення та нехтуючи поперечними деформаціями, одержуємо максимально спрощені умови для малоподатливого, але гнучкого включення

$$u_{n1} = u_{n2}, \quad u_{s1} = u_{s2}, \quad \sigma_{n1} = \sigma_{n2}, \quad /13/$$

$$u'_{s2} + u'_{s1} = 2\alpha_{ss} \sigma_{sc} - \alpha_{sn} (\sigma_{n2} + \sigma_{n1}) + \alpha_s (T_+ + T_- - 2T_0). \quad /14/$$

А коли ще вважати, що нормальні поперечні напруження σ_n не викликають повздовжніх деформацій включення ($\alpha_{sn} = 0$), то замість /14/ дістаємо ще простішу умову

$$u'_{s2} + u'_{s1} = 2\alpha_{ss} \sigma_{sc} + \alpha_s (T_+ + T_- - 2T_0), \quad /15/$$

де, як і для /14/,

$$\sigma_{sc} = \sigma_{sc}^0 + \frac{1}{2h} \int_{s_0}^s (\tau'_{sn} - \tau_{sn}^2) ds.$$

Співвідношення /13/ і /15/ без врахування температури використовуються переважною більшістю дослідників, що вивчають задачі про тонкостінні включення [4,7], а також різні модифікації задачі Райснера про витягування стержня з пружного середовища, чи Мелана про накладку на пружну півплощину.

Подібне до /15/ співвідношення можна отримати з перших двох умов /9/, якщо з них виключити $\sigma_{n2} + \sigma_{n1}$, прийняти $\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^- = 0$ і згадані вище спрощення

$$u'_{s2} + u'_{s1} = 2\sigma_n \sigma_{sc} + \sigma_n (T_+ + T_- - 2T_0). \quad /16/$$

Така умова, поряд з /13/, використовується Аткинсоном [5] для ізотропного прямолінійного включення при відсутності температурного нагрівання. У праці [6] формула /16/ узагальнюється на випадок, коли включення контактує з матрицею по певній частині своєї бічної поверхні.

К.С.Чобанян і А.С.Хачикян [4] вивели умови взаємодії гнучкого ортотропного включення без температурних членів з неявним використанням припущень а, б, г, однак до розв'язання задач у цій та інших роботах користувалися лише гранично спрощеними умовами /13/, /15/. У публікації [2] за умови взаємодії прямолінійного ізотропного включення прийнято /10/, третю формулу з /9/ та $\sigma_n = \sigma_n, \tau_n' = \tau_n'$. Подібні, але більш прості умови, використовує Г.П.Черепанов [3] для абсолютно пластичного включення з нестисливого матеріалу.

Відзначимо, що в усіх згаданих працях вважають торцьове зусилля

$\sigma_{sc}^0 = 0$. Виняток становлять автори статті [1].

2. Для тонкого включення можна наближено прийняти

$$\varepsilon_n^+ - \varepsilon_n^- = 0. \quad /17/$$

Ця умова виконується точно за відсутності згину, при повній симетрії задачі. Тоді з /4/ і /5/ маємо

$$u_{sz}' - u_{sy}' + \left[\frac{1}{\rho} (u_{sz} - u_{sy}) \right]^{**} = \sigma_s (\sigma_n - \sigma_n) + \sigma_s (\tau_n - \tau_n). \quad /18/$$

Це співвідношення разом з першими трьома з /9/ дає другий варіант умов взаємодії, які стосовно прямолінійного ізотропного пружного включення використовувались у праці [1].

3. Беручи до уваги четверте співвідношення /7/, яке слід вважати точним при справедливості гіпотези плоских перетинів, згідно з /6/ отримаємо

$$u_{sz}' - u_{sy}' - \left[\frac{1}{\rho} (u_{sz} - u_{sy}) \right]^{**} = \sigma_{sn} (\tau_{sn}^2 - \tau_{sn}'). \quad /19/$$

Цей вираз разом з /10/ і двома останніми з /9/ становить третій варіант умов.

