УДК 519.21

І.Д.Квіт

ПРО РОЗЩЕПЛЕННЯ ОДНІЄЇ АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНОЇ ВИПАДКОВОЇ ЗМІННОЇ НА ДОБУТОК ДВОХ НЕЗАЛЕЖНИХ СИНГУЛЯРНИХ ВИПАДКОВИХ ЗМІННИХ

Нехай $\xi_1, \xi_2 \dots$ - послідовність незалежних двозначних випадкових змінних, причому

$$\mathcal{P}\{\xi_k = 1\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{\frac{1}{2^k}}\} = \frac{1}{2}, \quad (k = 1, 2, \dots). \qquad /1/$$

Тоді відбиття випадкової змінної ξ_k

$$\varphi_k(z) = \frac{1 + e^{\frac{z-1}{2^k}}}{2} = e^{\frac{z-1}{2^{k+1}}} ch \frac{z-1}{2^{k+1}}, \; -\infty < Re\, z,$$

а відбиття добутку $\xi = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$ набуває вигляду

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) = e^{\frac{z-1}{2}} \frac{sh \frac{z-1}{2}}{\frac{z-1}{2}} = \frac{e^{z-1} - 1}{z-1}, \; -\infty < Re\, z.$$

Та відбиття логарифмічно рівномірної випадкової змінної з густиною $p(t) = \frac{1}{t}$, $1 < t < e$

$$\varphi(z) = \int_1^e t^{z-1} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{e^{z-1} - 1}{z-1}, \; -\infty < Re\, z.$$

Отже, за теоремою єдиності, для відбиття [1] випадкова змінна $\xi = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$ є логарифмічно рівномірною на відрізку $[1, e]$, і, таким чином, а б с о л ю т н о н е п е р е р в н а.

Запишемо тепер випадкову змінну ξ у вигляді добутку

$$\xi = \left(\prod_{\nu=1}^{\infty} \xi_{2\nu} \right) \cdot \left(\prod_{\nu=1}^{\infty} \xi_{2\nu-1} \right) = \eta \cdot \zeta,$$

де η - добуток множників з парними індексами, а ζ - з непарними. На основі /1/ маємо

$$\mathcal{P}\{\xi_{2\nu} = 1\} = \mathcal{P}\{\xi_{2\nu} = e^{\frac{1}{4^\nu}}\} = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{P}\{\xi_{2\nu-1}=1\}=\mathcal{P}\{\xi_{2\nu-1}=\left(e^{\frac{1}{4^\nu}}\right)^2\}=\frac{1}{2},\ (\nu=1,2,\dots).$$

Визначимо випадкові змінні τ_ν умовами

$$\mathcal{P}\{\tau_\nu=1\}=\mathcal{P}\{\tau_\nu=\left(e^{\frac{1}{4^\nu}}\right)^3\}=\frac{1}{2},\ (\nu=1,2,\dots). \qquad /2/$$

Доведемо, що випадкова змінна $\tau=\prod_{\nu=1}^{\infty}\tau_\nu$ сингулярна. Звідси випливатиме, що змінні η і ζ також сингулярні, оскільки

$\xi_{2\nu}=\tau_\nu^{\frac{1}{3}}$ і $\xi_{2\nu-1}=\tau_\nu^{\frac{2}{3}}$.

На підставі /2/ одержуємо

$$\tau=\prod_{\nu=1}^{\infty}\tau_\nu\geq\prod_{\nu=1}^{\infty}1=1,\quad \tau=\prod_{\nu=1}^{\infty}\tau_\nu\leq\prod_{\nu=1}^{\infty}e^{\frac{3}{4^\nu}}=e^{3\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{4^\nu}}=e.$$

Отже, випадкова змінна τ набуває своїх значень між 1 та e, і її функція розподілу

$$\mathcal{F}(t)=0,\quad t<1;\quad \mathcal{F}(t)=1,\quad t\geq e.$$

Залежно від значень τ_1 дістаємо

$$\tau=1\cdot\prod_{\nu=2}^{\infty}\tau_\nu\leq\prod_{\nu=2}^{\infty}e^{\frac{3}{4^\nu}}=e^{\frac{1}{4}},\quad \tau=e^{\frac{3}{4}}\cdot\prod_{\nu=2}^{\infty}\tau_\nu\geq e^{\frac{3}{4}}.$$

