Список літератури: I. Д а ф ф и н Р., П и т е р с о н Э., З е н е р К. Геометрическое программирование. – М.: Мир, I972. 2. З е н е р К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. – М.: Мир, I973. 4. О щ и п к о Л.Й., І в а н к і в К.С., Ю д і н а Т.В. Оптимальний розрахунок деяких елементів електровакуумних приладів. – Вісн.Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., I977, вип.I2. 4. О щ и п к о Л.Й., М и с ь к і в О.А. Оптимальний розрахунок складових оболонок обертання. – Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., I979, вип. I4.

УДК 5I7.958:68I.3.057

Г.А.Шинкаренко, С.С.Григорян, І.І.Дияк

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ТЕПЛООБМІНУ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Процес нестаціонарного конвективного осесиметричного теплообміну при відсутності внутрішніх джерел тепла описується рівнянням

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\right)=c\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (r,z)\in\Omega \qquad /1/$$

з крайовою і початковою умовами

$$-\lambda\frac{\partial u}{\partial\nu}=\alpha(u-f), \quad (r,z)\in\Gamma, \qquad /2/$$

$$u(r,z,0)=u_0(r,z), (r,z)\in\Omega. \qquad /3/$$

де Ω – меридіанний перетин тіла, віднесений до циліндричної системи координат; Γ – границя області Ω ; λ , α , c – відповідно коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі і теплоємності; f , u_0 – відомі значення температури навколишнього середовища і початкового розподілу температури; ν – напрям зовнішньої нормалі до контуру Γ .

Варіаційна постановка задачі /1/-/3/ формулюється так [2] : знайти таку функцію $u\in W_2^1(\Omega)$, яка задовольняє варіаційне рівняння

$$(c\dot{u},v)+a(u,v)=[f,v] \qquad \forall v\in W_2^1(\Omega) \qquad /4/$$

і початкову умову /3/. Тут використано наступні позначення:

$(\cdot,\cdot)$, $[\cdot,\cdot]$ – скалярний добуток в $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$; $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$;

$$a(u,v) = \int_\Omega \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) r\,dr\,dz + \int_\Gamma \alpha u v r\, ds.$$

Триангулюємо область Ω деяким набором трикутних елементів Ω_e і побудуємо скінченновимірний простір $V_N^h \subset W_2^1(\Omega)$ кусково-лінійних функцій, база якого $\varphi_i(r,z)$, $i=1,2,\dots,N$, визначається таким чином: 1/ кожній функції φ_i ставиться у відповідність вершина $P_i(r_i, z_i)$ так, що $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера; 2/ в функції φ_i, за виключенням тих, які відповідають вершинам елемента Ω_e, дорівнюють нулеві всюди на Ω_e. Побудований простір V_N^h має таку властивість апроксимації [4]: для кожної функції $v \in W_2^2(\Omega)$ існує $v^h \in V_N^h$ така, що $\|v-v^h\|_0 + h\|v-v^h\|_1 < Ch^2\|v\|_2$, де $\|.\|_K$ – норма простору $W_2^K(\Omega)$; h – максимальний діаметр трикутників Ω_e.

Після дискретизації по просторових змінних наближений розв"язок задачі записуємо у вигляді суми

$$u^h = \sum_{j=1}^{N} q_j(t)\,\varphi_j(r,z) = \varphi q$$

і для визначення функцій $q_j(t)$ на основі рівняння /4/ дістаємо систему звичайних диференціальних рівнянь N -го порядку

$$M\dot q(t) + Kq(t) = F(t), \qquad /5/$$

де M, K – постійні додатно визначені матриці з елементами $M_{ij} = (c\varphi_i, \varphi_j)$, $K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$; $F(t)$ – вектор з компонентами $F_i(t) = [f, \varphi_i]$. Вони обчислюються згідно звичайної процедури методу скінченних елементів /МСЕ/ [3] підсумовуванням їх значень по всіх елементах триангуляції. Наприклад, якщо трикутник Ω_e визначається вершинами $P_t(r_t, z_t)$, $t=\ell, m, n$ і його сторона $P_m P_n$ лежить на границі Γ, то доданки у матриці M, K, F визначаються формулами