4. Третя формула з /9/, а також /10/, /18/, /19/ дають у сукупності четвертий варіант, який є найбільш простий для практичного застосування.

Кожний з варіантів 2,3,4 допускає, як і перший, відповідні спрощення. Варіанти апробували на основних граничних випадках.

Якщо $E_s = E_n = \infty$, то всі варіанти дають відносно прості умови для жорсткого включення, яке допускає теплове розширення, зокрема при відсутності температурного поля /або $\alpha = 0$ / матимемо граничні умови $u_{n1} = u_{n2} = u_{s1} = u_{s2} = 0$.

Коли розглянути гнучке ниткоподібне включення і прийняти $E_s = E_n = \infty$, $T_s = T_n = T_0$, то всі розглядувані варіанти дадуть умови для нерозтягнливого ниткоподібного включення: /12/ та

$$u_{s1} = u_{s2}, u_{n1} = u_{n2}, u'_{s2} + u'_{s1} + \frac{1}{\rho} (u_{n2} + u_{n1}) = 0. \quad /20/$$

При $E_s = E_n = 0$ маємо граничні умови для неконтактуючої щілини

$$\sigma_{n1} = \sigma_{n2} = \tau'_{sn} = \tau''_{sn} = 0.$$

Очевидно, що розв'язок задачі повинен задовольняти умову

$$u_{n2} - u_{n1} \geq -2h \text{ або } u_n^+ - u_n^- \geq -2h, \quad /21/$$

яка відображає фізичну неможливість проникнення берегів включення один поза інший. Якщо отриманий розв'язок не задовольняє /21/, то слід змінити постановку задачі: лінію L розділити на L' , де виконується /21/ та наявні співвідношення вибраного варіанту умов взаємодії, і на L'' , де

$$u_{n2} - u_{n1} = -2h \quad /22/$$

приймається замість другої умови /9/ у варіантах 1 та 2 і замість /10/-у варіантах 3,4. Відзначимо, що для отримання умов контактуючої щілини у варіантах 1 та 2 необхідно додатково вважати $\alpha_{sn} = 0$, тоді як варіанти 3 й 4 не вимагають додаткових припущень.

Якщо розглянути включення з абсолютно пластичного, але нести-
сливого матеріалу (рідке нестисливе включення), то у випадку плоскої
деформації перші дві умови з /9/, які використовують у варіантах
1 та 2, вироджуються у дві однакові, і тоді необхідно залучати до-
даткові умови. Варіанти 3 і 4 цього не вимагають.

Розглянемо включення, модулі пружності E_s , E_n якого відмінні
від нуля, але скінченні, та спрямуємо h до нуля. Тоді варіанти
1, 3 дають умови ідеального механічного контакту $u_{n1} = u_{n2}$, $u_{s1} = u_{s2}$,
 $\sigma_{n1} = \sigma_{n2}$, $\tau'_{sn} = \tau'_{sn}$, тоді як варіанти 2 і 4 дають ці умови, коли на
берегах безмежно малого включення відсутній стрибок температур $T_s = T_n$.
Це може не виконуватися, якщо теплопровідність включення дорівнює
нулеві.

Точність умов взаємодії залежить від припущень, покладених
в їх основу. Найбільш точні співвідношення варіанта 1, а далі –
варіанта 3; менш точні – співвідношення варіантів 2 і 4, оскільки
не зазначена наявна умова /17/. Найбільш універсальним можна вважати
варіант 3, бо при його використанні не треба робити ніяких застере-
жень.

С п и с о к л і т е р а т у р и: 1. Г р и л и ц к и й Д.В.,
С у л ь м Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонко-
стенными включениями. – Прикладная математика и механика, 1975, т.39,
вып.3. 2. К у р ш и н Л.М., С у з д а л ь н и ц к и й И.Д.
Напряжения в плоскости с заполненной щелью. – Прикладная механика,
1973, т.9, вып.10. 3. Ч е р е п а н о в Г.П. Механика хрупкого
разрушения. М., Наука, 1974. 4. Ч о б а н я н К.С., Х а ч и -
к я н А.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с
тонкостенным гибким включением. – Известия АН Арм.ССР. Механика,
1967, т.20, №6. 5. Atkinson C. Some ribbon-like inclusion prob-
lems. – International Journal of Engineering Science, 1973, v.11, n.2.
6. Brussat J. R., Westmann R. A. A Wastergaard-type stress

function for line inclusion problem. - *International Journal of Solids and Structures*, 1975, v. 11, № 7. Erdoğan F., Gupta G. D. Stresses near a flat inclusion in bonded dissimilar materials. - *International Journal of Solids and Structures*, 1972, v. 8, № 4.

