УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко, Й.Г.Шишка

ПРО МЕТОД ШВАРЦА ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Наводимо застосування методу Шварца для побудови бігармонічних функцій із заданими особливостями у просторових областях. Такі задачі мають прикладне значення, оскільки вони зв"язані з врахуванням факторів типу зосередженої сили, зосередженого моменту, лінійної дислокації, центрів розширювання /дилатації/, джерел, стоків і т.ін.

I. Нехай D – область у R_3, обмежена поверхнею Σ класу S_ℓ. Потрібно знайти в D функцію $u(x)$, яка бігармонічна скрізь у D за винятком точки y, в околі якої вона зображується у вигляді

$$u(x) = v(x) + \omega(x,y),$$

де

$$\omega(x,y) = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha D^\alpha r; \quad r = |x-y|;$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}\, \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

A_α – постійні числа; $v(x)$ – регулярна бігармонічна у D функція.

Крім того, $u(x)$ повинна на Σ задовольняти крайові умови

$$B^i u\big|_\Sigma = f_i(x),$$

$$B^i = \begin{cases} I & i=1 \\ \dfrac{\partial}{\partial n} & i=2, \end{cases}$$

де $f_i \in A_{\ell-i}$, $\ell=2$.

Позначимо через K_1 та K_2 дві кулі, обмежені сферами Γ_1 та Γ_2 радіусів ε_1 та ε_2 з центром в точці y і такі, що цілком лежать у D: $K_1 \subset K_2 \subset D$. Нехай $\Omega_1 = D \setminus K_1$, $\Omega_2 = D \setminus K_2$, $\partial\Omega_1 = \Sigma \cup \Gamma_1$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma_2$ ($\partial\Omega_i$ означає межу Ω_i, $i = 1; 2$).

Тоді $D = K_2 \cup \Omega_1$, $K = K_2 \cap \Omega_1 = K_2 \cap K_1$ /K - кульовий шар з межею $\partial K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ /.

Розглядувана задача зводиться до побудови регулярної бігармонічної функції $V(x) = U(x) - \omega(x,y)$ в області D. Зауважимо, що $\omega(x,y)$ - регулярна бігармонічна функція в K і Ω_1. Задачу розв"язуємо за допомогою методу Шварца, для цього введемо дві послідовності $u_k - \omega$ і v_k за такою схемою:

v_0 бігармонічна в D і задовольняє на її межі Σ умови

$$B^i v_0 \big|_\Sigma = f_i - B^i \omega;$$

u_0 - бігармонічна в Ω_2 і задовольняє на $\partial\Omega_2$ наступні крайові умови

$$B^i u_0 \big|_\Sigma = f_i;$$
$$B^i u_0 \big|_{\Gamma_2} = B^i \omega \big|_{\Gamma_2};$$

V_k /$k \geq 1$/ - кусково-бігармонічні в $D = K_1 \cup \Omega_1$ і задовольняють наступні умови на Σ і Γ_1:

$$B^i V_k \big|_\Sigma = f_i - B^i \omega \big|_\Sigma,$$
$$B^i v_k \big|_{\Gamma_1} = B^i (u_k - \omega) \big|_{\Gamma_1};$$

$u_k - \omega$ /$k \geq 1$/ - кусково-бігармонічні в $K_2 \cup \Omega_2$ і задовольняють на Σ і Γ_2 умови:

$$B^i u_k \big|_\Sigma = f_i \quad \left(B^i (u_k - \omega) \big|_\Sigma = f_i - B^i \omega \big|_\Sigma \right),$$
$$B^i (u_k - \omega) \big|_{\Gamma_2} = B^i V_{k-1} \big|_{\Gamma_2}.$$

2. Для доведення збіжності процесу введемо функціонал енергії, відповідний розглядуваній крайовій задачі

$$J(u) = \iiint\limits_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right)^2 d\tau,$$

який досягає мінімуму в D на розв"язках цієї задачі серед усіх функцій, які набувають на Σ ті ж значення, що і згадуваний розв"язок.

Покажемо, що на елементах побудованої вище послідовності значення функціоналу утворюють спадну послідовність додатних чисел:

$$J[v_k] \le J[u_k-\omega] \le J[v_{k-1}] < \ldots$$

Насправді, порівняємо значення $J(u)$ на функціях V_{k-1} та $u_k-\omega$ в області D.

Оскільки $u_k-\omega$ бігармонічна в Ω_2, а на її межі $\partial\Omega_2=\Gamma_2 \cup \Sigma$

$$B^i_{\Gamma_2}[u_k-\omega]=B^i_{\Gamma_2}(v_{k-1}),$$

$$B^i_{\Sigma}(u_k-\omega)=f_i-B^i_{\Sigma}\omega=B^i_{\Sigma}v_{k-1},$$

то $u_k-\omega=V_{k-1}$ в Ω_2 з огляду на єдиність розв"язку першої крайової задачі для бігармонічного рівняння. Тому

$$J(v_{k-1})=\iiint\limits_D \sum_{|\alpha|=2}\frac{2}{\alpha!}\left(\frac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right)^2 d\tau=$$

$$=\iiint\limits_{K_2}\sum_{|\alpha|=2}\frac{2}{\alpha!}\left(\frac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right)^2 d\tau+\iiint\limits_{\Omega_2}\sum_{|\alpha|=2}\frac{2}{\alpha!}\left(\frac{\partial^2(u_k-\omega)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right)^2 d\tau.$$