$$M_{ij}^e = \begin{cases} \frac{2c\Delta_e}{5!}(r_0 + 2r_i), & i=j \\ \frac{2c\Delta_e}{5!}(r_0 - r_k), & i\neq j \end{cases},$$

$$K_{ij}^{e} = \lambda \frac{z_0}{3!} S_{ij} + 2\alpha \frac{L}{4!} \delta_{im}\delta_{jn} [(2\delta_{im}\delta_{jm}+1)z_m + (2\delta_{jn}\delta_{in}+1)z_n],$$

$$F_i^{e}(t) = \alpha \frac{L}{4!} (\delta_{im} + \delta_{in}) \{ f_m[(2\delta_{im}+1)z_m + z_n] + f_n[(2\delta_{in}+1)z_n + z_m] \},$$

де i, j, k – циклічна перестановка індексів ℓ, m, n; Δ_e – площа трикутника Ω_e; $z_0 = z_\ell + z_m + z_n$; $S_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j)/\Delta_e$; $b_i = z_j - z_k$; $c_i = z_k - z_j$; δ_{ij} – символ Кронекера; $f_i = f(z_i, z_i, t)$; L – довжина сторони $P_m P_n$. Якщо сторона $P_m P_n$ не збігається з границею Γ, то в формулах для обчислення коефіцієнтів K_{ij}^{e}, F_i^{e} потрібно прийняти $L=0$.

Початкова умова для системи /5/ одержується природно, якщо зауважити, що функція $q_j(t)$ визначає поведінку температури у вузлі $P_j(z_j, z_j)$. Таким чином

$$q_j(0) = u_0(z_j, z_j), \quad j = 1,2,\ldots,N. \qquad /6/$$

Задача Коші /5/, /6/ визначається жорсткою системою рівнянь /5/, що зумовлює використання безумовно стійких схем її чисельного інтегрування. Зокрема, застосовуючи до /5/ формулу трапецій з кроком інтегрування Δt, дістаємо схему Кранка-Ніколсона

$$-(M + \tfrac{1}{2}\Delta t K) q^{n+1} = (M - \tfrac{1}{2}\Delta t K) q^{n} + \tfrac{1}{2}\Delta t (F^{n+1} + F^{n}), \qquad /7/$$

де $q^n = q(n\Delta t)$; $F^n = F(n\Delta t)$; $n = 0,1,2,\ldots$; $q^0 = q(0)$.

При чисельній реалізації процесу послідовного розв"язування системи /7/ матрицю $M + \frac{1}{2}\Delta t K$ зручно зобразити у вигляді добутку $L^T L$, де L – нижня трикутна матриця Холецького. Тоді на кожному кроці по часу вектор q^{n+1} визначається двома оберненими підстановками

$$L q^{n+1/2} = (M - \tfrac{1}{2}\Delta t K) q^{n} + \tfrac{1}{2}\Delta t (F^{n+1} + F^{n}),$$

$$L^T q^{n+1} = q^{n+1/2}.$$

Такий алгоритм розв"язування задачі Коші дає змогу: 1/ використовувати достатньо великі кроки по часу – їхня величина обмежується лише оцінкою похибки $O\{[h^2 + (\Delta t)^2] \lg \frac{1}{\Delta t}\}$ в L_2 – нормі [6];

2/ проводити обчислення з меншою кількістю операцій, ніж цього вимагають методи Рунге-Кутта чи ітераційні методи. Аналіз інших схем можна знайти у працях [5, 6].