З М І С Т

Кардаш А.І., Костовський О.М., Чулик І.І. Асимптотичні властивості діаграми Ньютона подвійного ряду Лорана	3
Кардаш А.І., Костовський О.М., Чулик І.І. Про область збіжності подвійного ряду Лорана і його асимптотичної мажоранти Ньютона	8
Мартиненко Марія Д. Про розв'язки еліптичних систем у багатов'язних областях	12
Бакалець В.А., Людкевич И.В. Метод неозначених коефіцієнтів розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона	17
Коркуна М.Д. Застосування динамічного методу програмування до розв'язування одного класу граничних задач	22
Жук М.В. Метод механічних квадратур для лінійних інтегральних рівнянь	28
Остудін Б.А. Застосування сплайнів до розв'язування деяких інтегральних рівнянь	35
Бережанська З.С. Чисельний розв'язок третьої крайової задачі для рівняння теплопровідності в R^3 методом інтегральних рівнянь	40
Нікольський Ю.В. Про один чисельний метод мінімізації	44
Квіт І.Д., Москв'як Є.В. Розподіли деяких процесів руйнування	48
Ощипко Л.Й., Миськів О.А. Оптимальний розрахунок складових оболонок обертання	55
Вовк В.М. Застосування методу скінчених елементів до розрахунку просторових конструкцій на основі тривимірної теорії пружності	59
Шинкаренко Г.А., Марчук М.В. Розрахунок тривимірних температурних полів методом скінчених елементів	64
Гриліцький Д.В., Сорокатий Ю.І., Сулим Т.Т. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі для тонкостінних пружних включень по дузі кола	69

Мартинovich Т.Л., Кібальнікова С.І. Визначення температурних напружень в анізотропній пластинці при заданій температурі на контурі криволінійного отвору	75
Євтушенко О.О. Напружений стан кусково-однорідної смуги з включенням	80
Сулим Г.Т. Термопружні умови взаємодії середовища з тон- костінним включенням	83

УДК 518.12:517.55

Асимптотические свойства диаграммы Ньютона двойного ряда Лорана.
Кардаш А.И., Костовский А.М., Чудык И.И. -
"Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы
анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 3-7
/на укр.яз./.

Исследуются асимптотические свойства диаграммы Ньютона двойного
ряда Лорана. Вводится понятие асимптотической мажоранты Ньютона
двойного ряда Лорана. Список лит.: 2 назв.

УДК 518.12:517.55

Об области сходимости двойного ряда Лорана и его асимптотической
мажоранты Ньютона. Кардаш А.И., Костовский А.М.,
Чудык И.И. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15.
Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов.
ун-те, 1979, с. 8-11 /на укр.яз./.

Получены в аналитическом виде формулы, определяющие границу
области сходимости двойного ряда Лорана на диаграмме Рейнхарта.
Исследованы ее свойства. Список лит.: 4 назв.

УДК 517.944:947

О решениях эллиптических систем в многосвязных областях.
Мартыненко Мария Д. - "Вестн. Львов. ун-та, серия
мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа",
изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 12-16 /на укр.яз./.

Доказано, что решение эллиптической системы /1/ в n -связной
области может быть представлено в виде суммы n решений той же
системы в односвязных областях. Список лит.: 3 назв.

УДК 517.949.8

Метод неопределенных коэффициентов решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Бакалец В.А., Людкевич И.В. — "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 17-22 /на укр.яз./.