Оскільки $u_k-\omega$ бігармонічна в області K_2, то

$$\iiint\limits_{K_2}\sum_{|\alpha|=2}\frac{2}{\alpha!}\left(\frac{\partial^2(u_k-\omega)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right)^2 d\tau \le \iiint\limits_{K_2}\sum_{|\alpha|=2}\frac{2}{\alpha!}\left(\frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right)^2 d\tau.$$

Отже, з попередньої рівності маємо

$$J(v_{k-1}) \ge J(u_k-\omega).$$

Таким чином,

$$J(u_k-\omega) \le J(v_{k-1}).$$

Зовсім аналогічно доводиться нерівність

$$J(v_{k-1}) \le J(u_{k-1}-\omega).$$

3. Розглянемо множину функцій

$$\varphi(\alpha)=J[\alpha V_k+(1-\alpha)(u_k-\omega)].$$

Тому що $J(V_k)$ найменше значення функціоналу J в області $D=K_1\cup\Omega_1$ серед функцій з тими ж крайовими умовами, що і V_k, то

$$\varphi(\alpha)=J[\alpha V_k+(1-\alpha)(u_k-\omega)] \ge J(V_k).$$

Рівність досягається при $\alpha=1$, тому $\varphi'(1)=0$, звідки

$$\iiint\limits_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!}\left(\frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right)^2 d\tau -$$

$$-\iiint\limits_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}} \cdot \frac{\partial^2 (u_\kappa-\omega)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}} d\tau = 0.$$

Таким чином,

$$J(V_\kappa) = \underline{I}(V_\kappa,\ u_\kappa-\omega),$$

де

$$\underline{I}(u,v) = \iiint\limits_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}} d\tau,$$

маємо

$$J[V_\kappa-(u_\kappa-\omega)] = \iiint\limits_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!}\left(\frac{\partial^2 [V_\kappa-(u_\kappa-\omega)]}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right)^2 d\tau =$$

$$= J(V_\kappa)+J(u_\kappa-\omega)-2\underline{I}(V_\kappa, u_\kappa-\omega) = J(u_\kappa-\omega)-J(V_\kappa)$$

/із попередньої рівності/.

Оскільки послідовність додатних чисел

$$\ldots \leq J(V_\kappa) \leq J(u_\kappa-\omega) \leq J(V_{\kappa-1}) \leq \ldots$$

спадає, то вона прямує до певної границі. Отже,

$$|\,J(u_\kappa-\omega)-J(V_\kappa)\,| < \varepsilon$$

для $\kappa > N$, де $N=N(\varepsilon)$ – відповідним чином вибране число.

Таким чином,

$$J(V_\kappa-(u_\kappa-\omega)) \to 0 \qquad \text{при} \quad \kappa\to\infty,$$

тобто

$$\iiint\limits_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!}\left[\frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}} - \frac{\partial^2 (u_\kappa-\omega)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right]^2 d\tau \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0.$$

Це означає, що $\| V_\kappa-(u_\kappa-\omega)\|_{W_2^{(2)}(D)} \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0.$

3.4872

При цьому

$$[V_k - (u_k - \omega)] \in \overset{0}{L}{}_2^{(2)}(D),$$

$$[V_k - (u_k - \omega)] \in \overset{0}{W}{}_2^{(2)}(D),\ (u_k - \omega) \in W_2^{(2)}(D),\ \ V_k \in W_2^{(2)}(D).$$

Оскільки, згідно з теоремою вкладення,

$$\|(u_k - \omega) - V_k\|_C \leq K \|(u_k - \omega) - V_k\|_{W_2^{(2)}},$$

то $(u_k - \omega) - V_k$ збігається до нуля рівномірно в Ω .

Далі

$$\iiint_D |V_k|^2 d\tau \leq C \iiint_D \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right)^2 d\tau =$$

$$= CJ[V_k] \leq C_1 J[V_1] = K.$$

Скористаємося теоремою С.Я.Коган:

Сім"я бігармонійних функцій φ_k , визначених у складеній області D і належних простору $L_2(D)$, компактна у C , якщо $\iiint_D |\varphi_k|^2 d\tau < N^2$ рівномірно для всіх K . Гранична функція є бігармонічною.

Отже, за цією теоремою граничні функції $\bar{V}$ для V_k і $\bar{\bar{V}}$ для $(u_k - \omega)$, визначені в $D = K_1 \cup \Omega_1$ і $D = K_2 \cup \Omega_2$, є бігармонійними в D і збігаються в області $K = K_2 \cap K_1$.

4. Наведена вище схема безпосередньо переноситься і на випадок бігармонійних функцій, що мають особливості заданого типу на замкнених лініях та інших многовидах.

Список літератури: 1. К о г а н С.Я. О решении пространственной задачи теории упругости альтернирующим методом Шварца. - Известия АН СССР, сер.геофиз., 1956, № 3. 2. М и х л и н С.Г. Об алгоритме Шварца. - ДАН СССР, 1951, т.37, № 3, 4. 3. С о б о л е в С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости. - ДАН СССР, 1936, № 4. 4. С о б о л е в С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974.