Звідси нерівність $e^{\frac{1}{4}}<\tau<e^{\frac{3}{4}}$ неможлива і

$$\mathcal{F}(t)=\frac{1}{2},\quad e^{\frac{1}{4}}\leq t<e^{\frac{3}{4}};$$

стрибок функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ не більший від 1/2. Залежно від значень τ_1 і τ_2 маємо, що

$$\tau=1\cdot1\cdot\prod_{\nu=3}^{\infty}\tau_\nu\leq\prod_{\nu=3}^{\infty}e^{\frac{3}{4^\nu}}=e^{\frac{1}{16}},\quad \tau=1\cdot e^{\frac{3}{16}}\prod_{\nu=3}^{\infty}\tau_\nu\geq e^{\frac{3}{16}},$$

та

$$\tau=e^{\frac{3}{4}}\cdot1\cdot\prod_{\nu=3}^{\infty}\tau_\nu\leq e^{\frac{3}{4}}\prod_{\nu=3}^{\infty}e^{\frac{3}{4^\nu}}=e^{\frac{13}{16}},\quad \tau=e^{\frac{3}{4}}\cdot e^{\frac{3}{16}}\prod_{\nu=3}^{\infty}\tau_\nu\geq e^{\frac{15}{16}}.$$

Звідси нерівності $e^{\frac{1}{16}}<\tau<e^{\frac{3}{16}}$ та $e^{\frac{13}{16}}<\tau<e^{\frac{15}{16}}$ неможливі, отже

$$\mathcal{F}(t)=\frac{1}{4},\quad e^{\frac{1}{16}}<t<e^{\frac{3}{16}},\quad \mathcal{F}(t)=\frac{3}{4},\quad e^{\frac{13}{16}}<t<e^{\frac{15}{16}};$$

стрибок функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ не більший від $\frac{1}{4}$. Очевидно, що з урахуванням значень τ_1, τ_2 і τ_3 дістаємо

$$\mathcal{F}(t)=\frac{1}{8},\ e^{\frac{1}{64}}<t<e^{\frac{3}{64}};\ \mathcal{F}(t)=\frac{3}{8},\ e^{\frac{13}{64}}<t<e^{\frac{15}{64}}$$

та

$$\mathcal{F}(t)=\frac{5}{8},\ e^{\frac{49}{64}}<t<e^{\frac{51}{64}};\ \mathcal{F}(t)=\frac{7}{8},\ e^{\frac{61}{64}}<t<e^{\frac{63}{64}};$$

стрибок функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ не більший від $\frac{1}{8}$. Після врахування значень перших n множників τ приходимо до висновку, що стрибок функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ не більший від $\frac{1}{2^n}$. Отже, функція розподілу $\mathcal{F}(t)$ випадкової змінної $\tau=\prod_{\nu=1}^{\infty}\tau_\nu$ неперервна. Покажемо, що вона стала майже всюди на відрізку $[1, e]$.

За допомогою логарифмічної функції встановимо взаємно-однозначну відповідність між точками відрізків $[1, e]$ і $[0, 1]$. Тоді інтервалам постійності функції розподілу $\mathcal{F}(t)$ відповідатимуть на відрізку $[0, 1]$ інтервали $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right)$; $\left(\frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)$; $\left(\frac{1}{64}, \frac{3}{64}\right)$; $\left(\frac{13}{64}, \frac{15}{64}\right)$; $\left(\frac{49}{64}, \frac{51}{64}\right)$; $\left(\frac{61}{64}, \frac{63}{64}\right)$ і т.ін. зі сумарною одиничною довжиною

$$\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{32}+\dots=1.$$

Отже, функція розподілу $\mathcal{F}(t)$ стала майже всюди на відрізку $[1, e]$, і ріст її відбувається там на множині точок з мірою нуль. Таким чином, випадкова змінна τ сингулярна. Звідси, абсолютно неперервна випадкова змінна $\xi=\prod_{k=1}^{\infty}\xi_k$ розщеплюється на добуток двох сингулярних випадкових змінних

$$\eta=\prod_{\nu=1}^{\infty}\xi_{2\nu}=\tau^{\frac{1}{3}} \qquad \text{і} \qquad \zeta=\prod_{\nu=1}^{\infty}\xi_{2\nu-1}=\tau^{\frac{2}{3}}.$$