Рассматривается точный метод решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона на плоскости и в пространстве в случае гладких замкнутых кривых /поверхностей/ второго порядка, когда правая часть уравнения является полиномом произвольной степени. Список лит.: 2 назв.

УДК 517.944+518.61

Использование динамического метода программирования для решения одного класса граничных задач. К о р к у н а М.Д. — "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 22-28 /на укр.яз./

Используется метод динамического программирования к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Рассматривается алгоритм, в результате применения которого отпадает необходимость вычисления обратных матриц. Приведены численные примеры. Список лит.: 2 назв. Илл. 2.

УДК 518.517.3

Метод механических квадратур для линейных интегральных уравнений. Х у к М.В. — "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 28-35 /на укр.яз./.

Доказана теорема, устанавливающая существование и сходимость решения приближенной системы линейных интегральных уравнений, полученной с помощью метода механических квадратур, примененного к соответствующему линейному интегральному уравнению. Ил. 1. Список лит.: 2 назв.

УДК 518.517.948

Использование сплайнов при решении некоторых интегральных уравнений. О с т у д и н Б.А. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 35-40 /на укр.яз./.

Рассматривается задача численного решения некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода со слабой особенностью в ядре. В силу некорректности подобных задач для их решения используется метод саморегуляризации, а полученное при этом интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода решается с помощью сплайнов по неравномерной сетке. Список лит.: 3 назв.

УДК 518:517.944/.947

Численное решение третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности в R^3 методом интегральных уравнений. Б е р е ж а н - с к а я З.С. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 40-44 /на укр.яз./.

Рассмотрена третья краевая задача для уравнения теплопроводности в R^3 . Задача сведена с помощью теплового потенциала двойного слоя к решению интегрального уравнения. Предложен алгоритм автоматизирующий решение этой задачи для многосвязных областей, заданных в явном виде. Список лит.: 2 назв.

УДК 518:517.948

Об одном численном методе минимизации. Н и к о л ь с к и й Ю.В.
"Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы
анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979,
с. 44-48 /на укр.яз./.

Предложен метод минимизации функций многих переменных. Доказана
сходимость этого метода в случае выпуклой функции. Показано, что
предложенный метод при определенном выборе параметра может сходиться
не медленнее, чем метод наискорейшего спуска. Табл. I. Список
лит.: 2 назв.

УДК 519.21

Распределения некоторых процессов разрушения. К в и т И.Д.,
М о с к в я к Е.В. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15.
Численные методы анализа. Львов. "Вища школа", изд-во при Львов.
ун-те, 1979, с. 48-55 /на укр.яз./.

Выводится четырехпараметрическое семейство вероятностных плотно-
стей, описывающих процессы разрушения: от хрупкого до разрушения
с предыдущей значительной деформацией. Список лит.: 5 назв.

УДК 539.3

Оптимальный расчет составных оболочек вращения. Ощипко Л.И., Мискив А.А. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 55-59 /на укр.яз./.

Решается задача оптимального проектирования по весу на прочность составных оболочек вращения. За целевую функцию выбирается объем конструкции, допустимое подпространство определяется ограничениями на максимальные растягивающие напряжения и на некоторые геометрические параметры. Задача оптимального проектирования с помощью численных методов сводится к задаче геометрического программирования. Решена задача оптимального расчета конструкции, состоящей из сферической оболочки, сопряженной на одном конце с цилиндрической оболочкой закрытой круглой пластинкой, а на другом - с цилиндрической оболочкой. Ил. 1. Список лит.: 3 назв.

УДК 539.3

Применение метода конечных элементов к расчету пространственных конструкций на основе трехмерной теории упругости. Вовк В.М. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 59-64 /на укр.яз./.

Предложена одна схема метода конечных элементов для анализа напряженно-деформируемого состояния пространственных конструкций, находящихся под воздействием внешней силы. Уравнения выводятся из соотношений трехмерной теории упругости с использованием изопараметрических конечных элементов. Список лит.: 4 назв.

УДК 518:519.3

Расчет трехмерных температурных полей методом конечных элементов. Ш и н к а р е н к о Г.А., М а р ч у к М.В. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 64-69 /на укр.яз./.