Представлений алгоритм реалізований у комплексі ФОРТРАН-програм для ЕОМ БЕСМ-6. Нижче подано деякі результати проведених чисельних досліджень.

t	r				
	0,00	0,25	0,50	0,75	I,00
0,00	I02I6 I0000 I0000	99I4 I0000 I0000	I0069 I0000 I0000	9978 I0000 I0000	9574 I0000 I0000
0,02	I0000 I0000 I0000	I0002 9999 I0000	9989 9989 I0000	977I 986I 9808	8494 8I66 8499
0,04	I0000 9997 I0000	9988 9989 9996	988I 99I6 9905	9360 940I 9380	7920 8078 7920
0,08	9896 9928 9927	9808 9842 9835	9454 9483 9483	8620 8669 8646	7I45 7233 7I6I
I,00	2493 2854 –	243I 2780 –	2252 25I0 –	I970 2202 –	I602 I794 –
2,00	5I5 695 –	502 679 –	465 637 –	407 540 –	33I 48I –

У таблиці наведено значення температури $u \times 10^4$ нескінченного циліндра одиничного радіуса при таких даних задачі: $\lambda = C = \alpha = 1$, $u_0 \equiv 1$, $f \equiv 0$. Крок сітки по просторових змінних дорівнює 0,I25. Верхнє число кожної графи – аналітичний розв"язок [I] з врахуванням п"яти перших членів розкладу в ряд, середнє – розв"язок МСЕ з Δt = 0,02, нижнє – розв"язок МСЕ з Δt = 0,002. Помітно, що вибрана сітка по просторових змінних дає змогу достатньо добре апроксимувати точний розв"язок задачі, оскільки зменшення кроку по часу значно поліпшує характер наближеного розв"язку.

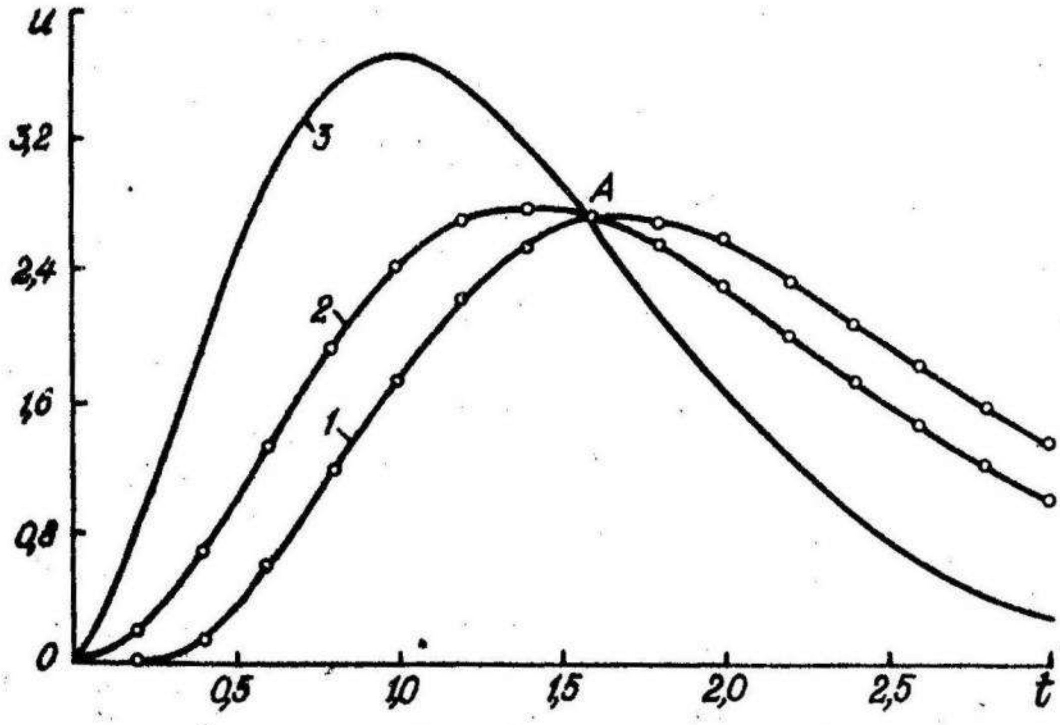

Рис. I.