Розглянутий приклад показує, що добуток зчисленної кількості незалежних двозначних випадкових змінних може бути абсолютно неперервною або сингулярною випадковою змінною. Добуток двох незалежних сингулярних випадкових змінних може бути абсолютно неперервною випадковою змінною.

Відзначимо, що коли /I/ замінити на

$$\mathcal{P}\{\xi_k = 1\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{-\frac{1}{2^k}}\} = \frac{1}{2}, \ (k=1,2,\dots),$$

то $\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k$ логарифмічно рівномірно випадкова змінна з густиною $p(t) = \frac{1}{t}, \ \frac{1}{e} < t < 1$ і відбиттям

$$\varphi(z) = \frac{1 - e^{1-z}}{z-1}, \ -\infty < Re z.$$

Добуток множників ξ з парними /непарними/ індексами знову буде сингулярною випадковою змінною.

Якщо співвідношення /I/ замінити на

$$\mathcal{P}\{\xi_k = e^{-\frac{a}{2^k}}\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{\frac{a}{2^k}}\} = \frac{1}{2}, \ (a>0; \ k=1,2,\dots), \qquad /3/$$

то відбиття ξ_k дорівнюватиме

$$\varphi_k(z) = \frac{e^{-\frac{a}{2^k}(z-1)} + e^{\frac{a}{2^k}(z-1)}}{2} = ch\,\frac{a(z-1)}{2^k}, \ -\infty < Re z,$$

і добуток $\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k$ буде логарифмічно рівномірною випадковою змінною з густиною $p(t) = \frac{1}{2at}, \ e^{-a} < t < e^{a}, \ a > 0$ та відбиттям

$$\varphi(z) = \frac{sh\, a(z-1)}{a(z-1)}, \ -\infty < Re z.$$

Добуток випадкових змінних ξ_k

$$\mathcal{P}\{\xi_k = e^{-\frac{b-a}{2^{k+1}}}\} = \mathcal{P}\{\xi_k = e^{\frac{b-a}{2^{k+1}}}\} = \frac{1}{2}, \qquad /4/$$

$$(-\infty < a < b < \infty; \ k=1,2,\dots)$$

на імпульс у точці $e^{\frac{a+b}{2}}$ має відбиття

$$\varphi(z) = e^{\frac{a+b}{2}(z-1)} \prod_{k=1}^{\infty} ch\,\frac{(b-a)(z-1)}{2^{k+1}} =$$

$$= e^{\frac{a+b}{2}(z-1)} \frac{sh\,\frac{(b-a)(z-1)}{2}}{\frac{(b-a)(z-1)}{2}} = \frac{e^{b(z-1)} - e^{a(z-1)}}{(b-a)(z-1)}, \ -\infty < Re z$$

логарифмічно рівномірної випадкової змінної з густиною

$$p(t) = \frac{1}{(b-a)t}, \ e^{a} < t < e^{b}, \ -\infty < a < b < \infty.$$

Всі міркування, проведені для випадку /I/, зберігаються для випадків /3/ і /4/.

Список літератури: I. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів.ун-ту, сер.мех.-мат., 1978, вип.13.

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко

ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ЕЛЕКТРОВАКУУМНИХ ПРИЛАДІВ

Розглядаємо задачу мінімізації по вазі на міцність конструкції, що складається з чотирьох спряжених між собою оболонок обертання: двох сферичних і двох циліндричних /див.рисунок/. Конструкція знаходиться під рівномірним зовнішнім тиском $q=const$. Мінімум ваги /об"єму/ шукається при обмеженнях, що накладені на максимальні розтягуючі напруження і деякі геометричні параметри.