На основании изопараметрического преобразования координат предлагается эффективный алгоритм построения основных соотношений метода конечных элементов для решения краевых задач теории теплопроводности. Указываются особенности АЛГОЛ-программы, реализующей данную методику. Приведены результаты численных расчетов и их сопоставления с известными приближенными решениями. Табл. 1. Список лит.: 6 назв.

УДК 539.311

Система сингулярных интегральных уравнений задачи для тонкостенных упругих включений по дуге окружности. Г р и л и ц к и й Д.В., С о р о к а т ь й Ю.И., С у л ь м Г.Т. - "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 69-75 /на укр.яз./.

Построена система сингулярных интегральных уравнений плоской теории упругости, решение которой определяет напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной пластинки, состоящей из изотропной безграницной матрицы, в которую впаян изотропный диск при условии, что на границе раздела материалов матрицы и диска локализованы тонкостенные упругие включения. В частных случаях получены уравнения для трещин или жестких включений по дуге окружности, а также известная система, определяющая напряженное состояние пластинки с прямолинейными включениями на границе раздела материалов. Ил. 1. Список лит.: 2 назв.

УДК 539.377

Определение температурных напряжений в анизотропной пластинке при заданной температуре на контуре криволинейного отверстия. Мартынович Т.Д., Кибальникова С.И. - "Вести, Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 74-80 /на укр.яз./.

Дано решение плоской задачи статической термоупругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром Z , который описывается уравнением $x+iy=R(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^n c_k e^{-ik\theta})$, $(\sum_{k=1}^n k/|c_k|^2 < 1)$. Торцевые плоскости пластинки теплоизолированы. На контуре отверстия задана температура, а на внешней границе пластинки, удаленной в бесконечность, поддерживается постоянная температура. Внешние силовые воздействия отсутствуют. Рассмотрен числовой пример для ортотропной пластинки с квадратным отверстием. Ил. 1. Список лит.: 5 назв.

УДК 533.311

Напряженное состояние кусочно-однородной полосы с включением. Евтушенко А.А. - "Вести, Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 80-83 /на укр.яз./.

Исследуется концентрация напряжений возле тонкостенного упругого включения конечной длины, расположенного на прямой линии спая полос с различными упругими свойствами. С помощью методов теории функций комплексной переменной задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которых в одном частном случае ищется методом ортогональных полиномов. Приведены численные значения для коэффициентов интенсивности напряжений. Ил. 2. Список лит.: 4 назв.

УДК 539.311

Термоупругие условия взаимодействия среды с тонкостенным включением. С у л и м Г.Т. — "Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат.", вып. 15. Численные методы анализа. Львов, "Вища школа", изд-во при Львов. ун-те, 1979, с. 85-92 /на укр.яз./.

Установлено четыре варианта условий, которым в плоской задаче теории упругости удовлетворяют предельные значения напряжений и перемещений в упругой среде на линии контакта с ортотропным криволинейным термоупругим включением малой толщины. Обсуждаются условия применимости этих условий. Список лит.: 7 назв.

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Вестник Львовского университета

Серия механико-математическая

Выпуск I5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

/На украинском языке/

Львов

Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа"

Редактор В.В.В о й т о в и ч

Художній редактор І.С.К у ю ч к о

Технічний редактор Т.М.В е с е л о в с ь к и й

Коректор Т.Т.К о з а к

Підп. до друку 10.05.79. БГ III29. Формат 60x90/16.

Папір друк. № 3. Офс. друк. 6,5. умовн. друк. арк. 5,4 обл.-вид. арк.

Тираж 600 прим. Вид. № 574. Зам. 4430. Ціна 65 коп.

Видавництво при Львівському державному університеті видавничого
об'єднання "Вища школа". 290000, Львів, вул. Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління в справах
видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі, 290000, Львів,
вул. Стефаника, 11.

65 коп.



Вісник Львівського ун-ту. Серія механіко-математична,
1979, вип. 15, 1—103.