На рис. I показано зміну температури в часі на осі /крива I/ та зовнішній поверхні /крива 2/ нескінченного циліндра одиничного радіуса. Показано також графік /крива 3/ зміни температури зовнішнього середовища $f = f(t) = 10t^{3/2} \exp(-t^{3/2})$. Решта параметрів задачі така: $\lambda = c = \alpha = 1$, $u_0 = 0$, Δt = 0,02.

Зауважимо, що момент часу, коли температура поверхні вирівнюється з температурою середовища, характеризується крайовою умовою $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$; це означає, що крива температури поверхні має горизонтальну дотичну. Чисельні результати підтверджують цей факт /точка A на рис. I/.

Графіки рис. 2 показують, що в кожний конкретний момент часу температура є монотонною функцією радіальної змінної. Це явище повністю узгоджується з принципом максимуму для параболічних рівнянь і означає, що при нерівномірній зміні температури середовища у процесі конвективного теплообміну можуть існувати такі моменти часу, коли температура стає постійною у межах тіла. У наших умовах цей момент часу відповідає значенню t = I,62 і характеризується точкою A на рис.I.

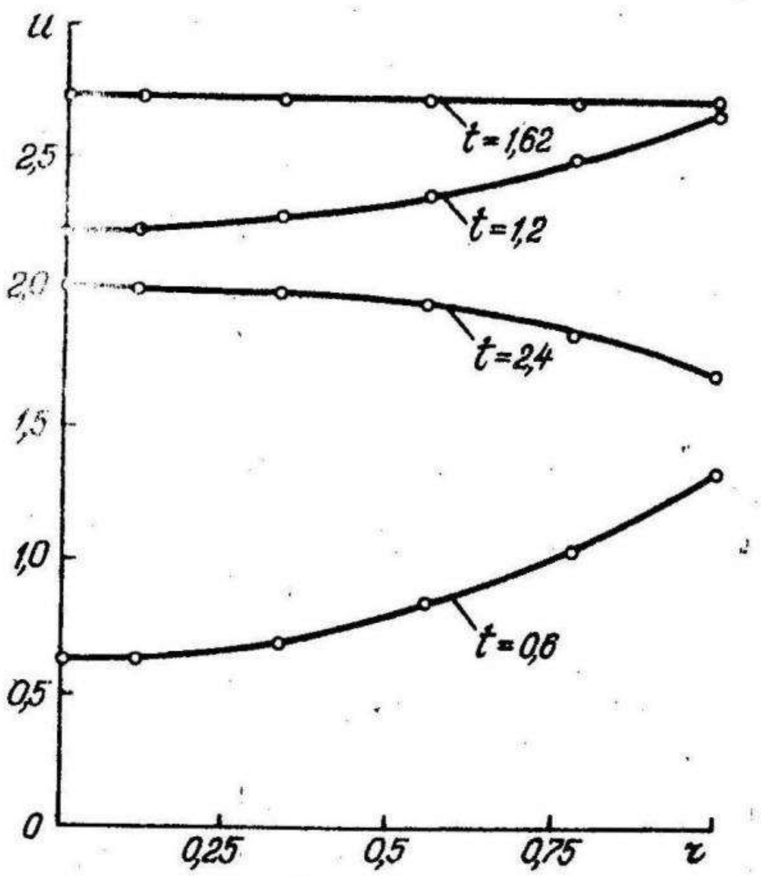

Рис. 2.

Зроблений аналіз свідчить про високу якість наближеного розв"язку, одержаного методом скінченних елементів.

Автори висловлюють вдячність проф. Н.П.Флейшману і доц.Я.Г.Савулі за обговорення результатів у процесі виконання роботи.

Список літератури: I. К у т а т е л а д з е С.С. Основы теории теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1970. 2. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. 3. С а в у л а Я.Г., Ш и н к а р е ч к о Г.А. Метод скінченних елементів. – Львів: Вища школа, 1976. 4. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. 5. Zlamal M. Finite element method for parabolic equations. – Lect. Notes Math., 1974, N 363. 6. Zlamal M. Finite element multistep discretizations of parabolic boundary value problems. – Math. Comput., 1975, vol. 29, N 130.